

# Rapport sur les épreuves de mathématiques concours EC : BCE - Ecricome

Commission mathématiques APHEC

juin 2014

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Voie Economique</b>	<b>2</b>
2.1	Utilisation des épreuves . . . . .	2
2.2	ECRICOME option E : mercredi 16 avril 2014 . . . . .	2
2.3	EMLyon option E : mardi 29 avril 2014 . . . . .	3
2.4	HEC option E : mercredi 30 avril 2014 . . . . .	3
2.5	EDHEC option E : mardi 6 mai 2014 . . . . .	4
2.6	ESSEC 2 option E : mercredi 7 mai 2014 . . . . .	5
2.7	ESSEC option E : vendredi 9 mai 2014 . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Voie Scientifique</b>	<b>5</b>
3.1	Utilisation des épreuves . . . . .	5
3.2	ECRICOME option S : mercredi 16 avril 2014 . . . . .	6
3.3	EMLyon option S : mardi 29 avril 2014 . . . . .	7
3.4	HEC option S : mercredi 30 avril 2014 . . . . .	9
3.5	EDHEC option S : mardi 6 mai 2014 . . . . .	10
3.6	CCIP 2 option S : mercredi 7 mai 2014 . . . . .	10
3.7	ESSEC option S : vendredi 9 mai 2014 . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Voie Technologique</b>	<b>12</b>
4.1	Utilisation des épreuves . . . . .	12
4.2	ECRICOME option T : mercredi 16 avril 2014 . . . . .	13
4.3	ESCP option T : mercredi 7 mai 2014 . . . . .	13
4.4	ESC option T : vendredi 9 mai 2014 . . . . .	14

## 1 Introduction

Les concours 2014 ont enterré définitivement les programmes de mathématiques pour les voies E et S (ce sera l'année prochaine pour la voie T) qui étaient en vigueur depuis les concours 2005. On avait cependant espéré une fin plus heureuse. En effet, l'épreuve du concours ESSEC en voie E a été peut-être la pire qu'il y ait jamais eu, que ce soit par la méconnaissance du programme de la filière concernée, mais aussi par le manque de soin apporté pour les finitions de ce sujet. La direction de l'ESSEC a été attentive aux remarques formulées par l'APHEC, cela s'est traduit en particulier par l'organisation d'une réunion entre la direction de l'école, les responsables de l'épreuves et des responsables de l'APHEC. Espérons que la mise à plat des problèmes et les promesses formulées portent leurs fruits à l'avenir.

Certains ont regretté que l'ESSEC n'ait pas été plus attentive aux candidats en amont. En particulier, s'est reposée une fois de plus la question "fallait-il refaire l'épreuve?". La réponse a cette fois encore été négative, l'adaptation du barème restant la solution miracle.

Une ère se finit donc, et 2015 ouvre la voie à de nouveaux programmes (attention messieurs les concepteurs, les nouveaux programmes de la voie T seront en vigueur pour les concours seulement en 2016), avec une nouvelle approche de l'informatique (à ne pas confondre avec un nouveau langage informatique). Ces programmes ont

introduit des nouvelles notations, des nouveaux résultats, mais il y a eu également des suppressions faites par rapport à l'ancien programme. Que les concepteurs soient vigilants là-dessus, afin de ne pas, même en toute bonne foi, taper à côté.

Nous avons eu l'année dernière l'exemple à ne pas faire, faisons confiance en l'avenir et espérons que ces nouveaux programmes soient l'occasion de beaux sujets. Il y a moyen de se les approprier et d'en exploiter toute la richesse. Rendez-vous est pris pour le printemps 2015.

## 2 Voie Economique

### 2.1 Utilisation des épreuves

Le tableau récapitule l'utilisation de chaque épreuve de mathématiques par les différentes écoles, ainsi que les coefficients utilisés.

