

---

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES  
E.S.C.P.-E.A.P.  
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON  
CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

---

**OPTION ECONOMIQUE**  
**MATHEMATIQUES III**

**Année 1997**

---

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*

*Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

---

## **EXERCICE I**

On note  $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels,  $u$  l'application identique de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$  dans lui-même et  $I$  la matrice identité de  $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$  représentant  $u$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et on note  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  représenté par  $A$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$

1. Déterminer les valeurs propres de  $f$ . L'endomorphisme  $f$  est-il diagonalisable ?
2. Etant donné un couple  $(a, b)$  de réels, déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme  $af + bu$  de  $\mathbb{R}^3$ . Pour quelles valeurs de  $(a, b)$  cet endomorphisme est-il diagonalisable ?
3. Quelles relations le couple  $(a, b)$  doit-il vérifier pour que l'endomorphisme  $af + bu$  soit inversible? Montrer que l'inverse de  $af + bu$ , quand il existe, est de la forme  $\lambda f + \mu u$  où  $\lambda$  et  $\mu$  sont des réels dont on donnera l'expression en fonction de  $a$  et  $b$ .

On considère maintenant l'ensemble  $\mathcal{E}$  des matrices  $T$  de  $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$  qui commutent avec  $A$  c'est à dire qui vérifient  $AT = TA$ .

4. Montrer que  $\mathcal{E}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$

5. Pour une matrice  $T$  de la forme  $T = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ , calculer  $AT - TA$ . En déduire une base de  $\mathcal{E}$  et sa dimension.

6. Soit  $\Phi$  l'application de  $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$  dans lui-même qui fait correspondre à la matrice  $T$  la matrice  $AT - TA$ . Montrer que  $\Phi$  est un endomorphisme de  $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ . Donner une base du noyau et une base de l'image de  $\Phi$

## EXERCICE II

Dans tout l'exercice  $\lambda$  désignera un réel strictement positif et  $f_\lambda$  sera la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f_\lambda = e^{-\lambda x^2}$ , pour tout réel  $x$ .

Le but de l'exercice est l'étude de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = f_\lambda(u_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$

- (a) Montrer que l'équation  $f_\lambda(x) = x$ , d'inconnue  $x$ , admet une seule racine dans  $\mathbb{R}$  et que cette racine appartient à  $]0, 1[$ . On note  $\ell_\lambda$  cette racine.  
(b) Montrer que, si  $\lambda > \frac{e}{2}$ , alors  $\ell_\lambda > \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$
- On suppose dans cette question que  $\lambda \leq \frac{1}{2}$ .

(a) Montrer que  $\max_{x \in [0,1]} |f'_\lambda(x)| < 1$

(b) Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet pour limite  $\ell_\lambda$ .

On revient au cas général, c'est à dire  $\lambda \in \mathbb{R}_+^\times$ .

- On pose  $g_\lambda = f_\lambda \circ f_\lambda$ .

(a) Montrer que  $g_\lambda$  est strictement croissante sur  $[0, +\infty[$ .

(b) Montrer que les deux suites  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  sont monotones et convergentes.

- (a) Montrer que les racines éventuelles de l'équation  $g_\lambda(x) = x$  appartiennent à  $]0, 1[$ . Vérifier que  $\ell_\lambda$  est une racine de cette dernière équation.  
(b) Soit  $x \in ]0, 1[$ . Montrer que  $g_\lambda(x) = x$  si et seulement si  $\ln(-\ln(x)) + 2\lambda x^2 - \ln(\lambda) = 0$   
(c) Pour tout  $x \in ]0, 1[$ , on pose  $h_\lambda(x) = \ln(-\ln(x)) + 2\lambda x^2 - \ln(\lambda)$   
Montrer que la fonction  $h_\lambda$  est dérivable sur  $]0, 1[$  et que  $h'_\lambda(x)$  a le signe opposé de celui de  $1 + 4\lambda x^2 \ln(x)$   
(d) Pour tout  $x \in ]0, 1[$ , on pose  $k_\lambda(x) = 1 + 4\lambda x^2 \ln(x)$ . Dresser le tableau de variation de la fonction  $k_\lambda$ .  
(e) On se place désormais dans le cas où  $\lambda > \frac{e}{2}$ 
  - Montrer que, dans ce cas,  $k_\lambda(\ell_\lambda) < 0$
  - Dresser le tableau de variation de la fonction  $h_\lambda$  et en déduire que l'équation  $h_\lambda(x) = x$  admet trois racines  $\mu_\lambda, \ell_\lambda, \nu_\lambda$  vérifiant  $0 < \mu_\lambda < \ell_\lambda < \nu_\lambda < 1$
  - Montrer que les suites  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  convergent vers  $\mu_\lambda$  et  $\nu_\lambda$  respectivement.

