MATHEMATIQUES I

Option scientifique — Yves Monlibert

Description du problème

Le problème de cette année faisait référence aux travaux de Karl Löwner concernant la monotonie de certaines applications définies sur l'ensemble des matrices symétriques strictement positives.Il se composait de quatre parties, les deux premières étant totalement indépendantes.

La première d'entre elles proposait une représentation intégrale des fonctions puissances $x \mapsto x^{\oplus}$ lorsque $|\oplus| < 1$. Elle faisait essentiellement appel à la notion d'intégrale impropre et aux propriétés classiques de l'intégration.

Dans la deuxième partie, on s'intéressait aux matrices symétriques définies positives : définition et caractérisations diverses. Elle se terminait par l'étude de la stricte monotonie de l'application inverse.
Ces deux parties pouvaient être abordées par tous les candidats mêmes ceux dont les connaissances étaient les plus modestes.

Le coeur du problème se situait dans la troisième partie. D'un abord plus délicat, elle faisait appel en premier lieu à la notion de décomposition spectrale dont la définition avait été donnée de manière précise, puis à l'extension de quelques propriétés du calcul intégral aux matrices. Pour terminer cette partie du problème, il fallait faire preuve d'esprit de synthèse car les thèmes abordés dans les deux premières parties y étaient largement entremêlés.

Pour clore l'épreuve, il était proposé une étude comparative des monotonies des applications introduites au début du problème.

Dans l'ensemble, les correcteurs ont trouvé le sujet original et mathématiquement intéressant. Faisant référence aux thèmes les plus centraux des programmes d'algèbre et d'analyse du programme, l'énoncé a été considéré comme bien ciblé. L'équilibre entre calcul et déduction a été apprécié. Cependant, certains correcteurs déplorent la longueur du sujet : ne fallait-il pas étudier plus tôt les exemples mis en oeuvre dans la dernière partie pour mieux faire comprendre la notion de décomposition spectrale ?

22%,24%,32% et 22% des points ont été affectés aux quatre parties décrites ci-dessus.

Commentaires sur la correction

D'un point de vue général, l'épreuve mettait en évidence chez bon nombre de candidats les défauts constatés les années précédentes ; parmi ceux-ci:

- une absence de rigueur dans les raisonnements (confusion entre analyse et synthèse)
- l'objectif trop restreint d'avancer dans le problème sans esprit critique
- d'importantes lacunes en analyse : connaissance très partielle de la fonction $x \mapsto x^{\oplus}$ et des critères d'intégrabilité.

La partie I fut discriminante pour beaucoup de candidats : si certains recensèrent bien les problèmes de convergence , la plupart ont oublié ceux qui sont en 0^+ ; les solutions furent souvent peu rigoureuses : manque d'hypothèse de signe, référence à des théorèmes aux cigles inquiétants
(ccftp,ccifpe,tciifcp).
Le changement de variable évoqué au 3/ ne fut trouvé que par environ un tiers des candidats. Comme il fallait s'y attendre, la formulation de la 4ème question a conduit les candidats à penser naïvement qu'il fallait intervertir limite et intégrale sans justification.

Dans la partie II, beaucoup de candidats se sont souvenus avoir traité la question 1/a) en classe ; ils y ont fait référence avec plus ou moins de bonheur mais cela est resté décevant.
Un peu de bon sens permettait,sans connaissances d'établir la caractérisation des matrices symétriques définies positives 2,2 : seule une minorité de copies ont apporté des solutions cohérentes ;
Paradoxalement, dans 2/b), l'obtention du maximum de Φ_X^A a été souvent bien établie. Dans (iii), le passage à $B^{-1} < A^{-1}$ fut souvent fait en affirmant sans justification que le maximum de Φ_X^B était strictement inférieur à celui de Φ_X^A.

La partie III permettait de juger de la réelle adaptation des candidats à l'épreuve et de leur rigueur dans l'utilisation des notions proposées.
Les deux premières questions furent mal comprises. L'indication $M_{n,1}(\mathbb{R}) = \overset{p}{\underset{i=1}{}} E_{\Sigma_i}(A)$ ne semble pas avoir été suffisante pour inciter les candidats à travailler avec une base de vecteurs propres. Voici quelques exemples de propositions de solutions rencontrées de manière récurrente dans les copies : $A = \overset{p}{\underset{i=1}{}} \Sigma_i \left\langle A, E_{\Sigma_i}(A) \right\rangle ; M_i \quad E_{\,i}(A) ; M_{n,1}(\mathbb{R}) = Vect\left(M_1, M_2, ..., M_p\right)$.
L'aspect intrinsèque des matrices M_i n'a été compris que dans les meilleures copies, mais, en revanche, les candidats ne furent pas rebutés par les intégrales de matrices.
Les fautes rencontrées dans la suite furent le fait de candidats privilégiant la rapidité à la réflexion : par exemple dans 3/b)i) $(A + tI)^{-1} = A^{-1} + tI$, manipulation d'inégalités de matrices pour conclure après multiplication par X et ${}^tX$, multiplication par X^{-1} ou ${}^tX^{-1}$ dans 3/b)iii).

La partie IV fut peu abordée. Seule une poignée de candidats a répondu correctement à la première question. Dans la deuxième question,pour l'étude du signe local, les considérations sur les limites des coefficients en 0 ou sur les équivalents furent incomprises; beaucoup essayèrent de résoudre des inéquations algébriquement.

Conclusion

Malgré un sujet conforme au programme et à son esprit, le bilan des correcteurs est assez mitigé. Certes, l'épreuve n'a pas nui à la sélection des meilleures copies mais les fautes et les maladresses signalées ci-dessus doivent inciter les futurs candidats à privilégier la rigueur à la quantité et la réflexion à l'application directe de recettes.

Moyenne : 8,92 **Ecart-type** : 4,04

Correcteurs : Gilles BENSON, Rémi CHMURA, Alain COMBROUZE, Jean-François COSSUTTA, Jean-Pierre GONET, François GUENARD, Hervé GUILLAUMIE, Thierry LEGAY, Jean-Pierre SIAU.