

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES II

Année 2002

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE

On désigne par I , O , J et A les matrices carrées d'ordre 3 suivantes:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

1. (a) Exprimer la matrice A en fonction des matrices I et J , puis la matrice J en fonction des matrices A et I .
(b) Exprimer J^2 en fonction de J et en déduire que la matrice A vérifie l'égalité $A^2 + 5A + 4I = O$.
(c) Montrer que la matrice A est inversible et exprimer son inverse A^{-1} en fonction des matrices I et J .

2. (a) Soit U la matrice-colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer le produit matriciel JU .

En déduire une valeur propre de la matrice J .

- (b) Montrer que 0 est valeur propre de J et donner une base du sous-espace propre associé.
- (c) La matrice J est-elle inversible ? La matrice J est-elle diagonalisable ?
- (d) Soit X une matrice-colonne non nulle à trois éléments et λ un réel vérifiant $JX = \lambda X$. Montrer qu'il existe un réel μ que l'on donnera en fonction de λ vérifiant $AX = \mu X$.
- (e) En déduire que A est diagonalisable et que ses valeurs propres sont -1 et -4 .
- (f) Sans expliciter la matrice A^{-1} , calculer ses valeurs propres et montrer qu'elle est diagonalisable.

3. Soit a un paramètre réel et F_a la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$F_a(x, y) = \begin{pmatrix} x & y & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ a \end{pmatrix}$$

- Vérifier que cette fonction est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 en tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$.
- Montrer qu'il existe un unique point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$, que l'on précisera, en lequel les dérivées partielles d'ordre 1 de F_a sont nulles. Calculer $F_a(x_0, y_0)$.
- Calculer, pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$, le nombre: $G_a(x, y) = F_a(x, y) + \frac{1}{3}(3x - y - a)^2 + 2a^2$ et préciser son signe.
- En déduire que la fonction F_a admet un unique extremum sur $\mathbb{R}^2$. Préciser s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum et donner sa valeur notée $M(a)$.
- Montrer que la fonction M qui, à tout réel a associe le nombre $M(a)$, admet un unique extremum que l'on précisera. Que peut-on en conclure ?

Problème

Pour toutes suites numériques $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on définit la suite $u \times v = w$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$$

Partie A : Exemples

1. Premiers exemples

Pour tout entier naturel n , calculer w_n en fonction de n dans chacun des cas suivants :

- pour tout entier naturel n , $u_n = 2$ et $v_n = 3$.
- pour tout entier naturel n , $u_n = 2^n$ et $v_n = 3^n$.
- pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{2^n}{n!}$ et $v_n = \frac{3^n}{n!}$.

2. Programmation

Dans cette question, les suites u et v sont définies par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \ln(n+1)$ et $v_n = \frac{1}{n+1}$

Écrire un programme en Turbo-Pascal qui demande à l'utilisateur une valeur de l'entier naturel n , qui calcule et affiche les valeurs $w_0, w_1, \dots, w_n$.

3. Un résultat de convergence

Dans cette question, la suite u est définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et v est une suite de réels positifs, décroissante à partir du rang 1 et de limite nulle.

- Établir, pour tout couple d'entiers naturels (n, m) vérifiant $n < m$, l'inégalité : $\sum_{k=n+1}^m u_k \leq u_n$.
- Soit n un entier strictement supérieur à 1. Prouver les inégalités :

$$w_{2n} \leq v_0 u_{2n} + 2v_n + v_1 u_n \quad \text{et} \quad w_{2n+1} \leq v_0 u_{2n+1} + 2v_{n+1} + v_1 u_n$$

- En déduire que les deux suites $(w_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers 0 ainsi que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Soit u' la suite définie par: $\forall n \in \mathbb{N}, u'_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$. À l'aide de la question précédente, montrer que la suite $u' \times v$ est convergente et de limite nulle.

Partie B : Application à l'étude d'un ensemble de suites

Dans cette partie, A désigne l'ensemble des suites $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad a_{n+1} \leq \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1})$$

1. Montrer que toute suite décroissante de réels positifs est élément de A et qu'une suite strictement croissante ne peut appartenir à A .
2. Soit $z = (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}^\times, z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + z_{n-1})$.

