CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES III

Année 1993

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1.

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ on considère les quatre vecteurs :

$$f_1 = (1,1,1,1),\ \ f_2 = (1,1,-1,-1),\ \ f_3 = (1,-1,1,-1),\ \ f_4 = (1,-1,-1,1).$$

1. Montrer que (f_1, f_2, f_3, f_4) est une base de $\mathbb{R}^4$. On notera désormais cette base $\mathcal{C}$.

2. On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^4$ défini par les relations :

$$u(e_1) = f_1, \quad u(e_2) = f_2, \quad u(e_3) = f_3, \quad u(e_4) = f_4.$$

   (a) Montrer que u est un automorphisme de $\mathbb{R}^4$. Expliciter sa matrice associée dans la base canonique $\mathcal{B}$.
   (b) Montrer que l'endomorphisme u^2 est un endomorphisme simple, que l'on déterminera.
   (c) Déterminer la matrice associée à l'endomorphisme réciproque de u dans la base $\mathcal{B}$.
   (d) Déterminer la matrice associée à l'endomorphisme u dans la base $\mathcal{C}$.

3. On considère les quatre suites $(x_n)_{n\geqslant 0}$, $(y_n)_{n\geqslant 0}$, $(z_n)_{n\geqslant 0}$, $(t_n)_{n\geqslant 0}$ de nombres réels définies par les valeurs initiales x_0, y_0, z_0, t_0 et, pour tout entier naturel n, par les relations de récurrence :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{1}{4}(x_n + y_n + z_n + t_n) \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{4}(x_n + y_n - z_n - t_n) \\ z_{n+1} = \dfrac{1}{4}(x_n - y_n + z_n - t_n) \\ t_{n+1} = \dfrac{1}{4}(x_n - y_n - z_n + t_n) \end{cases}$$

À l'aide de l'endomorphisme u, donner une interprétation vectorielle de ces relations.
En déduire que les quatre suites considérées ont pour limite 0.

4. Déterminer les valeurs propres de u et une base de chacun des sous-espaces propres associés.
L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Exercice 2.

A. Pour tout nombre entier naturel non nul n, on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx.$$

(1) Sans calculer l'intégrale I_n, montrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante, puis qu'elle est convergente.

(2) Calculer la dérivée de la fonction $x \longmapsto \tan^{n+1} x$.
En déduire, pour tout nombre entier naturel non nul n, une expression de $I_n + I_{n+2}$.

(3) Montrer que, pour tout nombre entier naturel non nul n :

$$\frac{1}{2(n+1)} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$.

B. Soit t un nombre réel appartenant à l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$.
Pour tout nombre entier naturel non nul n, on pose :

$$I_n(t) = \int_0^{t} \tan^n x \, dx \quad \text{et} \quad S_n(t) = I_1(t) + I_2(t) + \cdots + I_n(t).$$

(1) Pour tout nombre entier naturel non nul n et tout élément x de $[0, t]$, vérifier que :

a. $\left| \tan x + \tan^2 x + \cdots + \tan^n x - \dfrac{\tan x}{1 - \tan x} \right| = \dfrac{\tan^{n+1} x}{1 - \tan x}.$

b. $0 \leqslant \dfrac{\tan^n x}{1 - \tan x} \leqslant \dfrac{\tan^n t}{1 - \tan t}.$

(2) Montrer que pour tout nombre entier naturel non nul n :

$$\left| S_n(t) - \int_0^{t} \frac{\tan x}{1 - \tan x} dx \right| \leqslant t \frac{\tan^{n+1} t}{1 - \tan t}.$$

En déduire que la suite $(S_n(t))_{n\geqslant 1}$ a une limite quand n tend vers l'infini.

(3) On se propose de trouver une expression de cette limite.

a. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{4}\right[$ par la relation :

$$f(x) = \ln\left(\cos x - \sin x\right).$$

Montrer que f est dérivable et calculer sa dérivée.

b. On pose:

$$J(t) = \int_0^{t} \frac{\sin x}{\cos x - \sin x} dx \quad \text{et} \quad K(t) = \int_0^{t} \frac{\cos x}{\cos x - \sin x} dx.$$

Calculer $J(t)$ et $K(t)$ à partir de $K(t) - J(t)$ et $K(t) + J(t)$. En déduire la limite de $(S_n(t))_{n\geqslant 1}$ quand n tend vers l'infini.

Exercice 3.

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par les relations :

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ ;} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[0,1]$, de densité de probabilité f.
   (a) Déterminer la fonction de répartition F de X.
   (b) Calculer l'espérance et la variance de X.
3. (a) Montrer qu'à tout élément y de l'intervalle $[0,1]$ on peut faire correspondre un élément u et un seul de $[0,1]$ tel que :
   $$\int_0^u f(x)\,dx = y.$$
   On définit alors l'application φ sur $[0,1]$ en posant $\varphi(y) = u$.
   (b) Montrer que φ est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$.
   Trouver les valeurs de y dans $]0,1[$ telles que $\varphi'(y) = \frac{3}{4}$.
   (c) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $Z = 3X^2 - 2X^3$.
   Quelle est sa loi de probabilité ?
4. On considère des variables aléatoires X_1 et X_2 de même loi que X. On suppose que les variables X_1 et X_2 sont indépendantes et on pose $T = \sup(X_1, X_2)$. (Autrement dit, T est la variable aléatoire qui prend la plus grande des valeurs prises par X_1 et X_2.)

   Trouver la fonction de répartition de T. En déduire une densité de probabilité de T et l'espérance de T.