CONCOURS ECRICOME PREPA
APRÈS CLASSE PRÉPARATOIRE

# RAPPORT D'ÉPREUVE

## Commentaires généraux

Rappelons quelques faits importants :

- Une lecture préalable et attentive du sujet est nécessaire afin d'en comprendre la problématique et de hiérarchiser les difficultés. Elle permet alors au candidat d'aborder le sujet par les exercices (et/ou les questions) qui lui sont les plus accessibles.
- Une copie soignée est appréciée.
- Une bonne connaissance des notions et résultats fondamentaux du cours est un prérequis indispensable à la résolution correcte de nombreuses questions d'un sujet de mathématiques.
- Une rédaction correcte comportant des justifications convenables ainsi que la vérification, ou au minimum le rappel, des hypothèses nécessaires à l'application d'un théorème utilisé forment une part extrêmement importante de la note attribuée à toute question.
- Vérifier la vraisemblance et la cohérence des résultats obtenus par rapport aux résultats proposés.
- L'aménagement des calculs et des raisonnements afin d'obtenir impérativement les résultats proposés est fortement sanctionné.

Rappelons que les questions informatiques sont assez largement valorisées au sein du barème de l'épreuve et que, plus des deux tiers des candidats y répondent de façon suffisamment satisfaisante.

Avec une moyenne de 11,02 et un écart-type de 4,61, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

## Commentaires particuliers

### Exercice 1

Cet exercice proposait ici l'étude d'un endomorphisme de polynômes, symétrique pour un certain produit scalaire, et on se proposait de déterminer une base orthonormée de vecteurs propres pour cet endomorphisme. Les premières questions sont classiques et de difficulté progressive. Les questions 1 et 2 sont un objectif à atteindre pour tout candidat raisonnable.
La question 3 est nécessite un peu plus d'initiativ. La question 4 est enfin plus délicate et nécessite des raisonnements plus fins, ce qui permet éventuellement de départager les meilleurs candidats.

1. (a) Question bien traitée par une large majorité des candidats

   (b) Question bien traitée par une large majorité des candidats

   (c) Beaucoup de candidats ne répondent que partiellement à la question, parfois sans justification. Trop nombreux sont ceux qui pensent que toute matrice triangulaire est nécessairement diagonalisable.

2. (a) Certains candidats ont mal compris la question, et souhaitent démontrer ici que la forme $<\ ,\ >$ est non-dégénérée. Le critère de convergence est rarement bien rédigé.

   (b) Question bien traitée par une large majorité des candidats

3. La plupart des candidats savent ce qu'ils doivent démontrer ici. Beaucoup n'ont pas pensé à intégrer par parties et sont alors restés bloqués.

4. (a) Plusieurs candidats repèrent un procédé de Gram-Schmidt. Peu tentent une récurrence forte. Aucun n'arrive à démontrer l'hérédité.
   Plusieurs candidats ont cependant démontré le caractère libre de la famille correctement, soit en admettant l'orthogonalité, soit en démontrant rapidement que $\deg(P_k) = k$ pour tout $k$.

(b) Aucun candidat n'a su faire la question. Beaucoup ont dit que puisque $\varphi$ est symétrique, $\varphi$ est diagonalisable en base orthonormée et comme la base est orthonormée, elle est forcément constituée de vecteurs propres.

## Exercice 2

Cet exercice proposait ici de mettre en place la méthode de Snellius pour approcher la valeur de $\pi$ à l'aide de fonctions trigonométriques. Utilisant principalement des résultats élémentaires d'analyse, cet exercice a été plutôt malmené par les candidats qui semblent être peu à l'aise avec les manipulations de polynômes ou de formules trigonométriques simples.

1. (a) Cette question a, de manière surprenante, été mal traitée par de nombreux candidats, ou alors de façon incomplète. Certains candidats ne savent pas ce que signifie factoriser : ainsi certains candidats ont proposé $P(X) = X(2X^2 - 3X + \frac{1}{X})$ ou encore $P(X) = X(2X^2 - 3X) + 1$. Une large majorité de candidats a bien remarqué que 1 était racine évidente mais se contentait alors de factoriser par $(X - 1)$. Ceux qui ont continué ont souvent oublié le coefficient dominant du polynôme dans la factorisation finale.

