CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
**DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT**
Direction des Admissions et concours

# ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
# E.S.C.P.-E.A.P.
# ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

**OPTION ECONOMIQUE**

## MATHEMATIQUES III

**Année 1982**

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*
*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*
*Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

---

## PREMIER EXERCICE

On désigne par $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre 3 à éléments réels.
On considère les éléments suivants de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad K = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Exprimer $K$ comme combinaison linéaire de $I$ et $J$. Pour tout entier naturel non nul $n$, calculer $J^n$ en fonction de $J$ et de $n$. En déduire $K^n$. Expliciter les éléments de $K^n$ en numération décimale.

2. Soit $E$ l'ensemble des matrices de la forme $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ où $a$ et $b$ parcourent $\mathbb{R}$. Montrer que $E$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.
   (On rappelle qu'une sous-algèbre d'une algèbre en est exactement une partie non vide, stable par les lois induites, internes et externes).
   Quelle est la dimension de l'espace vectoriel réel sous-jacent à $E$ ?

3. Soit $B = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, soit $f_{a,b}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $B$ est $M(a,b)$.

(a) Vérifier que $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice de passage de $B$ à une base $(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$ constituée par des vecteurs propres de $f_{a,b}$. Préciser la valeur propre associée à chacun de ces vecteurs propres. Déterminer tous les sous-espaces propres et donner leurs dimensions.

(b) On désigne par ${}^tQ$ la matrice transposée de $Q$. Calculer le produit ${}^tQ.Q$. En déduire la matrice $Q^{-1}$.

(c) Quelle est la matrice de $f_{a,b}$ dans la base $(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$ ? Et à l'aide des questions a) et b) calculer $M^n(a,b)$ pour tout entier naturel non nul.

(d) Retrouver ainsi l'expression de $K^n$ obtenu à la question 1.

## DEUXIEME EXERCICE

Pour tout entier naturel $n$, on pose $I_n = \int_0^{\ln\sqrt{3}} (\operatorname{th} x)^n dx$, où ln désigne le logarithme népérien.

On rappelle que, pour tout nombre réel $x$, $\operatorname{th} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$. On rappelle aussi que la fonction th est strictement croissante, dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $(\operatorname{th} x)' = 1 - (\operatorname{th} x)^2$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel $n$, on a : $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\ln\sqrt{3}}{2^n}$. En déduire la limite de $I_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

2. Calculer $I_0$ et $I_1$.

3. Montrer que $I_n - I_{n+2} = \dfrac{1}{(n+1)2^{n+1}}$.

4. On considère les séries de termes généraux $u_n = \dfrac{1}{(2n+1)2^{2n+1}}$, où $n \geqslant 0$, et $v_n = \dfrac{1}{n2^n}$ où $n \geqslant 1$.

   (a) Montrer que ces deux séries sont convergentes.

   (b) En utilisant les deux questions 2) et 3), calculer les sommes de ces deux séries.

## TROISIEME EXERCICE

On considère deux pièces de monnaie notées $A_1$ et $A_2$. Lorsqu'on lance la pièce $A_1$, la probabilité d'obtenir "face" est $p_1$, $0 \leqslant p_1 \leqslant 1$, celle d'obtenir "pile" est $q_1 = 1 - p_1$. De même, lorsqu'on lance la pièce $A_2$, la probabilité d'obtenir "face" est $p_2$, $0 \leqslant p_2 \leqslant 1$, celle d'obtenir "pile" est $q_2 = 1 - p_2$.
On effectue une suite de parties de la façon suivante : à la première partie, on choisit une pièce au hasard (avec la probabilité $\frac{1}{2}$) et on joue avec cette pièce; si le résultat est "face", on joue la deuxième partie avec $A_1$, si le résultat est "pile", on joue la deuxième partie avec $A_2$; ensuite, pour tout entier $n \geqslant 1$, on joue la $(n+1)^{\text{ème}}$ partie avec $A_1$ si l'on a obtenu "face" à la $n^{\text{ème}}$ partie, on joue la $(n+1)^{\text{ème}}$ partie avec $A_2$ si on a obtenu "pile" à la $n^{\text{ème}}$ partie.

1. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $u_n$ la probabilité d'avoir "face" à la $n^{\text{ème}}$ partie.

   (a) Exprimer $u_1$, puis $u_2$ en fonction de $p_1$ et $p_2$.

   (b) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$,
   $$u_{n+1} = (p_1 - p_2)u_n + p_2.$$

   (c) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ tend, quand $n$ tend vers l'infini, vers une limite $u$ que l'on calculera. Dans quels cas a-t-on $u = \dfrac{1}{2}$ ?

2. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $X_n$ la variable aléatoire, associé à la $n^{\text{ème}}$ partie, qui prend la valeur 1 si le résultat de la $n^{\text{ème}}$ partie est "face", la valeur 0 si le résultat de la $n^{\text{ème}}$ partie est "pile".

   (a) Déterminer les lois de probabilité des variables aléatoires $X_1$ et $X_2$ et calculer leurs espérances mathématiques.

   (b) Les variables aléatoires $X_1$ et $X_2$ sont-elles indépendantes ?

## QUATRIEME EXERCICE

Soit $X$ une variable aléatoire réelle, définie sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, dont la loi de probabilité admet une densité $f$ définie, pour tout $x$ réel, par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x^4} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

1. Vérifier que $f$ définit bien une densité de probabilité et la représenter graphiquement.

2. Déterminer la fonction de répartition $F$ de $X$ et représenter son graphe.

3. La variable aléatoire $X$ possède-t-elle une espérance mathématique ? La calculer si elle existe.

4. Calculer, pour $x$ et $a$ réels, l'expression $F_a(x) = P(X < x / X \geqslant a)$, probabilité conditionnelle de l'évènement $\{X < x\}$ sachant que l'évènement $\{X \geqslant a\}$ est réalisé.

5. Soit $a \geqslant 1$ et soit $Y$ la variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ par $Y = aX$. Trouver la fonction de répartition de $Y$; en déduire sa densité de probabilité. Calculer l'espérance mathématique de $Y$.

- FIN -