CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES III

Année 1991

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

On considère les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} ; \quad C = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -8 \\ 9 & 4 & -11 \\ 9 & 4 & -11 \end{pmatrix} ; \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On se propose de résoudre le système d'équations :

$$(S) \qquad \begin{cases} XP = PX \\ AX - XB = C \end{cases}$$

où X est un élément inconnu de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

1. (a) Appliquer la méthode du pivot, en explicitant les calculs, pour montrer que la matrice P est inversible et pour calculer son inverse.
   (b) La matrice P^{-1} est-elle solution du système (S) ?

2. (a) Déterminer les valeurs propres des matrices A et B.
   (b) Montrer qu'il existe une base de vecteurs propres communs à A et à B telle que la matrice de passage associée soit P.

3. Dans ce qui suit, on pose : $Y = X - P^{-1}$.

(a) Montrer que la matrice X est solution du système (S) si et seulement si la matrice Y vérifie le système :

$$\left\{\begin{array}{c} PY = YP \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y - Y \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = O \end{array}\right.$$

(b) En déduire l'ensemble des solutions du système (S).

EXERCICE 2

Pour tout nombre entier naturel n, on considère les fonctions g_n et G_n définies sur $\mathbb{R}_+$ par les relations :

$$g_n(x) = x^n e^{-x/2}; \quad G_n(x) = \frac{1}{2^{n+1}n!} \int_0^x g_n(t)dt.$$

1. Étudier les variations des fonctions g_0, g_1 et g_2. Tracer les graphes de ces fonctions dans un même repère cartésien.

2. (a) À l'aide d'une intégration par parties, calculer $G_{n+1}(x) - G_n(x)$
   (b) Calculer $G_0(x)$, $G_1(x)$ et $G_2(x)$.
   (c) Déterminer la limite de $G_0(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. En déduire la limite de $G_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ (l'entier n étant fixé).

3. Soit F_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{array}{ll} \text{si } x \geqslant 0, & F_n(x) = G_n(x). \\ \text{si } x < 0, & F_n(x) = 0. \end{array}$$

   - Montrer que F_n a les propriété d'une fonction de répartition.
     On considère une variable aléatoire X_n de fonction de répartition F_n.
   - Déterminer une densité f_n de X_n.
   - Calculer l'espérance $E(X_n)$ et la variance $V(X_n)$. Vérifier que le rapport $\dfrac{E(X_n)}{V(X_n)}$ est indépendant de n.

4. Montrer que, pour tout nombre entier naturel non nul n, la fonction f_n prend une valeur maximale M_n. Trouver la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, du rapport $\dfrac{M_{n+1}}{M_n}$.

5. On suppose que le nombre réel strictement positif x est fixé. Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout nombre entier naturel non nul n, la probabilité pour que $T \geqslant n$ soit égale à $F_{n-1}(x)$. Déterminer la loi de probabilité de T. Calculer l'espérance et la variance de T.