   (b) Question bien traitée par une large majorité des candidats. La dérivabilité n'est pas toujours justifiée.

   (c) Certains candidats qui n'avaient pas complètement factorisé $P$ à la question (a) le font ici. Pour ceux qui n'ont pas la factorisation, l'étude du signe est rarement bien traitée. Certains candidats ne précisent pas « strictement ».

   (d) Peu de candidats se soucient de vérifier que le dénominateur ne s'annule pas. La plupart des candidats a su trouver le bon polynôme.

   (e) Cette question a été bien traitée lorsque la précédente l'était.

   (f) La question est bien traitée par de nombreux candidats, à part les inégalités strictes qui ne sont pas toujours justifiées.

2. (a) Cette question, lorsqu'elle est abordée par les candidats, est en général bien traitée. Une part non négligeable de candidats ne connait pas les formules trigonométriques ou les valeurs remarquables de cos et sin, ce qui les empêche de répondre à cette question. Remarquons cependant que peu de candidats ayant obtenu les bons résultats ont su simplifier correctement les expressions obtenues.

   (b) La plupart des candidats a penser à remplacer $x$ par $\pi/12$, mais beaucoup de candidats se sont arrêtés là car ils n'ont pas su faire la question précédente.

3. (a) La première égalité est largement correctement démontrée, même parfois par des candidats n'ayant pas fait la question 2(a). Dans la deuxième partie de la question, peu de candidats ont étudié les signes des expressions demandées. Rappelons que lorsque $\alpha^2 = \beta$, il est déjà nécessaire que $\beta \geqslant 0$ pour pouvoir écrire $\sqrt{\beta}$, et de plus, on n'a alors $\alpha = \sqrt{\beta}$ uniquement si on est certain que $\alpha \geqslant 0$.

   (b) Peu traitée par les candidats.

   (c) Peu traitée par les candidats.

   (d) La plupart des candidats ont fait l'effort de proposer un script. Le but ici étant de déterminer une valeur approchée de $\pi$, le but était bien entendu de ne pas utiliser `%pi` dans le programme.

   (e) Les candidats semblent encore peu à l'aise pour écrire seuls un programme entièrement, même assez simple, et même avec le modèle dans la question précédente. Mais les candidats qui abordent en général la question la traitent en général plutôt bien.

   (f) Quelques rares candidats ont commenté correctement le graphique.

## Problème

Le problème proposait ici l'étude de variables aléatoires dont la loi est implosive (ou explosive), nouvelle notion définie dans l'énoncé. Le but était donc ici de tester la réactivité des candidats face à l'appropriation d'une définition nouvelle, et la bonne mobilisation des connaissances pour retrouver des schémas déjà vus dans le cours de probabilités du programme.

La plupart des candidats a abordé avec succès les parties A et B, et dans une moindre mesure les parties C et D.

## Partie A

1. Question très classique, qui a été largement abordée par les candidats avec succès. Les candidats doivent prendre garde à ne pas confondre intersection d'événemens et produit de probabilités, créant ainsi parfois des intersections de probabilités qui n'ont aucun sens ...
2. La justification de l'existence d'une densité pour $Y_n$ est souvent omise par les candidats, ces derniers se contentant de dériver l'expression précédente sans autre précaution. Les points de non-dérivabilité de la fonction de réparation ne sont pratiquement pas considérés.
3. Cette question, fort classique, a sûrement été étudiée par de nombreux candidats pendant leur préparation. Ici redonnée avec peu d'indications, elle s'avéra assez difficile et fut donc mal traitée.
   (a) Le fait que $\Phi$ était de classe $\mathcal{C}^1$ est très rarement justifié. L'intégration par parties fut généralement correcte, soit en considérant directement la bonne primitive $(1-\Phi)$, soit en prenant $\Phi$ puis en écrivant que $x = \int_0^x 1dt$.
   (b) Cette question a été très rarement bien traitée. La plupart des candidats a dit que $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\Phi(x)) = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x(1-\Phi(x)) = x \times 0 = 0$.
   (c) La plupart des étudiant n'a pas compris qu'il fallait ici redémontrer que $x(1-\Phi(x))$ tend vers 0. Ils ont, dans leur majorité, considéré que cette limite était encore acquise comme dans la question précédente.
   (d) Question bien traitée par une large majorité de candidats.

