CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT

Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES I

Année 1982

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice I

p et q étant deux entiers positifs ou nuls, on pose

$$B(p,q) = \int_0^1 t^p(1-t)^q dt$$

1. Comparer $B(p,q)$ et $B(q,p)$.
2. Etablir la relation $B(p,q) = B(p-1,q+1)$, $(p \geqslant 1)$.
3. Calculer pour $n \in \mathbb{N}$, $B(0,n)$. En déduire $B(p,q)$.

Exercice II

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices A, d'ordre 2, à coefficients réels, satisfaisant à la relation

$$A^2 - 3A + 2I = 0$$

où $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La base $B = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$ étant donnée, on appelle endomorphisme associé à la matrice A l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice, relativement à la base B, est A.

1. Montrer que si $A \in \mathcal{A}$, toute matrice semblable à A appartient à $\mathcal{A}$.

2. Montrer que les valeurs propres des endomorphismes associés aux matrices de $\mathcal{A}$ appartiennent à l'ensemble $\{1, 2\}$.

3. A appartenant à $\mathcal{A}$, on suppose que son endomorphisme associé admet la valeur propre double α. Démontrer que A est semblable à une matrice B du type

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \qquad \text{avec } \beta \in \mathbb{R}$$

   Prouver que $\beta = 0$. Déterminer toutes les matrices de A dont l'endomorphisme associé admet une valeur propre double.

Exercice III

Deux joueurs A et B jouent avec un dé parfait. A commence et lance le dé une fois. S'il obtient 1 ou 2, il a gagné et la partie s'arrête. Sinon B joue.
B lance le dé une fois: s'il obtient 3, 4 ou 5 il a gagné et la partie s'arrête.
Sinon c'est à A de jouer ...etc.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^{\times}$. Calculer les probabilités des événements
   A_{2k-1}: «A gagne au $(2k-1)^{ème}$ lancer du dé»
   B_{2k} : «B gagne au $(2k)^{ème}$ lancer du dé».

2. Quelles sont les probabilités des événements
   G_A : «A gagne»
   G_B : «B gagne»
   H : «la partie ne s'arrête jamais».

3. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de lancers effectués dans la partie.

   (a) Quelle est la loi de probabilité de X ?

   (b) Soit x un réel, élément de $[0, 1[$. Etablir la relation

   $$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n--1} = \frac{1 + nx^{n+1} - (n+1)x^n}{(1-x)^2}, \qquad (n \geqslant 1).$$

   En déduire la somme de la série de terme général nx^{n-1} $(n \geqslant 1)$.

   (c) Déterminer $E(X)$.

4. Soit F la fonction de répartition de X. Quelles sont les valeurs de$F(2k-1)$, $F(2k)$ $(k \in \mathbb{N}^{\times})$?
   Comment faut-il choisir n pour que l'événement «la partie comporte au plus n lancers» ait une probabilité $\geqslant 0,995$?

Exercice IV

Calculer $\int\limits_{2}^{2+\sqrt{2}} e^{-x^2+4x-2}dx$
Le résultat sera fourni avec 2 chiffres après la virgule.

Valeur de la fonction de répartition
de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,500000	1,00	0,841345	2,00	0,977250
0,05	0,519939	1,05	0,853141	2,05	0,979818
0,10	0,539828	1,10	0,864334	2,10	0,982136
0,15	0,559618	1,15	0,874928	2,15	0,984222
0,20	0,579260	1,20	0,884930	2,20	0,986097
0,25	0,598706	1,25	0,894350	2,25	0,987776
0,30	0,617911	1,30	0,903199	2,30	0,989276
0,35	0,636831	1,35	0,911492	2,35	0,990613
0,40	0,655422	1,40	0,919243	2,40	0,991802
0,45	0,673645	1,45	0,926471	2,45	0,992857
0,50	0,691462	1,50	0,933193	2,50	0,993790
0,55	0,708840	1,55	0,939429	2,55	0,994614
0,60	0,725747	1,60	0,945201	2,60	0,995339
0,65	0,742154	1,65	0,950529	2,65	0,995975
0,70	0,758036	1,70	0,955435	2,70	0,996533
0,75	0,773373	1,75	0,959941	2,75	0,997020
0,80	0,788145	1,80	0,964070	2,80	0,997445
0,85	0,802338	1,85	0,967843	2,85	0,997814
0,90	0,815940	1,90	0,971284	2,90	0,998134
0,95	0,828944	1,95	0,974412	2,95	0,998411
				3,00	0,998650

FIN