

Mathématiques – option scientifique

Conception ESSEC/HEC Paris

Session 2022

Description du problème

Le problème étudiait des propriétés des endomorphismes cycliques et abordait la décomposition de Frobenius et deux de ses applications.

La première partie était consacrée à la découverte des sous-espaces cycliques et à établir une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité d'un endomorphisme cyclique portant sur son polynôme caractéristique. Suivaient un exemple en dimension 3 et deux tests Scilab censés tester la condition établie.

Dans la seconde partie, on précisait ce qu'étaient les endomorphismes diagonalisables et cycliques, puis nilpotents et cycliques. On terminait par un exemple.

La troisième partie permettait de démontrer l'existence de la décomposition de Frobenius et en donnait deux applications

Barème, attentes du jury

Les questions étaient de difficultés variées, certaines proches du cours et d'autres demandant de l'initiative et de la réflexion. Aucune n'appelait à des développements trop longs ou trop techniques, ce qui a évité aux candidats de se fourvoyer et de s'égarer. L'ensemble a permis aux étudiants maîtrisant les connaissances exigibles et capables d'attention et de rigueur de progresser dans le problème pour montrer leurs qualités.

Le grand nombre de questions et l'indépendance des parties permettaient aux étudiants sérieux et pugnaces d'obtenir d'excellentes notes grâce à un travail approfondi sur l'ensemble du problème.

Les correcteurs ont trouvé le sujet intéressant, présentant un nombre significatif de questions de difficultés raisonnables. Ainsi, il était conforme au programme et à son esprit.

44 %, 30.5 % et 25.5 % des points du barème ont été affectés aux trois parties décrites ci-dessus.

Commentaires sur la correction

Cette année encore, les copies étaient majoritairement soignées et bien présentées. L'effort de rédaction, la mise en évidence des conclusions sont avec la rigueur et l'honnêteté des raisonnements, des éléments majeurs dans l'appréciation des copies.

Les premières questions ont été très décevantes. La question 2 est très rarement comprise, les arguments avancés dans la question 3 sont souvent au mieux peu précis. Les notions élémentaires de liberté et de liaison sont mal cernées par beaucoup. Si la question 4 est mieux réussie, les suivantes 5, 6, 7 font apparaître des erreurs de raisonnement importantes. Une parmi d'autres : on ne peut pas prétendre avoir mené à bien une preuve d'équivalence quand son propos est une succession de « donc » !

Si la question 8 a été globalement vue par les candidats, seules les bonnes copies font la 9 correctement et complètement la 10 et la 11. Dans la 12, on voit le plus souvent seulement la partie cours : une valeur propre est racine d'un polynôme annulateur. La suite de la question était effectivement plus difficile.

Les correcteurs déplorent que la section C consacrée à un exemple en dimension 3 ait été si mal traitée. Ils condamnent les candidats qui se refusent à faire des calculs (pourtant très raisonnables). Il est inadmissible de voir des candidats dire par exemple à la question 16 « on vérifie sans problème la liberté de $V, f(V)$ et $f^2(V)$ » ... parfois même sans avoir explicité ces vecteurs. Qu'est-ce-à-dire ? Serait-ce de la trop basse besogne pour leurs augustes personnes ? On rappelle que les calculs doivent figurer sur les copies et que la rigueur, la précision et l'honnêteté doivent être le fil directeur des candidats. Les correcteurs ont été surpris à la question 18 que les candidats pensent encore devoir vérifier que V_1, V_2, V_3 est une base.

La section D était l'occasion de faire un peu de Scilab : si les questions (difficiles) 19 et 20 ont été peu abordées, l'algorithme de la 21 a souvent été bien complété. Dans la question 22, on attendait que l'on cite le théorème des valeurs intermédiaires ou, au moins que l'on fasse une allusion à la continuité, mais dans de nombreuses copies on ne trouvait ni l'un ni l'autre. Dans la 23, la disjonction de cas a trop rarement été comprise. L'algorithme de la question 24 était rarement correct, entre erreurs de boucle et mauvais décomptes et la question 25 où on attendait surtout une critique de la méthode proposée n'a pas été comprise.

La partie II section A a été bien mal traitée et on voit beaucoup de choses incohérentes dès la question 26. On y trouvait des compositions de vecteurs et assez peu souvent la justification de la permutation des endomorphismes. Étonnant également que des candidats qui avaient répondu à la question 18 ne fassent pas le lien avec la 30. La section B est souvent traitée. On voit que beaucoup de candidats ont déjà rencontré la question 31.

La section C et ses questions relevant du programme d'analyse ont évidemment aimanté l'attention des candidats. Si la convergence de l'intégrale est en général faite correctement, il est extrêmement rare de voir justifié (par un binôme de Newton) que $u(P)$ est un polynôme. L'intégration par parties (Q35) est souvent bien faite mais le changement de variable (Q37) est rarement correctement justifié. La rédaction de la question 36 est souvent bâclée et omet surtout de présenter pourquoi la dérivée n -ième n'apparaît pas. Enfin, des candidats sérieux rédigent correctement Q38 en utilisant le théorème fondamental de l'analyse. Les questions suivantes sont peu ou mal traitées.

Peu de copies abordent véritablement la troisième partie. Ce n'était d'ailleurs pas forcément un handicap pour un candidat qui avait su être pertinent et persévérant sur les premières parties.

Les questions 42 et 44 ne sont pas comprises et trop peu de copies voient le lien entre 43 et 6.

On constate une grave méconnaissance des formules de changement de base.

On regrette vivement que des candidats qui n'ont pas su suivre le fil du problème se sentent obligés de répondre « au hasard » à la question 53 affirmant que la matrice est diagonale, triangulaire supérieure ou toute autre invention !

Conclusion et conseil aux futurs candidats

Le sujet présentait des difficultés techniques modérées mais demandait d'avoir du recul sur le cours d'algèbre linéaire. Certaines copies montrent une belle maîtrise quand d'autres ont du mal à initier la moindre démonstration.

Nous encourageons vivement les candidats à ne pas négliger de traiter consciencieusement les exemples. Ils aident à la compréhension du sujet et pèsent dans le barème un poids important. Les deux exemples traités aux sections C des parties I et II représentaient plus de 25 % des points du barème.

Les correcteurs renouvellent avec force leur demande exprimée dans les rapports des années précédentes : les copies doivent être propres, bien présentées. C'est majoritairement le cas, mais il persiste des copies peu soignées ou bien désagréables à lire. Attention, l'effort de rédaction, la mise en évidence des conclusions sont, avec la rigueur et l'honnêteté des raisonnements, des éléments majeurs dans l'appréciation des copies.

Il faut également éviter les encres trop pâles puisque les correcteurs travaillent maintenant sur les versions numérisées des copies.

Le barème adopté a engendré un bon étalement des notes et le sujet a permis de bien distinguer les meilleurs étudiants. Plusieurs très bonnes copies ont obtenu la note maximale.

L'écart-type de l'épreuve s'établit à 05 pour une moyenne générale de 10.52.