## Partie B

4. (a) Question assez bien traitée par une large majorité de candidats. Certains candidats connaissent mal les propriétés remarquables de la fonction Arctan (valeur en 0, dérivée, limite en $+\infty$)
   (b) Certains candidats ont considéré que le support de $X$ était $\mathbb{R}$, ce qui ne les a pas conduit à distinguer les cas $x < 0$ ou $x \geqslant 0$.
   (c) Question bien traitée par une large majorité de candidats.
   (d) Question bien traitée par une large majorité de candidats. Les candidats pensent bien à étudier une fonction, mais ne précisent pas souvent que la fonction est dérivable.
   (e) Peu de candidats donnent un équivalent correct, même en ayant obtenu la bonne densité au préalable.
   (f) La justification du fait que $f$ n'admet pas de densité mais $f_2$ oui, est rarement bien traitée. La plupart des candidats parvient cependant à conclure du caractère implosif de $X$ grâce à la formulation des questions.
5. (a) Question bien traitée par une large majorité de candidats.
   (b) Peu de candidats ont cherché un équivalent de $kP(X=k)$. La plupart a décomposé $kP(X=k)$ entre le terme général d'une série « télescopique »et d'une série divergente : $kP(X=k) = \dfrac{k}{\sqrt{k+1}} -$

$\dfrac{k+1}{\sqrt{k+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$. Quelques uns additionnent donc sans précaution des séries divergentes pour en déduire que la série somme diverge ou converge en fonction de ce qui les arrange.

(c) Question bien traitée par une large majorité de candidats.

(d) Le calcul de $F_2$ est souvent correctement mené, mais les candidats ne voient pas comment en déduire la loi de $Y_2$ et plus rarement encore pour en déduire des informations sur l'espérance. Certains candidats étudient la série de terme général $kF_2(k)$ au lieu de $kP(Y_2 = k)$.

(e) Les raisonnements ont été en général les mêmes que ceux qui étaient apparus dans la question précédente.

(f) Certains candidats ont compris la logique des questions précédentes, et même s'ils n'ont pas su les résoudre, ont admis l'existence de l'espérance de $Y_3$ et la non-existence de celles de $Y$ et $Y_2$ pour pouvoir conclure.

## Partie C

6. (a) Nombreux sont les candidats ne s'étant pas souciés ici de la positivité et de la continuité de leur fonction densité. Certains candidats ne connaissent pas la primitive de $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$.
   (b) Cette question a bien été traitée lorsque la précédente l'avait été (même calcul de primitive)
   (c) La rédaction est parfois un peu expéditive. On se contente d'étudier la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}} dx$ sans faire le lien avec l'espérance. Raisonnements peu soignées et peu rigoureux.
   (d) On peut noter de nombreuses erreurs sur le calcul de $f_n$.
   (e) Rares sont les candidats ayant réussi à rédiger correctement cette question.

## Partie D - Lois non implosives

7. (a) Peu de candidats trouvent une primitive correcte de $f$.
   (b) Cette question dépend de ce qui a été fait dans la question précédente.
   (c) L'étude de la convergence de l'intégrale a été très rarement correctement justifiée.
   (d) Question rarement abordée.
   (e) Question rarement abordée.

## Parties E et F

Très peu de candidats ont abordé ces dernières parties, destinées à terminer le sujet sur des questions plus ouvertes pour éventuellement départager les excellentes copies. Quelques candidats ont traité la question 8 et la question 9 mais se sont vite arrêté. On peut noter tout de même la présence d'une dizaine d'excellentes copies qui ont traité l'ensemble du sujet, parties E et F comprises, et 3 candidats ont relevé d'eux-mêmes l'erreur d'énoncé de la question 11.