(a) Montrer qu'il existe deux constantes réelles α et β telles que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n = \alpha + \beta \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

(b) En déduire qu'il existe des suites appartenant à A et non monotones.

3. Soit $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un élément de A et b la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

On définit alors la suite c par : $c_0 = a_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^\times, c_n = a_n + \frac{1}{2}a_{n-1}$.

(a) Montrer que la suite c est décroissante à partir du rang 1 et qu'elle converge vers un nombre ℓ que l'on ne cherchera pas à calculer.

(b) Pour tout entier naturel n , établir l'égalité : $\sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n-k} = a_n$.

Que peut-on en déduire pour les suites $b \times c$ et a ?

(c) Soit ε la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \varepsilon_n = c_n - \ell$ et d la suite $b \times \varepsilon$.

En utilisant le résultat de la question 3. de la Partie 1, montrer que la suite d converge vers 0.

(d) Pour tout entier naturel n , établir l'égalité : $d_n = a_n - \frac{2}{3}\ell \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$.

En déduire que la suite a converge et préciser sa limite.

Partie C : Application aux variables aléatoires

1. Résultats préliminaires

On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et on désigne par S leur somme.

(a) Pour tout entier naturel n , on pose: $u_n = P([X = n])$ et $v_n = P([Y = n])$.

Montrer que l'on a: $\forall n \in \mathbb{N}, P([S = n]) = w_n$, (w étant la suite définie à partir des suites u et v en tête du problème).

(b) Retrouver alors le résultat de la question 1.c) de la Partie 1 par un choix adéquat des lois de X et de Y .

(c) Pour toute variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{N}$, on note 2^{-Z} la variable aléatoire prenant, pour tout entier naturel n , la valeur 2^{-n} si et seulement si l'événement $[Z = n]$ est réalisé. Montrer que la variable aléatoire 2^{-Z} admet une espérance donnée par :

$$E(2^{-Z}) = \sum_{n=0}^{\infty} P([Z = n]) \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

On note $r(Z)$ cette espérance.

- (d) Que peut-on dire des variables aléatoires 2^{-X} et 2^{-Y} ?
En déduire l'égalité: $r(S) = r(X) r(Y)$.
- (e) On suppose que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et de même loi. Pour tout entier naturel non nul q , on désigne par S_q la variable aléatoire définie par :
 $S_q = \sum_{i=1}^q X_i$. Établir l'égalité : $r(S_q) = (r(X_1))^q$.

2. Une formule sommatoire

- (a) Montrer que les égalités : $\forall n \in \mathbb{N}, P([Z = n]) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ définissent la loi de probabilité d'une variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{N}$. Calculer alors le nombre $r(Z)$.
- (b) On suppose que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$, de même loi que Z et, pour tout entier naturel non nul q , on désigne encore par S_q la variable:

$$S_q = \sum_{i=1}^q X_i$$

En admettant, pour tout entier naturel non nul q , l'égalité $\sum_{k=0}^n C_{k+q}^q = C_{n+q+1}^{q+1}$, montrer par récurrence que la loi de S_q est donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P([S_q = n]) = C_{n+q-1}^{q-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+q}$$

- (c) Pour tout entier naturel non nul q , calculer le nombre $r(S_q)$ et en déduire la relation:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+q-1}^{q-1} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{4}{3}\right)^q$$

3. Un exemple concret

On admet, dans cette question, que la variable aléatoire Z définie à la question 2.a) représente le nombre de petits devant naître en 2003 d'un couple de kangourous. Chaque petit kangourou a la même probabilité $\frac{1}{2}$ d'être mâle ou femelle, indépendamment des autres. On note F la variable aléatoire égale au nombre de femelles devant naître en 2003.

- (a) Préciser, pour tout entier naturel n , la loi conditionnelle de F sachant $[Z = n]$.
- (b) À l'aide de la formule obtenue en 2c, montrer que la loi de F est donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P([F = n]) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

- (c) Justifier l'existence des espérances $E(Z)$ et $E(F)$ des variables aléatoires Z et F , puis vérifier l'égalité : $E(Z) = 2E(F)$.