CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES III

Année 1990

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1

1. Utiliser la méthode du pivot pour inverser la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

2. On considère le système (S) de trois équations à trois inconnues suivant :

$$(S) : \begin{cases} x^2 - yz = 5 \\ y^2 - zx = -1 \\ z^2 - xy = 3 \end{cases}$$

Pour tout triplet (x, y, z) de nombres réels, on pose :

$$M_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}$$

Prouver que si (x, y, z) est une solution de (S), alors :

$$AM_{(x,y,z)} = (5x - y + 3z)I_3.$$

En déduire que, dans ces conditions, il existe un nombre réel k tel que :

$$x = 2k, \quad y = -k, \quad z = k.$$

3. Montrer que le système (S) admet deux solutions que l'on calculera.

Exercice 2

Soit f la fonction numérique définie sur $[0, +\infty[$ par la relation :

$$f(t) = \ln(1+t) + \frac{t^2}{1+t^2}.$$

1. (a) Étudier les variations de f.

   (b) Déterminer la limite du rapport $\dfrac{f(t)}{t}$ lorsque t tend vers $+\infty$. Tracer la courbe représentative de f.

2. Soit n un entier naturel non nul. On considère l'équation :

$$(E_n) : f(t) = \frac{1}{n}$$

   (a) Montrer que l'équation (E_n) admet une solution α_n et une seule. Donner des valeurs approchées de α_1 et de α_2 à 10^{-2} près.

   (b) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque. Dresser le tableau de variation de f^{-1} et tracer la courbe représentative de cette fonction.
   En déduire le sens de variation et la limite de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$.

   (c) Déterminer la limite du rapport $\dfrac{f(t)}{t}$ lorsque t tend vers 0 par valeurs strictement positives.
   En déduire la limite de la suite $(n\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$.

Exercice 3

Pour tout nombre réel p tel que $0 < p < 1$, on dit qu'une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suit une loi de type G de paramètre p si, pour tout nombre entier naturel n,

$$P(X = n) = (1-p)^n p.$$

1. Soit T une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ représentant le nombre de jours pendant lesquels une machine fonctionne avant de tomber en panne. On suppose, que pour tout nombre entier naturel n, $P(T \geqslant n) > 0$; on note $\theta(n)$ la probabilité conditionnelle $P(T = n / T \geqslant n)$, qu'on appelle *taux de panne* de la machine au $n^{\text{ième}}$ jour.

   (a) Montrer que :

$$\theta(n) = 1 - \frac{P(T \geqslant n+1)}{P(T \geqslant n)}.$$

   (b) Exprimer $P(T \geqslant n)$ et $P(T = n)$ à l'aide des nombres $\theta(j)$, où $j \in \mathbb{N}$.

   (c) Montrer que la variable aléatoire T suit une loi de type G si et seulement si la suite $(\theta(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

2. On suppose maintenant qu'on a affaire à un système de deux machines montées en série : chaque pièce passe successivement dans les deux machines, notées M_1 et M_2.
   À chaque machine M_i, où $i \in \{1, 2\}$, on associe une variable aléatoire T_i définie comme la variable T de la question 1.
   On note T_* le nombre de jours pendant lesquels le système fonctionne, c'est-à-dire pendant lesquels aucune des deux machines ne tombe en panne.
   On suppose que T_1 et T_2 sont définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de loi G de paramètres respectifs p_1 et p_2 ;
   on pose $q_1 = 1 - p_1$ et $q_2 = 1 - p_2$.

   (a) Exprimer T_* à l'aide de T_1 et T_2. Calculer $P(T_\times \geqslant n)$.

(b) Exprimer le taux de panne $\theta_*(n)$ du système en fonction de q_1 et q_2.

3. Soit cette fois un système de deux machines en parallèle : chaque pièce est fabriquée soit par M_1 soit par M_2. On note T_1 et T_2 les variables aléatoires associées respectivement à M_1 et à M_2 comme dans la question 2. On suppose qu'elles satisfont aux mêmes hypothèses et on note T^* le nombre de jours pendant lesquels le système fonctionne, c'est-à-dire que l'une au moins des deux machines ne tombe pas en panne.

   (a) Exprimer T^* à l'aide de T_1 et T_2. Calculer $P(T^* \geqslant n)$.

   (b) Exprimer le taux de panne $\theta^*(n)$ du système.