Concours d'admission sur classes préparatoires
Option scientifique

RAPPORT DU JURY
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
2015

Présentation de l'épreuve :

• L'épreuve comportait, comme d'habitude, trois exercices et un problème, ce qui permettait de juger les candidats sur une partie conséquente du programme des classes préparatoires.

• Le sujet balayait largement le programme en donnant, comme d'habitude, une place importante aux probabilités (deuxième exercice et problème).

La diversité des thèmes abordés a permis à tous les candidats de s'exprimer et de montrer leurs compétences, ne serait-ce que sur une partie du programme.

• Dans l'ensemble, les correcteurs ont trouvé le sujet moins long que par le passé, mélangeant questions faciles et questions plus difficiles, et bien adapté au public concerné. La présence de questions techniquement difficiles ou abstraites a permis d'évaluer, d'une part les capacités à mener un calcul compliqué à son terme et d'autre part les capacités à raisonner des candidats : ceux d'entre eux qui étaient bien préparés se sont bien démarqués alors que ceux qui l'étaient moins ont montré leurs faiblesses théoriques ainsi que leur mauvaise maîtrise des techniques de base, notamment dans les calculs, parfois même dans les calculs élémentaires.

Description du sujet :

L'exercice 1 proposait l'étude de l'intégrale $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n(x+1)}$, de prouver la convergence de la série de terme général $(-1)^{n-1} I_n$ et d'en donner la somme. La dernière question demandait de compléter des commandes `Scilab` permettant le calcul de I_n.

• Cet exercice, jugé facile par les correcteurs a permis à tous les candidats, ou presque, de gagner quelques points.

• Notons tout de même que plus de la moitié des candidats n'arrivent pas à encadrer une intégrale rigoureusement, sans parler de ceux (relativement nombreux) qui ne connaissent pas les primitives usuelles.

L'exercice 2, portant sur la partie "variables à densité" du programme de probabilités, présentait une variable aléatoire X suivant la loi normale centrée réduite et une variable aléatoire Z de densité la fonction g définie par :

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{\pi x}} \text{ si } x>0\\ 0 \text{ si } x\leq 0\end{cases}$$

L'objectif était d'établir que $|X|$ et $\sqrt{2Z}$ ont même loi. La dernière question demandait d'analyser des commandes `Scilab` et de justifier qu'elles permettent d'obtenir une valeur approchée du moment d'ordre 2 de Z.

• Cet exercice, assez théorique, a permis aux candidats les mieux formés de parfaitement faire la différence. Les correcteurs ont pu mesurer à quel point les connaissances de très nombreux candidats sont fragiles, concernant la manipulation des variables à densité (cours pas maîtrisé pour certains).

• Beaucoup de candidats ont trouvé des fonctions de répartition farfelues, alors qu'une petite vérification aurait permis de les rectifier facilement. La détermination, avant toute chose, du support des variables étudiées aurait permis assez tranquillement d'éviter les fautes les plus graves.

L'exercice 3 portant sur la partie algèbre bilinéaire du programme, avait pour objectif de montrer que, si f est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$, dont les valeurs propres sont toutes strictement positives, alors l'application φ, de $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, définie par $\varphi(x,y)=\langle x,f(y)\rangle$, est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. La fin proposait la construction d'une base orthonormale pour ce produit scalaire.

• Cet exercice a été abordé avec des fortunes diverses, certains candidats n'ayant visiblement que très peu de connaissances sur cette partie portant exclusivement sur le programme de seconde année. C'est l'exercice le moins bien réussi de cette épreuve.

• Il semble que, pour de très nombreux candidats, tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ soit un vecteur propre de l'endomorphisme f (ceci est, bien sûr, complètement faux et rendait la deuxième question étrangement élémentaire).

Le problème, portant sur le programme d'analyse et de probabilité, démontrait un résultat d'analyse important pour la suite, à savoir : $\forall x\in[0,1[$, $\forall r\in\mathbb{N}$, $\sum_{n=r}^{+\infty}\binom{n}{r}x^{n-r}=\dfrac{1}{(1-x)^{r+1}}$. La partie probabilités étudiait un jeu en plusieurs manches pour lequel un joueur a une probabilité α de ne pas être autorisé à jouer la manche suivante (on dit qu'il est disqualifié et c'est définitif), et une probabilité $1-\alpha$ d'y être autorisé, ceci indépendamment du fait qu'il ait gagné ou perdu la manche précédente s'il y en a eu une. À chaque manche jouée, le joueur gagne un euro avec la probabilité p et il perd un euro avec la probabilité $1-p$. L'objectif était le calcul de l'espérance et de la variance du gain de ce joueur.

La dernière question proposait une simulation informatique de la situation.

• La plupart des candidats n'ont que peu abordé le problème, peut-être par manque de temps ou à cause d'une mauvaise gestion de leur temps. Cela dit, il n'est globalement pas très bien réussi par les candidats qui l'abordent.

• La formule des probabilités totales a donné lieu à quelques écritures fantaisistes.

• Il a été vu à de nombreuses reprises la confusion entre la convergence d'une intégrale (qui d'ailleurs n'était pas impropre) et la convergence d'une série.

Statistiques :

• Pour l'ensemble des 3858 candidats ayant composé, la moyenne obtenue à cette épreuve est égale à 11,1 sur 20 (un peu inférieure à celle de l'année dernière) et l'écart type vaut 5,918 (très légèrement inférieur à celui de l'année dernière).

• 33,8% des candidats, contre 31,4% l'année dernière, ont une note strictement inférieure à 8 (parmi eux, 14,1% ont une note inférieure à 4).

• 21% des candidats ont une note comprise entre 8 et 12 (pourcentage sensiblement égal à celui de 2014).

• 26,5% des candidats ont une note supérieure ou égale à 16 (pourcentage inférieur de deux points à celui de 2014).

Conclusion :

L'impression générale ressentie à la lecture des copies amène à penser que les questions les plus subtiles, qui demandent une compréhension fine de la théorie, quel que soit le domaine concerné, échappent à presque tous les candidats. Les meilleurs ont acquis des techniques et des réflexes mais ne comprennent pas forcément en profondeur ce qu'ils font. Et ce fossé entre les aspirations du programme et la réalisation sur le « terrain » semble s'être élargi cette année.
Les copies sont, dans l'ensemble, bien présentées et bien rédigées, malgré la présence d'un nombre non négligeable de candidats qui sont adeptes des réponses floues. Il faut savoir que ce type de réponse est sanctionné et que l'absence d'argument ou le manque de précision peut rendre la réponse irrecevable.

Il reste, en assez grand nombre, des candidats qui rendent pratiquement un brouillon et truffent leur copie d'abréviations non officielles : les correcteurs n'apprécient pas du tout et n'ont alors aucune compassion pour le candidat.

Il semble que l'investissement en informatique ait été un peu moins intense que les années précédentes, ce qui est dommage puisqu'il y avait, comme d'habitude, pas mal de points à glaner sur ces questions, et ceci sans y passer énormément de temps.

Rappelons, comme d'habitude, que l'honnêteté, la simplicité, la précision et la rigueur sont des vertus attendues par tous les correcteurs sans exception, et qu'une bonne réponse est toujours une réponse construite rigoureusement.