Ecole	Math Ecricome	Math EMLyon	Math HEC	Math EDHEC	Math 2 ESSEC	Math ESSEC
Audencia				8		
Management Normandie		4				
EDHEC				6	2	
EMLyon		4			2	
EM Strasbourg		4				
ESC Dijon		3				
ESC Grenoble				9		
ESC La Rochelle		4				
ESC Montpellier				5		
ESC Pau		3				
ESC Rennes		4				
ESC Troyes		4				
ESCP Europe			4		3	
ESSEC					4	4
HEC Paris			4		4	
INSEEC		4				
ISC Paris		3				
SKEMA		4				
Telecom EM		5				
Toulouse Business School				7		
ICN (Ecricome)	4					
Néoma (Ecricome)	5					
Kedge (Ecricome)	4					

### 2.2 ECRICOME option E : mercredi 16 avril 2014

Le sujet, qui comporte trois exercices, couvre une très large partie du programme de ECE. Plus en détail :

**Exercice 1.** Exercice d'algèbre linéaire portant sur l'étude d'un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  défini par sa matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . On montre dans la partie 1 que cet endomorphisme n'est pas diagonalisable et on construit une base de trigonalisation. Dans la partie 2, on cherche des racines carrées de cet endomorphisme. L'exercice est mené de manière originale et progressive et se termine par une question ouverte. On peut cependant regretter l'enchaînement perturbant des questions 3 et 4 dans la partie 1 qui donne l'impression que l'étude de la diagonalisabilité de  $f$  se déduit de l'étude des espaces propres alors que la détermination des valeurs propres est nécessaire pour conclure. Cette question a dû perturber de nombreux candidats.

**Exercice 2.** Exercice d'analyse très classique sur l'étude d'une suite du type  $u_{n+1} = f(u_n)$ . Les questions sont diversifiées (récurrence, DL, équivalent, théorème de prolongement, obtention d'inégalités, informatique) mais aucune ne présente de réelle difficulté.

**Exercice 3** Exercice de probabilités en deux parties.

On s'intéresse dans la partie I à la variable aléatoire  $Y$  égale au nombre de face obtenus avant l'apparition du deuxième pile lors d'une succession illimitée de lancers d'une pièce. Cette étude commence par une simulation informatique de la variable aléatoire  $Y$  (trois questions progressives). On détermine ensuite la loi de  $Y$  à l'aide d'un variable aléatoire auxiliaire puis l'espérance de  $Y$ . L'ensemble de l'étude est bien guidée, avec des questions progressives et une dernière question plus difficile qui propose une généralisation qui demande d'avoir bien compris l'expérience étudiée.

On étudie dans la partie II des variables à densité. On introduit une variable  $T = \max(R, S)$  où  $R$  suit une loi uniforme sur  $[0, 1]$  et  $S = 1 - R$ . Là encore, des questions plutôt classiques même si les questions 3 et 4 demandent plus de rigueur pour une bonne rédaction. La dernière question demande la variance d'une loi uniforme qui est hors programme. Certains candidats auront sans doute pris du temps pour la calculer alors que d'autres auront donné le résultat directement. Qu'attendaient les concepteurs sur cette question ?

**Conclusion** Malgré un enchaînement perturbant des questions dans l'exercice 1 qui a pu gêner certains candidats, l'ensemble du sujet est bien mené, avec une bonne graduation de la difficulté et de nombreuses questions classiques qui permettront aux étudiants sérieux de s'exprimer.

On note également la place importante accordée aux questions d'informatique (quatre au total) qui sont assez classiques. Elles récompenseront les étudiants ayant fait l'effort de s'y investir.

## 2.3 EMLyon option E : mardi 29 avril 2014

Le sujet est composé de trois exercices.

**Exercice 1** Cet exercice comporte trois parties.

- ◇ Partie I : Etude d'une fonction  $\varphi$  et tracé de sa courbe représentative.
- ◇ Partie II : Etude d'extremum d'une fonction de deux variables.
- ◇ Partie III : Etude d'une suite et d'une série.

Cet exercice balaye une large partie de la partie analyse du programme de la voie E. Des calculs parfois assez longs, mais certains résultats étaient fournis par l'énoncé et permettaient au candidat de poursuivre.

**Exercice 2** Exercice d'algèbre linéaire très classique traitant de la réduction d'une matrice puis d'un endomorphisme.

**Exercice 3** Exercice sur les variables aléatoires discrètes dans un problème traitant de tirage de boules. Une petite coquille dans l'énoncé (lors de l'exemple pour  $n = 5$  un 6 apparaît...) mais qui n'a pas dû gêner outre mesure les candidats. Cet exercice, plus difficile, comportait certaines questions de dénombrement assez délicates (question 7 de la partie II par exemple).

