Rapport sur les épreuves de mathématiques des concours 2004 des classes préparatoires économiques et commerciales

APHEC

juin-septembre 2004

Introduction

Comme toutes les années, la commission de mathématiques de l'APHEC a examiné l'ensemble des sujets de concours de mathématiques proposés par le concours commun ECRICOME et la BCEE[1] gérée par la CCIP.

À l'issu de ce travail, un rapport est publié. Les remarques qui suivent sont donc faites par des professeurs enseignant à des élèves ayant composés sur les épreuves testées. Ces critiques, tant positives que négatives, sont destinées principalement aux futurs concepteurs d'épreuves qui pourront ainsi mieux cerner le profils des candidats de cette filière, et mieux s'imprégner de l'*esprit du programme*.

Enfin, l'APHEC tient à remercier vivement les concepteurs qui ont mis gracieusement à disposition des adhérents leurs énoncés sous forme informatique.

Ce document, public, est disponible sur le site de l'APHEC à l'adresse :

`http://www.int-evry.fr/aphec/enseignements/math/concours/2004-rapport-math.pdf`

Table des matières

[1]Banque Commune d'Épreuves Écrites

Partie I
Option Economique

1 HEC 2004 option E math 3

Ecoles utilisant cette épreuve (coefficient) :
H.E.C. (4)

Le sujet est constitué d'un exercice et d'un problème. Le premier exercice porte dans sa première partie sur l'étude d'une suite d'intégrales sur un segment puis à une application informatique. La seconde partie consiste à appliquer les résultats précédemment démontrés à l'étude de la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires continues $(X_n)_n$ ainsi qu'à l'obtention de la densité de la variable $Z = \ln X_1$.
Le problème est composée de trois parties. La partie A est consacrée à la diagonalisation de l'endomorphisme s : $\sum_{k=0}^{2n} a_k X^k \mapsto \sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} X^k$ de $\mathbb{R}_{2n}[X]$. La partie B étudie une suite de polynômes (R_k) satisfaisant à une relation récurrente linéaire d'ordre 2. On en déduit une méthode de réduction des équations polynômiales symétriques suivie d'une une application effective. La partie C porte sur la détermination de la loi de la variable aléatoire finie Z comptant le nombre d'incidences d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$, non symétrique à priori, dont les coefficients sont des entiers non nuls et moindre qu'un entier p fixé. Un exemple simple est traité puis on détermine la loi de Z pour aboutir à une variable $Y = \dfrac{Z-1}{2}$ qui suit une loi binômiale.

L'épreuve porte équitablement sur les deux années du programme de la filière Eco, tout en couvrant la (quasi) totalité de ce programme et en restant adaptée à cette filière. On ne peut que se féliciter d'une telle épreuve.

2 CCIP 2004 option E math 2

Ecoles utilisant cette épreuve (coefficient) :
H.E.C. (4) ESCP-EAP (3) E.M. LYON (2)

Le sujet est un problème composé de 4 parties dont l'objectif est de démontrer un paradoxe issu de la théorie des jeux : le paradoxe de Benney établi en 1969.
Il est indéniable que le thème abordé par cette épreuve est intéressant et que l'énoncé est globalement soigné dans sa

rédaction (si l'on excepte l'absence de définition des évènements R_n et S_n, qui au passage auraient pu être notés F_n et P_n selon une notation plus traditionnelle). En outre, l'épreuve est agrémentée de quelques questions informatiques (simulation de variables aléatoires) d'un niveau convenable et qui s'intègre harmonieusement au sujet.
Cependant, on peut s'interroger sur la pertinence de l'utilisation répétée de méthodes beaucoup trop techniques pour la filière Eco (dérivabilité de séries génératrices d'une variable aléatoire X en $x = 1$ et lien avec l'espérance de X).
Il est surprenant d'utiliser des méthodes aussi éloignées de l'esprit du programme de la voie Eco sachant que ce dernier est largement suffisant pour calculer plus simplement, plus rapidement et aussi rigoureusement, toutes les espérances recherchées dans le problème (soit en utilisant la formule du programme $\sum_{n=0}^{+\infty} nq^n = \dfrac{q}{(1-q)^2}$, soit en démontrant l'égalité classique $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n)$). Dès lors, on aurait pu très avantageusement remplacer la première partie par la démonstration de cette formule, puis l'utiliser dans la partie pour le calcul de $E(Y)$ (ce qui supprimerait les questions 5c à 5f), et dans la partie III pour le calcul de $E(T)$, (ce qui supprimerait la question 7).
Par ailleurs, il est maladroit de poser pour un temps d'attente T que celui-ci vaut 0 quand il est infini, ce qui oblige à considérer (artificillement) les évènements $(T > n) \cup (T = 0)$. Il est préférable de considérer que l'ensemble de définition d'une variable aléatoire peut être différent de l'univers : il suffit qu'il soit quasi-certain (de probabilité égale à 1).
On peut dès le début de la partie III, montrer que la probabilité que le "jeu ne s'arrête jamais" est nulle. En effet, cet événement est équivalent à "PPF n'appparaît jamais et FPP n'apparaît jamais", dont la probabilité est nulle d'après le II.1.d. On peut alors déduire de la question III2b que le jeu est avantageux pour J'.
Le choix des configurations dans la question III.6. semble un peu artificiel. On aurait pu choisir PFF contre FPP ou bien FPF contre FPP

Le thème abordé par cette épreuve est intéressant et la rédaction de l'énoncé est globalement soignée. Néanmoins, cette bonne impression est ternie par l'usage répété et inadéquat pour la filière Eco de certaines méthodes analytiques (les élèves de cette filière ne sont certainement pas de fins analystes). L'utilisation de méthodes plus élémentaires aurait permis de remplacer un nombre significatif de questions (dont plusieurs redondantes) par d'autres questions portant sur une plus grande variété des compétences attendues. Ce choix malheureux est certainement dommageable tant pour les bons élèves de notre filière (qui n'ont pu montrer l'étendue de leurs talents et qui se sont noyés dans des considérations inutiles et compliquées) que pour l'Ecole HEC (problème de la sélectivité de l'épreuve).