## EXERCICE III

On note  $\mathbb{N}$  l'ensemble des entiers naturels. Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $0 < a < 1$  et  $0 < b < 1$ .

On effectue une suite d'expériences aléatoires consistant à jeter simultanément deux pièces de monnaie notées  $A$  et  $B$ . On suppose que ces expériences sont indépendantes et qu'à chaque expérience les résultats des deux pièces sont indépendants. On suppose que, lors d'une expérience, la probabilité que la pièce  $A$  donne pile est  $a$ , et que la probabilité que la pièce  $B$  donne pile est  $b$ .

- (a) Pour tout entier naturel  $n$ , calculer la probabilité  $\mu_n$ , que la pièce  $A$  donne  $n$  fois pile et, à la  $(n+1)^{ième}$  expérience, face pour la première fois. Calculer de même la probabilité  $\nu_n$  que la pièce  $B$  donne  $n$  piles et, à la  $(n+i)^{ième}$  expérience, face pour la première fois.  
(b) Montrer que les suites  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définissent des lois de probabilité sur  $\mathbb{N}$ . Ces lois seront notées dorénavant respectivement  $\mu$  et  $\nu$ .

2. On considère deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$ , définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ , à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , indépendantes et dont les lois de probabilité sont respectivement  $\mu$  et  $\nu$ . (La variable aléatoire  $X$  représente le nombre d'expériences qu'il faut réaliser avant que la pièce  $A$  donne face pour la première fois et la variable aléatoire  $Y$  représente le nombre d'expériences qu'il faut réaliser avant que la pièce  $B$  donne face pour la première fois).
- Calculer l'espérance  $E(X)$  et la variance  $V(X)$ .
  - Trouver, pour tout entier naturel  $k$ , la valeur de  $P(X > k)$ .
  - On s'intéresse au nombre d'expériences qu'il faut réaliser avant que l'une au moins des pièces donne face pour la première fois. Pour cela on note  $M$  la variable aléatoire définie par  $M = \min(X, Y)$ .  
Calculer, pour tout entier naturel  $k$ , la probabilité  $\mathbf{P}(M \geq k)$ . En déduire la loi de probabilité de  $M$ .
  - Déterminer la probabilité que la pièce  $B$  ne donne pas face avant la pièce  $A$ , c'est-à-dire  $\mathbf{P}(Y \geq X)$ .
3. On note  $U = X + Y$ .
- Déterminer la loi de probabilité de  $U$ . (On distinguera les cas  $a = b$  et  $a \neq b$ ).
  - Calculer, pour tout couple  $(j, k)$  d'entiers naturels, les probabilités conditionnelles  $\mathbf{P}(Y = k / U = j)$
4. On suppose désormais que  $a = b$ . On note  $V = Y - X$ .
- Calculer, pour tout entier naturel  $k$  et tout entier relatif  $r$ , la probabilité de l'événement  $(M = k \text{ et } V = r)$ . (On distinguera le cas  $r \geq 0$  et le cas  $r < 0$ ).
  - Trouver la loi de probabilité de  $V$ . Les variables aléatoires  $M$  et  $V$  sont-elles indépendantes ?