

MATHEMATIQUES 1

Option scientifique

Yves Monlibert

Description du problème

Consacré à la recherche d'extrema de fonctions d'une ou plusieurs variables, le sujet était constitué de trois parties très indépendantes.

La première d'entre elles, du niveau du programme de première année se limitait aux fonctions d'une variable réelle : elle consistait dans un premier temps, sur des exemples concrets, à l'étude de la transformée de Legendre Fenchel (utilisée en optimisation). La notion de borne supérieure n'étant pas au programme, l'étude se restreignait à la recherche de maxima. Cette partie se clôturait par une étude plus abstraite relative au cas d'une fonction convexe.

Le même problème était posé dans la deuxième partie à partir d'exemples relatifs aux fonctions de plusieurs variables : ainsi était vu le cas de la norme euclidienne puis le cas d'une fonction quadratique. L'étude de l'existence et de l'unicité d'une solution était proposée ensuite dans le cas d'une contrainte de convexité (modélisation que l'on rencontre dans la gestion de portefeuilles).

Pour clore le problème, en troisième partie était soumis aux candidats un algorithme de recherche de maximum (méthode d'Usawa) dans le cas particulier d'une contrainte linéaire.

Dans l'ensemble, les correcteurs ont trouvé le sujet de longueur raisonnable, construit de manière équilibrée et l'énoncé bien ciblé. L'objectif dans la première partie était de permettre aux candidats de rentrer dans le problème et de bien s'appropriier les notations de l'énoncé. Dans la deuxième partie, l'équilibre entre calculs et déduction a été apprécié. Cependant, certains correcteurs déplorent la forme de la rédaction de la troisième partie ; il est relevé le fait que trop de questions s'enchaînaient et que le sujet ne mettait pas assez en relief la caractérisation du vecteur réalisant le maximum.

25%, 40% et 35% du barème ont été affectés aux trois parties décrites ci dessus.

Commentaires sur la correction

La partie I fut discriminante. Certains candidats étudièrent les variations sur les exemples proposés, d'autres, en revanche, ont fait des erreurs de calculs et n'ont pas compris la définition de $U(f)$ ou de f^* . La discussion sur y a échappé à la plupart des candidats. Paradoxalement, l'étude de l'exemple abstrait fut mieux réussie.

Dans la partie II, la question 1) a/ fut souvent abordée maladroitement bien que la discussion sur y pour $\lim_{t \rightarrow +\infty} F_y(ty)$ fut correctement restituée (au cas $y = 0$ près). La question 1) b/ a été traitée de façon plus fantaisiste, certains candidats choisissant $x = ty$; peu utilisèrent clairement l'inégalité de Cauchy-Schwarz. La détermination de $(f^*)^*$ fut rarement traitée correctement ; au mieux, $\|y\|$ apparaissait comme majorant. La deuxième question a été assez bien perçue : les candidats connaissaient bien les propriétés du spectre d'une matrice symétrique réelle, certains sachant même représenter celle-ci à l'aide de ses éléments propres.

D'autres malheureusement s'en sortent plus mal en limitant le calcul de $\langle x, Ax \rangle$ aux vecteurs propres ou en écrivant des inégalités entre matrices ou entre vecteurs.

La limite de $F_y(x)$ quand $\|x\| \rightarrow +\infty$ à la troisième question a été obtenue proprement dans de bonnes copies alors que la plupart des candidats ont ignoré le terme en $\langle x, y \rangle$ en étudiant uniquement le terme prépondérant $\langle x, Ax \rangle$. Les notions de topologie ont été assez bien restituées à propos des parties fermées bornées, avec d'inévitables variantes originales (un convexe est borné, fermé). La fin de la partie II fut comprise par beaucoup en ce qui concerne le paradoxe ($f^*(y) < F_y(\frac{1}{2}(\bar{x} + \bar{x}'))$) même si l'appartenance de $\frac{1}{2}(\bar{x} + \bar{x}')$ à U leur a échappé. Seule une poignée de candidats parvint à prouver correctement l'existence du maximum sur U .

Le début de la partie III a été en général bien traité par les candidats hormis ceux pour lesquels le produit scalaire, écrit matriciellement, a conservé tout son mystère et qui ont appliqué le théorème du rang sur l'espace des matrices.

La caractérisation de \bar{x} a rarement été abordée, les copies les plus claires montrant que les conditions étaient suffisantes pour l'existence d'un maximum en \bar{x} . Les relations de récurrence ont été bien traitées, même si l'existence des suites x_p et z_p qu'il fallait justifier ne fut pas comprise. La construction d'une racine carrée positive de A a été bien abordée. Les candidats ont su restituer leur cours sur le sujet. Il en est de même pour le caractère symétrique de la matrice qui suivait. En revanche, l'inégalité $\|Bx\|^2 \leq \alpha \langle x, Ax \rangle$ n'a pratiquement jamais été démontrée. Enfin la dernière question du problème n'a été traitée que dans sa première partie, la convergence de (x_p) vers \bar{x} n'ayant été valablement étudiée que par quelques candidats.

Conclusion

Même si, faute d'exemples concrets, l'objectif du problème au travers de la partie III a pu dérouter de nombreux candidats, il n'en reste pas moins vrai que le jury a noté que les concepts mis en œuvre dans cette épreuve ont été bien appréhendés. Tout ceci lui a permis d'établir une moyenne en hausse significative par rapport à celles observées les années précédentes. L'épreuve s'est montrée bien sélective. A côté d'une poignée de brillantes copies auxquelles la note maximale a été attribuée, un nombre non négligeable de candidats ont obtenu un total supérieur à 15.

Moyenne des candidats à l'ESSEC : 9,21 Ecart-type : 3,97
Moyenne des admissibles à l'ESSEC : 13,12 Ecart-type : 3,18