3 ESCP 2004 option E math 3

Ecoles utilisant cette épreuve (coefficient) :
ESCP-EAP (4)
L'énoncé comporte un exercice d'algèbre et un problème de probabilités.
L'exercice a pour but d'étudier un automorphisme en dimension 6, construit à partir d'un endomorphisme en dimension 3. A part la première question, l'exercice demande une bonne connaissance des objets de base du programme d'algèbre ; il a certainement dérouté les candidats (nombreux dans cette option) dont les acquisitions algébriques se bornent à un certain nombre de techniques standard. C'est donc un exercice qui a, très certainement, trié les meilleurs candidats. On peut lui reprocher d'être un peu formel.
L'objet du problème est l'étude de tirages de boules avec remise parmi un lot de 10 boules dont r sont particularisées : nombre de tirages necessaires pour obtenir au moins une fois chacune de ces boules ; nombre de boules distinctes (parmi les r) obtenues au cours de n triages. L'énoncé est progressif et fait appel à une grande partie du programme de probabilités de première année, ainsi qu'à une partie du programme d'analyse.
Quelques remarques : 1. La definition de la variable Y aurait pu etre precisée par un exemple. 2. La question 4.b. est floue. De ce fait, il aurait été bienvenu de donner le paramètre de la loi géométrique dans la question suivante pour permettre au candidat de continuer la partie I.

un sujet bien adapté au niveau des meilleurs candidats ; on peut regretter l'absence de question d'informatique.

4 ESSEC 2004 option E math 3

Ecoles utilisant cette épreuve (coefficient) :
E.S.S.E.C (4)

Exercice 1 : probabilité et algèbre linéaire. Exercice 2 : probabilité et analyse.

> Les deux exercices balayent largement toutes les notions vues en deuxième année. Mais l'ensemble est trop long. Les candidats risquent de passer beaucoup de temps à l'étude des endomorphismes sur des espaces de polynômes (notion difficile à dominer pour les élèves de la voie économique) et d'être découragés pour aborder dans de bonnes conditions la suite de l'épreuve qui semble correspondre plus à l'esprit de la voie scientifique qu'à celui de la voie éco.

5 ESSEC 2004 option E math 2

Ecoles utilisant cette épreuve (coefficient) :
E.S.S.E.C (4)
objet : nombre de permutation laissant invariant une partie de cardinal donné ; application probabiliste.
Critique : le sujet du problème est intéressant : il débouche sur une loi de probabilité originale qui tend vers la loi de Poisson. Mais l'énoncé a été bâclé.
Il s'ouvre sur des dénombrements de permutations et l'utilisation de la formule de Pointcaré qui sont certe des questions classiques mais dont on sait par expérience qu'elles déstabilisent beaucoup d'élèves de cette section . Et pour achever les plus corriaces, la question 4. comporte une erreur d'énoncé : il faut prendre $d_0 = d$ et non 0 comme c'est indiqué. Qui plus est, la question est mal rédigée : il existe une infinité de systèmes d'équations qui donnent un $(n+1)$uplet en fonction d'un autre, surtout quand $n > 1$.
Les trois autres parties utilisent les résultats de la première donc ne permettront pas au candidat de se rattraper. Seule la question d'informatique pouvait le sauver. La rédaction est imprécise, la notion de coût employée à l'opposé de l'usage et celle de gain beaucoup trop simpliste pour rendre pertinentes les questions sur l'intérêt de l'acheteur ou celui du PDG. De façon générale, la quatrième partie ne présente aucun intérêt et semble là uniquement pour boucher un trou.

> Il ne semble pas que ce sujet permette en aucune façon de classer les élèves de section économique en fonction de leur niveau.

6 EML 2004 option E math 1

Ecoles utilisant cette épreuve (coefficient) :
E.M. LYON (4) E.S.C. RENNES (3) E.S.C. CLERMONT (4) E.S.C. DIJON (3) E.S.C. LILLE (5) CERAM NICE (5) E.S.C. PAU (4) I.E.C.S. STRASBOURG (3) ESM DE ST.CYR (9) ESM DE ST.CYR (SEUL) (9)
L'épreuve de l'EML math 3 de 2004 couvre l'intégralité du programme des deux années de préparation. Elle propose 3 exercices progressifs, bien pensés, et sans difficultés excessives sur les thèmes suivants:
EXERCICE 1 - Analyse : Fonctions d'une variable, Suite récurrente, Intération
EXERCICE 2 - Algèbre : Détermination du noyau de deux endomorphismes de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$
EXERCICE 3 - Cocktail : Probabilités discrètes, Extremum libre d'une fonction $f(x, y)$, Discrétisation d'une VAR à densité

EXERCICE 1 Analyse : Fonctions d'une variable, Suite récurrente, Intégration

L'auteur a bâti un exercice qui visite les notions centrales du programme d'analyse, en mettant à l'œuvre des savoir-faire classiques. Sa rédaction ne soulève aucune ambiguïté. On se demande seulement la raison d'être de formulations hétérogènes pour les sous-questions a) et b) (de même type) du 2°). Sur la démarche proposée dans cette question, une variante pouvait laisser plus d'initiatives aux candidats :
Établir, pour tout t positif, la classique inégalité $e^t \geqslant 1 + t + t^2/2$ puis $2e^t \geqslant 1 + (t + 1)^2$ et enfin $f(t) \geq t + 1$. La question 3° a) peut alors être simplement résolue par au moins deux méthodes - raisonnement par l'absurde ou par minoration ($u_n \geq n$) - la dernière donnant une information quantitative.
La question 4°) permet aux candidats expérimentés, précis et rigoureux de se distinguer des étudiants ayant des acquis plus superficiels.

