

MATHÉMATIQUES S (ÉPREUVE n° 281)

ANNÉE 2015

Épreuve conçue par ESSEC
Voie économique et commerciale

Description du problème

L'épreuve portait sur l'étude des espaces $F(q)$ de fonctions solutions de l'équation $f'' = qf$ puis plus précisément des espaces $E_a(\omega)$ de fonctions solutions du problème $\{f'' = -a\omega f, f(0) = f(1) = 0\}$.

L'introduction, à travers l'étude de l'endomorphisme $\Phi(f) : t \in [0,1] \mapsto \int_0^t (t-u)q(u)f(u)du$, permettait essentiellement d'obtenir la majoration par 2 de la dimension de $F(q)$.

La première partie consistait en l'étude de plusieurs exemples, puis à obtenir la majoration par 1 de la dimension de $E_a(\omega)$ et enfin, l'orthogonalité des espaces $E_a(\omega)$ et $E_b(\omega)$. Dans la deuxième partie, on explicitait les espaces $E_{k^2\pi^2}(1)$ et on réduisait un endomorphisme défini sur la somme de 1 à n des espaces $E_{k^2\pi^2}(1)$.

Enfin, de retour au cas général dans la troisième partie, on démontrait de manière très guidée, en faisant appel aussi bien à l'algèbre qu'à l'analyse, qu'il n'existe pas de suite bornée $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs, deux à deux distincts, telle que, pour tout entier n, $E_{a_n}(\omega)$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

Les questions étaient de difficulté variée, certaines proches du cours et d'autres demandant de l'initiative et de la réflexion. Aucune n'appelait à des développements trop longs ou trop techniques, ce qui a évité aux candidats de se fourvoyer et de s'égarer. L'ensemble a permis aux étudiants maîtrisant les connaissances exigibles et capables d'attention et de rigueur de progresser dans le problème pour montrer leurs qualités.

L'indépendance des parties a permis à certains étudiants ayant mal démarré le problème d'obtenir d'excellentes notes grâce à leur travail, notamment dans la troisième partie.

Les correcteurs ont trouvé le sujet intéressant, bien construit, de difficulté adaptée et conforme à l'esprit du programme.

18%, 22%, 25% et 35% des points du barème ont été affectés aux quatre parties décrites ci-dessus.

Commentaires sur la correction

Les copies étaient majoritairement soignées et bien présentées. L'effort de rédaction, la mise en évidence des conclusions sont, effectivement, avec la rigueur et l'honnêteté des raisonnements, des éléments majeurs dans l'appréciation des copies.

Dès l'introduction, on constate que trop de candidats ne maîtrisent pas les techniques élémentaires exigibles : démontrer qu'un ensemble est un espace vectoriel a posé beaucoup de difficultés. Fort peu de copies démontrent correctement que Φ est un endomorphisme ; de même sont erronées la plupart des dérivations de $\Phi(f)$. Il n'est pas normal qu'un étudiant obtenant $(\Phi(f))'' = 0$ ne s'inquiète pas, au vu des questions suivantes, de la cohérence de sa réponse ...

La partie I n'a pas été bien traitée par les candidats : on y trouvait seulement une preuve incomplète en 3a ; la question 4 se limitait le plus souvent à la vérification que les fonctions $t \mapsto \exp((\sqrt{-a})t)$... étaient dans $F(-a)$, et, dans la question 7, régulièrement la preuve du caractère défini était bâclée.

Dans la partie II, la plupart des candidats passent à côté de la question 10 en affirmant trop vite que $u(G) \subset G$. Les matrices proposées sont la plupart du temps fausses avec des coefficients farfelus comme $2\cos(\pi t)$. Néanmoins, de bons étudiants tirent leur épingle du jeu et font les choses proprement jusqu'à la question 12.

La dernière partie a permis à beaucoup de candidats sérieux de reprendre pied dans le problème et de montrer leur capacité à être rigoureux dans les questions 15, 16 et 17.

Conclusion

Si beaucoup de copies laissent apparaître des lacunes criantes (sous-espaces vectoriels, ...) et un manque de recul handicapant pour aborder une épreuve de ce niveau, les bons candidats ont eu l'occasion de prouver leur valeur au travers de copies soignées, toujours appréciées par le jury.

Le barème adopté a engendré un très bon étalement des notes et le sujet a parfaitement permis de distinguer les meilleurs étudiants. Plusieurs excellentes copies ont obtenu la note maximale. L'écart-type de l'épreuve s'établit à 4,25 pour une moyenne générale de 9,70.