**Conclusion** Ce sujet, quoique long, est un sujet tout à fait adapté aux étudiants de la voie économique. On pourrait regretter l'absence de variables aléatoires continues mais il est difficile de traiter tous les points du programme au cours d'une épreuve...

## 2.4 HEC option E : mercredi 30 avril 2014

Comme d'habitude, l'épreuve comporte un exercice et un problème.

L'exercice étudie les matrices 3x3 dont les sommes des lignes, des colonnes et des diagonales sont égales. Le problème, composé de trois parties, fait retrouver des résultats classiques sur la loi de Poisson et sur la médiane. Dans son ensemble, l'épreuve couvre bien les différentes parties du programme : applications linéaires, études de fonctions, de suites, développements limités, intégration, probabilités discrètes et continues, et même un algorithme.

**Exercice** Les premières questions de l'exercice sont faciles. Pour aller plus loin, il faut des qualités mathématiques car les questions sont vite difficiles, mais aussi des qualités stratégiques car un certain nombre de pièges n'étaient pas faciles à éviter.

Ainsi, l'exercice se termine par une question innocente : "Quel est le rang de l'application  $f$ ?" qui ne peut trouver sa réponse que dans la résolution d'un système de 8 équations à 9 inconnues ; le pauvre étudiant qui voudra la résoudre n'y gagnera certainement qu'une perte de temps considérable, de même que celui qui, n'ayant pas de connaissance sur les carrés magiques, essaiera de montrer la surjectivité à l'aide des questions précédentes.

**Problème** Les deux premières parties du problème sont faciles et adaptées à des candidats consciencieux. Dans le même ordre d'idée, en fin de partie 2, après "En déduire que la suite  $(P([Sn \leq n]))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante" il était tentant d'interpréter "la monotonie de la suite  $(P([Sn \geq n]))_{n \in \mathbb{N}^*}$ " comme une croissance même si un peu de bon sens ou un rapide calcul prouve le contraire. Et à la question 10, il est difficile de voir le télescope qui donne l'équivalent de  $E(|X-n|)$ .

**Conclusion** Dans l'ensemble, c'est un problème intéressant, qui traite de sujets très classiques de façon originale et devrait permettre de classer de façon fine les candidats de cette section ; mais il ne les aura pas ménagés.

## 2.5 EDHEC option E : mardi 6 mai 2014

Le sujet est composé de trois exercices et d'un problème. Le premier exercice propose l'étude du commutant d'une matrice  $3 \times 3$ , le deuxième exercice est l'étude d'une fonction des bornes d'une intégrale, le troisième exercice concerne deux variables aléatoires discrètes et le problème propose l'étude de variables aléatoires discrètes, continues pour terminer avec une variable aléatoire qui n'est ni l'une ni l'autre.

**Exercice 1** L'exercice débute par la recherche des valeurs propres d'une matrice  $3 \times 3$  : le calcul, très technique, est difficile à mener pour un étudiant d'ECE moyen. Cependant, la condition nécessaire et suffisante obtenue par le pivot de Gauss est donnée. La question 2)a) sur le commutant de la matrice  $D$  est formulée d'une manière un peu implicite quant à l'égalité d'ensembles. Alors que cette question est classique, sa formulation a pu déstabiliser les candidats.

La dernière question de l'exercice n'est pas évidente, mais très élégante (avec une utilisation originale de la notion de polynôme annulateur d'une matrice), elle est parfaite en fin d'exercice.

**Exercice 2** Il s'agit de l'étude d'une fonction des bornes d'une intégrale. Ce type d'exercice pose souvent des problèmes aux ECE, on peut donc regretter que certains éléments n'aient pas été donnés (comme le changement de variable pour l'étude de la parité). Globalement cet exercice est tout à fait dans l'esprit du programme d'ECE.

**Exercice 3** On définit une loi de manière abstraite puis on se ramène à une loi géométrique et enfin, on étudie l'estimation d'un certain paramètre de cette loi par la méthode du maximum de vraisemblance. Cet exercice ne présente pas de difficulté majeure, et les questions d'algorithmique sont très appréciées : elles valoriseront les candidats qui ont travaillé sérieusement l'informatique.