EXERCICE 2 Algèbre : Détermination du noyau de deux endomorphismes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

La partie I réclame uniquement une bonne compréhension des questions à traiter et la connaissance de rudiments fondamentaux du cours d'algèbre (sous-espaces vectoriels, matrices inversibles). Très peu de calculs doivent être présentés. Tous les candidats pour lesquels "algèbre" ne signifie pas "recette", devaient passer rapidement à la partie II. Celle-ci met en œuvre, à l'aide de méthodes de cours que les candidats ont à mobiliser, les calculs d'éléments propres d'une matrice. Les expressions des matrices D et P n'étant pas fournies par l'énoncé, il appartenait à chacun de s'assurer de l'exactitude de ses calculs. La suite(4°, 5°, 6°) en dépend ! Cette fin propose une démarche de résolution classique et teste les connaissances des candidats sur les notions de base et de dimension.

EXERCICE 3 Cocktail : Probabilités discrètes, Extremum libre d'une fonction $f(x, y)$, Discrétisation d'une VAR à densité

La partie I demande de déterminer la loi de probabilité d'une VAR X du type "temps d'attente" liée à deux paramètres indépendants (b, r), puis le calcul de son espérance.

La partie II met en œuvre la recherche d'un minimum local sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, d'une fonction rationnelle. La démarche proposée suit très exactement celle du cours (points critiques et conditions suffisantes du second ordre). Le résultat obtenu est exploité pour minimiser l'espérance de X.

La partie III introduit une VAR à densité Y dont la loi est à préciser par un calcul préalable d'intégrale généralisée. On a ensuite à étudier l'espérance de Y et à faire son calcul. Enfin on demande de constater que la VAR $Z = [Y]$ (partie entière) suit la même loi que X dans le cas où $b = r = 1/3$.

Signalons que de nombreuses questions de cet exercice peuvent être abordées (et réussies!) sans avoir traité les précédentes. Cet exercice hétéroclite lie assez habilement 3 domaines distincts du cours et offre aux candidats grappilleurs, l'opportunité d'exprimer leurs talents.

> Le souci de ne pas décourager les étudiants qui n'ont pas pris assez de recul, tout en valorisant ceux qui ont pu assimiler avec plus de rigueur et de clairvoyance les notions du programme, est patent. Nous ne pouvons donc que nous réjouir de cette façon d'évaluer les capacités mathématiques de nos élèves de voie économique.

7 ECRICOME 2004 option E

Ecoles utilisant cette épreuve (coefficient) :
ESC BORDEAUX (5) EUROMED MARSEILLE (4) ICN NANCY (4) ESC REIMS (5) ESC ROUEN (5) ESC TOULOUSE (5)
Exercice 1 : Fonction réciproque et suite d'intégrales.
Une erreur sans conséquence ($A(\lambda) = \lambda < x < 2\lambda$ et ...) quelques subtilités bienvenues sur des inéquations et une forme indéterminée (sans bloquer la résolution).
Exercice 2 : exponentielle de matrice (nilpotente d'odre 3 et d'ordre 2 par diagonalisation)
Dans la partie 1, la matrice inverse de P n'était pas donnée ce qui bloquait pour la question 2 mais pas pour les 3 et 4 (le calcul de l'inverse n'avait rien de monstrueux cependant) partie 2 : la diagonalisation était sans problème, ne servait qu'à la 2 (et éventuellement la 3) et on pouvait s'en passer pour les question 3 et plus
Exercice 3 : 2 serveurs de courrier. Lois binômiales géométrique et densité.
Grande variété dans les probabilités (du plus élémentaire au variables à densité avec des décompositions d'événements), sans calcul infaisables;

> Bon sujet. Bonne adéquation de la difficulté aux candidats. Les indications sont nombreuses et ont dû permettre de gagner du temps sur un sujet qui reste très long.
> Enoncé qui devrait permettre à chacun de prouver le travail effectué au cours des deux années.
> Une bonne partie des notions vues sur les deux années sont abordées, mises à part les DL, les fonctions à deux variables et l'informatique.
> Vraisemblablement, le dernier exercice aura posé le plus de problème (Loi de $L(2)$ en particulier) mais les questions étaient largement indépendantes.
> Permet de bien trier les candidats visés.

8 EDHEC 2004 option E

Ecoles utilisant cette épreuve (coefficient) :
E.S.C. AMIENS (2) E.S.C. GRENOBLE (7) E.S.C. MONTPELLIER (3) AUDENCIA NANTES (8) E.S.C.E.M. (6) I.E.C.S. STRASBOURG (2) E.S.L.S.C.A. (5) I.S.C. (3) I.N.S.E.E.C. (3) I.N.T. MANAGEMENT (6) E.N.A.S.S. OPT. MATH (3) E.D.H.E.C. (8)
Exercice 1 Convergence d'une suite d'intégrales impropres Exercice progressif qui commence par une suite d'intégrales définies dont l'étude, classique, est bien dirigée.
Exercice 2 Un endomorphisme de l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 : détermination de sa matrice A dans la base canonique, diagonalisation, calcul de A^n, limite. L'exercice contrôle assez rapidement la

bonne compréhension des points essentiels du cours d'algèbre mais la dernière question demande trop de calculs pour un insert limité?
Exercice 3 Couple de variables aléatoires discrètes. La 1° question étudie le temps d'attente du 1°pile lors d'un nombre fini de lancers : loi et simulation informatique (suffisamment facile pour inciter les futurs candidats à ne pas négliger ce chapitre). Cette 1°expérience conditionne alors des tirages dans des urnes bicolores. Les candidats sont bien guidés pour étudier d'abord les lois conditionnelles puis la loi d'une 2° variable aléatoire. La fin de l'exercice demande beaucoup de soin et la technicité calculatoire nécessaire pour la dernière question n'est sans doute pas à la portée des candidats de l'option.
Problème Une grande partie du programme d'analyse : étude de fonction très complète, développement limité, recherche d'asymptote, suite et recherche d'équivalent, série.

Sujet, comme d'habitude, plutôt long, qui couvre pratiquement tout le programme, exception faite des probabilités continues. La longueur permet aux étudiants sérieux de valoriser leurs connaissances et les questions difficiles de fin d'exercice permettent de déceler les candidats très brillants, mais les candidats seulement bons ont–ils l'occasion de faire la différence?

9 ESC 2004 option E

Ecoles utilisant cette épreuve (coefficient) :
E.S.C. BREST (5) E.S.C. LE HAVRE (4) E.S.C. SAINT-ETIENNE (5) E.S.C. CHAMBERY (5) E.S.C. TROYES (5) E.S.C. LA ROCHELLE (5) I.S.C.I.D. (2)

Le sujet est équilibré. Chacun des 3 exercices porte sur des parties bien distinctes du programme (I: algèbre linéaire; II: analyse; III: probabilités) et les questions sont progressives.
Cependant l'exercice d'analyse qui étudie l'intégrale généralisée d'une limite d'une suite de fonctions peut dérouter nos élèves moyens. L'exercice de probabilité permet de tester l'acquisition des outils fondamentaux vus en première année et revue en deuxième année, mais sa construction peut apparaître artificielle d'un point de vue probabiliste.

Partie II
Option Scientifique

10 HEC 2004 option S math 1

Ecoles utilisant cette épreuve (coefficient) :
H.E.C. (6)

Le problème "à thème" de math 1 option S HEC porte cette année sur les codes correcteurs d'erreurs. Deux études préliminaires occupent la première moitié du problème : une distance sur l'ensemble des parties d'un ensemble fini et "une autre algèbre linéaire". Il s'agit d'une introduction des notions et des démonstrations des propriétés fondamentales de l'algèbre linéaire dans le cadre des espaces vectoriels de dimension finie sur le corps $Z/2Z$. Ces notions sont ensuite appliquées à la construction de codes correcteurs d'erreurs dont on étudie un premier exemple. L'étude d'un second exemple de transmission d'information avec correction des erreurs de transmission se termine de façon plaisante sous forme de devinette puisqu'il s'agit de reconnaître les trois premiers chiffres significatifs d'une célèbre constante.

Cette épreuve constitue un magnifique "problème d'annales" : le thème est intéressant, le plus grand soin a été apporté à l'architecture du problème et à sa rédaction, en tout point irréprochable. La première moitié du problème est d'une difficulté raisonnable pour le public concerné (l'épreuve n'est utilisée que par HEC). La suite, qui demande un plus grand effort d'adaptation à des notions nouvelles, ne pouvait être bien traitée que par les meilleurs candidats.

Le problème est long, mais beaucoup plus raisonnable que le millésime 2003. On doit en revanche déplorer que seule une faible partie du programme, et du programme de première année seulement, soit utilisée (algèbre linéaire sans diagonalisation et numération binaire) ; d'où la déception des élèves sérieux qui considèrent que l'énorme travail accompli pendant leurs années de préparation n'est pas valorisé. Cette épreuve n'était donc pas idéale pour attribuer aux candidats une note traduisant fidèlement leur niveau en mathématiques.

Il s'agit d'un très beau problème, intéressant, bien construit, d'une finition irréprochable. Ce sujet était-il adpaté à notre filière? La réponse à cette question a donné lieu à des avis très partagés. Des qualités mathématiques certaines étaient nécessaires pour obtenir une bonne note ce jour là, mais cette épreuve ne permettait aucunement à un élève ayant régulièrement travaillé son cours de valoriser son effort. L'école HEC pouvait se permettre un tel sujet, n'engageant qu'elle. Mais il serait dangereux que ce genre d'expérience se généralise.
Signalons également que certains élèves, certes distraits, ont abordé le problème avec l'idée que 1+1 valait 2. Ce jour là, cela valait 0.

11 CCIP 2004 option S math 2

Ecoles utilisant cette épreuve (coefficient) :
H.E.C. (5) ESCP-EAP (4) E.M. LYON (3)

Le problème est composé de 5 parties très largement indépendantes entre elles : si l'on ne tient pas compte des définitions introduites, seule la question V.A.5 utilise la partie I, les autres parties sont "autonomes".

La partie I nécessitait de la part des candidats une bonne technique dans la manipulation d'inégalités et de puissances.

Les parties II et III sont nettement plus calculatoire : la partie II fait redémontrer aux candidats la stabilité de la loi normale par la somme, et la partie III celle de la loi de Cauchy. Le candidats n'a alors aucune initiative à prendre : l'énoncé est très directif, les réponses ne sont que du calcul sans réflexion. Quelles qualités mathématiques a-t-on voulu valoriser ainsi?

Le premier raisonnement probabiliste intervient dans la partie III, avec la notion d'*événement exceptionnel*, il était temps ! Cette partie. La partie V permet de reprendre la notion de stabilité pour démontrer que la suite (a_n) est donné par une puissance de n.

Les parties étant indépendantes, ce problèmes aurait beaucoup gagné en intérêt si la partie IV n'avait pas été placé après les deux parties II et III, excessivement calculatoires qui ont vraisemblablement épuisé certains candidats avec des calculs long, fastidieux et sans grand intérêt mathématique.

Notons cependant un effort louable de présentation : très souvent, des mots importants sont écrits en italique, pour bien attirer l'attention des candidats sur les changements de situations au cours de l'énoncé. Malgré cela, dans la question III.7, une variable Z apparait sans plus de précision : seul le contexte permet de comprendre que c'est la même variable que dans la question III.2, ce qui n'a pas dû gêner les candidats.

A signaler également deux erreurs :

- dans la question I.4.b, les inégalités proposées ne sont valables que si α_1 et α_2 sont positifs. Espérons que le barême n'ait pas fait payer aux candidats une erreur du sujet.

- dans la toute dernière question se pose un problème qui aura sans doute échappé aux candidats : pour montrer que $X_1 - X_2$ suit une loi stable, il est facile de montrer qu'il existe une copie de $X_1 - X_2$ qui s'écrive sous la forme $(X_{2n} - X_{2n+1})_{n \geqslant 0}$, avec $(X_k)_{k \geqslant 0}$ copie de X, ce qui garantie l'indépendance des variables entre elles. Mais peut-on le faire **pour toute copie** de $X_1 - X_2$, comme l'exigerait la définition de la stabilité?

Une dernière remarque enfin : la fonction $\arctan$, hors programme, bien que classique, est introduite en deux ligne. Quelques questions de "présentation" de cette fonction auraient été bienvenues (dérivée, équivalent, etc), et aurait permis un autre tri des candidats que celui donné par certains calculs du sujet.

Beaucoup de soin a été apporté à la rédaction et la présentation de ce sujet. On peut cependant regretter le choix de l'ordre des parties. Les "vrais" raisonnements mathématiques commencent à la partie IV, une place exagérée étant laissée aux calculs fastidieux auparavant : un ordre différent aurait permis un tri des candidats plus sur leurs qualités de raisonnement que sur leur aptitude à mener des calculs longs et fastidieuux.

12 ESCP 2004 option S math 1

Ecoles utilisant cette épreuve (coefficient) :
ESCP-EAP (6)

Le problème ESCP-EAP math 1 option S 2004 porte sur l'étude de l'ensemble des fonctions réelles vérifiant une condition dont la signification concrète a certainement échappé à presque tous les candidats. Nombre d'entre eux n'ont donc pas été captivés par les découvertes successives d'exemples d'éléments de cet ensemble, puis par la détermination de trois de ses parties.

En revanche, le problème est fort bien construit, l'énoncé est irréprochable (pas de digressions hors programme, aucune ambiguïté, notations parfaitement correctes), le fil conducteur est bien visible, avec une annonce en début de chaque partie du but recherché, pas de question devinette hors de portée des très bons candidats. Remercions le(s) concepteur(s) pour le soin apporté à la construction et à la rédaction de cet énoncé.

Ce problème semble toutefois un peu trop difficile pour le public concerné, sans que cela soit scandaleux compte tenu du fait que cette épreuve n'est utilisée que pour le concours ESCP-EAP.

Le seul point véritablement négatif est le fait que seule une partie du programme de première année soit utilisée, et pas du tout le programme de deuxième année. Cela est d'autant plus gênant que c'était déjà le cas de l'épreuve 2003. Dans le même ordre d'idées, on peut regretter l'absence de question d'informatique, (comme dans presque tous les sujets cette année) alors que des occasions d'en poser existaient.

Voilà un problème bien construit, rédigé très consciencieusement. L'intérêt de la propriété étudiée aura vraisemblablement échappé à bon nombre de candidats, sans que cela nuise à la qualité de tri que doit opérer un sujet de concours. Regrettons cependant que ne soit abordée qu'une trop faible partie du programme.

13 ESSEC 2004 option S math 1

Ecoles utilisant cette épreuve (coefficient) :
E.S.S.E.C (6)

Le sujet traite de la résolution itérative d'un système linéaire.

La première partie établit en fait que la suite des puissances d'une matrice symétrique réelle d'ordre n converge vers zéro si et seulement si son rayon spectral est strictement inférieur à 1.

La seconde partie met les polynômes de Tchebychev au service de la résolution d'un problème de meilleure approximation uniforme.

La troisième partie utilise les deux précédentes pour développer une méthode itérative de résolution d'un système linéaire.

Globalement.

Ce sujet est très intéressant et relativement original dans notre filière. Il utilise pleinement les outils importants du chapitre d'algèbre bilinéaire de notre programme.

Ce sujet a encore le mérite d'avoir une longueur très raisonnable et d'offrir une première partie suffisamment abordable pour permettre à un grand nombre d'élèves d'entrer dans le problème.

Le tout reste néanmoins un peu difficile pour nos élèves et dans les parties II et III quelques indications supplémentaires s'imposaient.

L'intérêt du sujet nous fait encore plus vivement regretter les imprécisions voire les erreurs que le texte contient. En particulier l'équivalent de III Q2 c) est faux (ce n'est pas une erreur d'inattention mais de conception) et dans II Q2 c) il n'y a pas de solution à la portée de nos élèves pour montrer l'égalité **pour tout** entier j compris entre 0 et p.

Ceci pose le problème du contrôle du sujet. Il est difficile de croire que cela ait pu échapper aux gens qui ont relu le texte.

Quelques points particuliers.

- Même si ce sujet est toujours polémique signalons que l'identification proposée ne s'imposait pas. C'est plus une facilité pour le concepteur que pour les élèves.
- Ecrire la transposée de X avec des virgules est curieux. Pour le coup on confond tout car une matrice ligne devient un élément de $\mathbb{R}^n$.
- Dans tout le texte n est supérieur ou égal à 1. Alors pour $n = 1$, dans I Q1 d), 0 n'est pas valeur propre.
- Dans I Q3 a) il fallait sans doute dire : exhiber un vecteur **non nul**...
- Dans II le statut du p est très fluctuant. Il faut souvent supposer qu'il n'est pas nul ce qui n'est pas fait.
- Dans III il est souvent indispensable de supposer que $\lambda_1 < \lambda_n$ ce qui n'est pas fait.
- Au début de III la formulation " on les classe comme suit : $0 < \lg_1 \leq \lg_2 \leq \cdots \leq \lg_n$ " n'est pas très heureuse. Elle manque de rigueur et peut facilement amener les élèves à des confusions.
- III Q1 c) est à reformuler. Il faut dire montrer que la suite (X_p) converge vers X^* **pour tout vecteur $\mathbf{X_0}$** si et seulement si ...

Un sujet intéressant dans le coeur du programme qui souffre d'une mise au point très insuffisante. Sans vouloir donner des leçons (nous savons tous combien la tâche est difficile) il convient sans doute d'améliorer les procédures de contrôle, en mettant peut-être davantage de moyens à la disposition du concepteur, pour mettre les élèves dans les meilleures conditions possibles et surtout pour éviter des problèmes plus graves.

14 ESSEC 2004 option S math 2

Ecoles utilisant cette épreuve (coefficient) :
E.S.S.E.C. (5)

La cinquième partie, qui est une redite de la quatrième, est totalement sans intérêt. Il est difficile de savoir ce qu'on attend d'un candidat sur les questions de dénombrement surtout lorsque les réponses sont données, ce qui explique la déception de certains élèves devant leurs résultats.

Certains candidats ont été perturbés par un énoncé peu précis, voire incorrect :

- L'univers Ω des permutations de $\{1, \ldots, n\}$ dans la première partie n'est pas indexé par n.
- Dans la partie II, on définit une probabilité sur un univers Ω qui semble être celui de la partie précédente. Mais quelle application de Ω dans $\mathbb{R}$ peut alors représenter Y_n et comment définit-on un acheteur ?
- Les mots "*coût aléatoire*" n'ont aucun sens, surtout pas un sens économique !
- La valeur 11 obtenue à l'issue du programme en Pascal est fausse !

Ce sujet avait-il été correctement "cobayé" ?

Le sujet est décevant car il utilise exclusivement des notions de première année et met en jeu très peu de raisonnements mathématiques.
Les sujets à tendance économique peuvent présenter un intérêt à condition qu'ils aient un minimum de signification : ici, le chef d'entreprise qui lance une campagne de promotion dans laquelle le nombre de gagnants est totalement aléatoire est un patron soit irréel, soit irréaliste.

15 EML 2004 option S math 1

Ecoles utilisant cette épreuve (coefficient) :
E.M. LYON (6) E.S.C. AMIENS (5) E.S.C. RENNES (5) E.S.C. CLERMONT (5) E.S.C. DIJON (5) E.S.C. LILLE (5) E.S.C. MONTPELLIER (3) CERAM NICE (7) E.S.C. PAU (4) I.E.C.S. STRASBOURG (3)

Le sujet était comme toujours constitué de deux problèmes, de longueurs pour une fois différentes.

Le premier problème , de facture très classique, a pour but d'établir l'égalité célèbre :?? et d'en déduire un n–ième calcul de l'intégrale de Dirichlet.

Il utilise les programmes de première et seconde années sur les fonctions d'une variable réelle et les intégrales généralisées, et les respecte. L'apparition d'équations différentielles n'est pas gênante, les candidats étant tenus par la main pour établir les résultats demandés.

Le découpage en trois parties de ce grand classique Taupinal est impeccable. Si le découpage des deuxième et troisième parties nous semble quasi–parfait, on pourra regretter un saucissonnage trop important de la première partie, et des longueurs inutiles dans icelle. Le tout est progressif, sans surprise, un peu long, et un peu lassant parfois. L'étudiant(e) connaissant son cours et maîtrisant les outils de l'Analyse à une variable réelle n'a aucun mal à traiter ce problème, les meilleurs ont peu de chances de se distinguer vraiment.

Nul doute que ce problème servira à beaucoup de collègues pour clore le chapitre "Intégrales généralisées". A un concours, c'est un peu plus surprenant.

Le second problème , plus court et un peu moins éventé, a pour but l'étude des matrices productives, utilisées en mathématiques appliquées à l'Economie. On obtient finalement la caractérisation usuelle de ces matrices, mais on reste sur sa faim.

Les outils nécessaires à la résolution sont ceux de l'Algèbre linéaire vus en première et/ou deuxième année. Le problème peut être traité uniquement avec le programme de première année, celui de deuxième année permet de résoudre plus agréablement certaines questions, ou de donner un éclairage différent. Le problème n'est pas trop dictatorial, laisse un peu d'initiative, c'est bien. Dommage que ça s'arrête si vite . . .

En résumé, une épreuve honnête, sans grande difficulté, de longueur raisonnable, mais un peu déséquilibrée. Les longueurs du début du premier problème et la trop grande brièveté du second problème se compensent, mais on aurait pu faire mieux à ce niveau.
Le sujet favorisait clairement les étudiants sérieux et soigneux, nous ne nous en plaindrons pas. On peut juste regretter son faible pouvoir discriminant pour détecter les meilleurs candidats.

16 ECRICOME 2004 option S

Ecoles utilisant cette épreuve (coefficient) :
ESC BORDEAUX (6) ESC MARSEILLE (5) ICN NANCY (5) ESC REIMS (5) ESC ROUEN (7) ESC TOULOUSE (5)

Exercice I : Commutant d'une matrice et de l'une de ses puissances.

Enoncé intéressant, permettant de montrer que si une matrice A réelle commute avec une puissance impaire de S, matrice réelle admettant n valeurs propres réelles distinctes, alors A commute avec S, en utilisant les polynômes annulateurs. Le théorème : si deux matrices D et S sont semblables, alors $R(D) = 0$ ó $R(S) = 0$ n'étant pas au programme, il fallait le démontrer.

Dommage que pour le contre-exemple proposé dans le cas où A commute avec les puissances paires de S, aucune initiative n'est laissée au candidat : il eût été préférable de donner S et laisser trouver A au candidat.

Exercice II : Fonction réciproque de $f : x \mapsto f(x) = 1/\cos(x)$, dérivées successives, suite des intégrales des puissances de f.

Seules des connaissances de Terminale et de première année sont nécessaires ici : théorème de la bijection (qui n'est plus au nouveau programme de Terminale) pour fabriquer la fonction $\mathrm{arcos}(1/x)$; le d.l. de 2.1.5 n'apporte rien

L'étude des dérivées successives de $1/\cos(x)$ est classique, mais l'ordre des questions n'est pas optimal (1, 3, 2 et 4, 5 est plus logique).

Dans la suite d'intégrales, le cas $n = 0$ n'apporte rien, obligeant des démonstrations séparées et la relation du 5 est fausse pour $n = 1$.

Problème : Placements aléatoires et successifs de boules dans deux urnes de capacité finie ou infinie.

Le préliminaire 3.1.1. du problème est complètement inutile et n'est au service que d'un équivalent qui est finalement admis.

La partie 3.1.2. revisite le problème des allumettes de Banach (nombres R_n de boules dans l'urne qui n'est pas pleine) et donne un équivalent intéressant de $n - E(R_n)$.

La partie 3.1.2 est une généralisation dans le cas où les deux urnes n'ont pas la même capacité. Dans Q4 on parle de tirages, alors qu'il s'agit de placements! !

La partie 3.2 donne le nombre d'échecs avant le premier succès (somme de lois géométriques sur $\mathbb{N}$) ; l'énoncé est assez flou : le terme « entre » pour la définition des Z_j est trop peu précis et on ne parle pas de l'indépendance des Z_j

Il est dommage que la seule notion de seconde année soit celle des polynômes annulateurs, le reste portant uniquement sur le programme de première année. Ne pas aborder sérieusement le programme de seconde année avec deux exercices et un problème frise la provocation. Il eut été bien d'introduire des intégrales impropres dans l'exercice 2 et des variables à densité dans le problème.
Le sujet est trop long pour les candidats, incitant plus au grapillage qu'à la réflexion (il suffit de faire la moitié des questions pour avoir 20).

17 EDHEC 2004 option S

Ecoles utilisant cette épreuve (coefficient) :
E.S.C. GRENOBLE (8) AUDENCIA NANTES (8) E.S.C.E.M. (6) I.E.C.S. STRASBOURG (2) E.S.L.S.C.A. (6) I.S.C. (4) I.N.S.E.E.C. (4) I.N.T. MANAGEMENT (7) E.N.A.S.S. OPT. MATH (3) E.D.H.E.C. (8)

Comme d'habitude, l'épreuve se compose de trois exercices et d'un problème. Elle est de longueur semblable aux années précédentes ce qui permet sans doute aux candidats de choisir.

Exercice 1 : diverses méthodes pour majorer une probabilité.
Exercice original, respectant le programme, mais sans doute assez difficile pour les élèves moyens, et un peu répétitif.
Dans la question 2a) il fallait préciser $y_0 < y_1 < \ldots < y_n < \ldots$ pour ne pas avoir de difficultés théoriques hors programme quand on coupe la somme en deux.

Exercice 2 : étude d'une fonction définie par une intégrale.
Exercice très classique sans difficultés particulières.

Exercice 3 : Somme et maximum de deux variables aléatoires suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$.
Classique et dans le fil du programme.

Problème : étude d'un isomorphisme entre deux espaces de fonctions puis de sa restriction à des espaces de polynômes.
Ce problème, qui n'utilise que des connaissances algébriques de première année, semble moins inspiré et plus artificiel que le reste du sujet. Formulons trois observations :

1. Partie 2 question 2) d : il est très maladroit de renvoyer à la partie 1 question 4) : cela conduit à de lourds calculs alors la réciproque de v peut être obtenue par un raisonnement direct simple.
2. Partie 2, question 2) e : qu'attend-on comme vérification du fait que la matrice $A-1$ est correcte ? Alors qu'un produit avec A à gauche et à droite devrait suffire, la consigne traditionnelle ≪les calculs devront figurer sur la copie≫ semble inutilement guider le candidat vers la méthode de Gauss ; si c'est cela que l'on veut voir mis en oeuvre, le dire explicitement.
3. Les questions 3) a à 3) e de la partie 2 sont classiques, proches du cours et ont vocation à être réussies par des candidats travailleurs moyens voire faibles qui auraient sauté les questions précédentes ! Leur position en toute fin d'épreuve est maladroite et encourage le ≪ zapping ≫.

Epreuve globalement bien adaptée avec quelques faiblesses dans le problème.

18 ESC 2004 option S

Ecoles utilisant cette épreuve (coefficient) :
E.S.C. BREST (7) E.S.C. LE HAVRE (7) E.S.C. SAINT-ETIENNE (5) E.S.C. CHAMBERY (5) E.S.C. TROYES (5) E.S.C. LA ROCHELLE (5) I.S.C.I.D. (2)

Exercice 1 : Etude des éléments propres d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
Le concepteur du sujet commence par afficher sa méconnaissance du programme des classes ECS en munissant de son produit scalaire canonique, l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ mais sans le définir. Il faudrait lui rappeler que ce produit scalaire n'est pas sensé être connu des candidats.
La phrase "*Soit Φ l'application de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par...*" est quant à elle, tout à fait incorrecte.

1. Question d'application simple du cours mais très répétitive : il est demandé trois fois la même chose dans (a), (b) et (c).
2. La technique utilisée ici est intéressante mais là aussi le vocabulaire est impropre : un endomorphisme bijectif ne s'appelle pas un isomorphisme mais un automorphisme.
3. Bonne question, si ce n'est qu'établir la non nullité de la matrice $Y\ {}^tX$, s'avère plutôt astucieux.

Exercice 2 : Etude des propriétés algèbriques d'une densité de probabilité
Cet exercice est un exercice d'analyse dont seul l'habillage est probabiliste. Il est regrettable que tous les résultats et les raisonnements à utiliser soient donnés, ne laissant aux candidats pas la moindre reflexion ni initiative personnelles. La question 3.(a) est la seule question non guidée et un peu délicate : il faut avoir la bonne idée.

Exercice 3 : Ecriture d'un entier naturel en base 2
Cet exercice plutôt inclassable ne nécessite aucune connaissance propre au programme ECS. Il s'agit d'étudier le développement en base 2 d'un entier naturel, donc en fait, son codage à l'aide d'une succession de 0 et de 1. Malheureusement, cet objectif plutôt louable n'est ni expliqué ni demandé aux candidats. N'aurait-il pas été souhaitable à cette occasion de les faire réflechir un peu sur ce problème de numération ?

Un point positif est d'avoir demandé la rédaction d'un petit programme en Turbo-Pascal, ce qui permet de rémunérer les candidats ayant étudié sérieusement cette partie de notre programme.

Cette épreuve nous a semblé facile voire très facile et largement faisable par un candidat moyen dans le temps imparti. Il reste tout de même à se demander si elle est réellement discriminante.

Partie III

Option Technologique

Une constatation récurrente : la voie Techno est la seule voie pour laquelle 11 ESC adoptent le sujet ESSEC (si l'on met à part la voie L, dans laquelle les mathématiques sont en option).

Ces 11 mêmes écoles adoptent soit le sujet EDHEC soit le sujet EM Lyon dans les voies S et ES.

Ceci pose un réel problème :

- l'ESSEC doit évidemment sélectionner ses candidats.
- Le sujet en voie T s'adresse à des étudiants qui pour la plupart ne peuvent prétendre à l'ESSEC mais visent précisément les 11 autres écoles adoptant ce sujet ; ils sont alors pénalisés par rapport à ceux des autres voies en composant sur une épreuve pour laquelle traditionnellement la moyenne des admissibles est nettement inférieure à celle obtenue en voie S ou ES sur un sujet EDHEC ou EM Lyon.

La critique du sujet ESSEC T faite dans ce document tient nécessairement compte de cette particularité. On peut déplorer l'absence d'un sujet intermédiaire entre le sujet ESSEC et le sujet ESC.

19 CCIP 2004 option T math 2

Ecoles utilisant cette épreuve (coefficient) :
H.E.C. (5) ESCP-EAP (5) EM. LYON (3)

Ex 1 : le passage de q à x et de x à q a dû en déstabiliser quelques candidats. La valeur de q_0 n'était pas simple du tout pour les élèves de la voie Techno. Quant aux questions 4 et 5, il est probable que personne n'ait pu y répondre.

Problème : quelques questions sont mal posées, d'autre sont sûrement inacessibles : il y avait une avalanche de notations, pas toujours utiles, qui ne pouvait que dérouter les candidats. Heureusement que certains résultats intermédiaires étaient donnés !

Sujet ambitieux. Il reste une impression de très grande lourdeur.

20 ESSEC 2004 option T math 2

Ecoles utilisant cette épreuve (coefficient) :
E.S.S.E.C. (5) E.S.C. RENNES (3) E.S.C. CLERMONT (2) E.S.C. DIJON (2) E.S.C. GRENOBLE (8) E.S.C. LILLE (4) AUDENCIA NANTES (3) CERAM NICE (4) E.S.C.E.M. (3) I.E.C.S. STRASBOURG (3) I.N.T. MANAGEMENT (4) E.D.H.E.C (5)

Exercice 1 Suites arithmético-géométriques et calcul matriciel : unicité du point fixe, suite géométrique associée, application à un problème de durée d'abonnement.

La question 1) consiste en une démonstration d'un résultat de cours. Ce qui n'est pas dans l'esprit du programme de la voie T. La question 2), avec à nouveau beaucoup de calcul littéral, semble assez complexe pour des candidats de la voie T. La question 3), portant sur l'étude de suites à l'aide du calcul matriciel, est classique.

Exercice 2 Polynôme de degré 2 avec paramètre ; variable aléatoire suivant la loi uniforme continue, et étude d'une variable aléatoire fonction de la 1ère.

Dans la question 1), la présence du paramètre h pose problème pour les candidats de la voie T. Question 2) Curieusement, alors que la loi uniforme est censée être connue, la densité de probabilité est donnée en début de question, de même que la méthode de calcul de l'intégrale impropre. Pourquoi ne pas laisser aux candidats qui connaissent leur cours la possibilité de gagner quelques points? La question 3), faisant intervenir de nombreux paramètres, risque d'avoir noyé les candidats dans les notations, les différentes conditions, et en conséquence, les questions c) et d), que de nombreux étudiants savent en général résoudre, n'auront peut-être pas été traitées.

Les difficultés que présente ce sujet sont moins dans les connaissances demandées que dans le type de raisonnement, de réflexion, qui demande un esprit, une agilité mathématique dans le calcul littéral, le maniement de divers paramètres. En ce sens, il n'est pas adapté à l'esprit du programme de la voie techno. C'est d'autant plus regrettable que le résultat de cette épreuve ne concerne pas seulement l'ESSEC, mais un bon nombre d'ESC.
Permet-il de faire la différence entre les étudiants, ce qui est le but d'un sujet de concours, et de valoriser le travail fourni ? Plus sûrement, il risque de décourager nos étudiants, dont le bagage mathématique est très faible à l'entrée en Prépa, le but étant de leur faire acquérir en deux ans un minimum de connaissances et la rigueur dont ils auront besoin.

21 ECRICOME 2004 option T

Ecoles utilisant cette épreuve (coefficient) :
ESC BORDEAUX (4) ESC MARSEILLE (5) ICN NANCY (3) ESC REIMS (4) ESC ROUEN (4) ESC TOULOUSE (4)

3 Exercices indépendants

Ex 1 : Convergence d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$ Etude de la fonction f à l'aide d'une fonction auxiliaire Convergence de la suite (u_n) avec utilisation de l'inégalité des accroissements finis

Ex 2 : Etude de 2 suites définies par une relation matricielle sous-jacente Utilisation de suites géométriques auxiliaires Etude des limites de ces 2 suites à l'aide d'une matrice carrée d'ordre 2

Ex 3 : 4 questions indépendantes de probabilités (applications immédiates du cours : loi binomiale , formule de Bayes , loi d'attente du 1er succès, loi exp , $E(aX+b)$, $V(aX+b)$)

Commentaires :

En ce qui concerne l'exercice 1 : la question 1-2-2 "étudier les variations de f" exigeait-elle l'étude des limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$? (on n'en avait pas besoin pour résoudre la question 1-2-3)

sujet classique , sans difficultés spéciales

22 ESC 2004 option T

Ecoles utilisant cette épreuve (coefficient) :
E.S.C. AMIENS (3) E.S.C. BREST (5) E.S.C. LE HAVRE (5) E.S.C. MONTPELLIER (5) E.S.C. PAU (6) E.S.C. SAINT-ETIENNE (4) E.S.C. CHAMBERY (4) E.S.C. TROYES (4) E.S.C. LA ROCHELLE (4) E.S.L.S.C.A. (6) I.S.C. (3) I.N.S.E.E.C. (5)

EX 1 : matrice et suite EX 2 densité de proba , fonction de répartition EX 3 : VAR , calcul de son espérance à l'aide de suites

Dans l'exercice 1 , pour une fois on ne fait pas calculer A^n et ses 9 coefficients ; la suite Xn définie par une relation matricielle du type $Xn+1 = AXn + B$ est étudiée classiquement

Dans l'exercice 2 : la vérification du fait, la non -existence de $E(X)$ que f est une densité de proba est simple ainsi que la recherche de la fonction de répartition et la non-existence de $E(X)$

Dans l'exercice 3 : première apparition de P au cours de n lancers d'une pièce. calculs relativement simples et bien guidés ; beaucoup de résultats sont donnés et peuvent être utilisés pour faire les questions suivantes

Sujet visiblement adapté à la population concernée.

La commission de Mathématiques de l'APHEC