**Problème** L'objet du problème est de proposer une variable aléatoire qui n'est ni discrète ni continue. Si la question est intéressante, elle oblige à l'introduction d'une variable aléatoire définie comme l'intégrale du maximum entre une variable aléatoire et un réel. La première question s'intéresse à la fonction  $t \mapsto \max(x, t)$  où  $x$  est fixé. On peut regretter que la définition de ce max n'ait pas été donnée. Par ailleurs, pour les candidats les plus fragiles (qui sont aussi concernés par cette épreuve), cela a pu être déstabilisant. Le problème comporte quelques questions plus faciles et deux questions très classiques d'algorithmique... il reste à espérer que ces questions pesaient pour une partie significative du barème.

**Conclusion** Ce sujet ne comporte pas d'exercice facile et, au contraire, certaines questions paraissent difficiles (au niveau conceptuel ou au niveau calculatoire). Il permettra peut-être de valoriser les meilleurs, mais peut-être pas une différenciation des étudiants moyens ou très moyens qui, pourtant, se destinent à intégrer des écoles qui utilisent cette épreuve. Cependant, la question de la fin du problème est tout à fait intéressante et on ne peut qu'apprécier les questions d'algorithmique qui, elles, sont classiques.

## 2.6 ESSEC 2 option E : mercredi 7 mai 2014

Le sujet, composé de trois parties indépendantes, et traitant de l'étude de la répartition des nombres dans un tableau de données, apparaît totalement inadapté aux étudiants de classe préparatoire économique et commerciale option économique pour les raisons suivantes :

- ◇ Toute la partie II, exceptée la première question, est hors programme : il est en effet impossible de répondre aux questions sans connaître les propriétés des fonctions trigonométriques, or ces fonctions ne sont pas au programme de la voie économique. Cette méconnaissance manifeste des programmes est inacceptable de la part des concepteurs comme des cobayeurs de l'épreuve.
- ◇ Certaines notations employées dans ce sujet sont également totalement inappropriées ( $\int_{I_{n,x}}$  ;  $\sum_{k=1}^{+\infty} P(A_k) < \infty$ ).
- ◇ La première partie est réellement très difficile et a dû rapidement décourager une grande majorité des étudiants de la voie économique (partie fractionnaire de logarithmes décimaux...) ; or cette épreuve est reprise par quatre autres écoles...
- ◇ Dans la partie III, "on rappelle l'inégalité de Markov" alors que cette inégalité n'est pas au programme, pour démontrer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, qui elle, est au programme...

**Conclusion** L'accumulation d'erreurs et de négligences dans ce sujet le rendent totalement inadapté aux étudiants de l'option économique, et démontre une incroyable méconnaissance du programme de l'option économique de la part de l'équipe conceptrice. Discréditant complètement l'épreuve aux yeux des étudiants et de leurs enseignants, elle soulève plusieurs questions :

- ◇ Quelle attention est portée aux candidats de la voie E par l'équipe conceptrice ?
- ◇ Comment une telle épreuve va-t-elle pouvoir correctement classer les candidats sachant que la première et la troisième partie sont d'un niveau très difficile et que la deuxième est hors-programme ? Rappelons que cette épreuve sert non seulement pour l'ESSEC mais est également reprise par HEC, ESCP, EMLYON et l'EDHEC !

## 2.7 ESSEC option E : vendredi 9 mai 2014

Le sujet est composé de trois parties indépendantes, traitant de l'étude de variables aléatoires à densité dont une densité  $f$  est *CSP* sur un intervalle  $I$ .

**Partie I** la première partie consiste en une étude générale des variables aléatoires à densité dont une densité est *CSP*( $I$ ). Partie parfois abstraite pour des élèves de la voie économique.

**Partie II** elle étudie le modèle économique de Léontiev fermé, en passant par des notions d'algèbre linéaire.

**Partie III** cette partie traite de manière classique les simulations de lois de variables aléatoires, notamment la méthode d'inversion.

**Conclusion** En dépit d'une première partie un peu abstraite, le sujet comporte des parties classiques, tout à fait abordables pour des étudiants de la voie économique. Exigeant, complet quant aux notions abordées, voici un beau sujet pour la voie économique !

# 3 Voie Scientifique

## 3.1 Utilisation des épreuves

Le tableau récapitule l'utilisation de chaque épreuve de mathématiques par les différentes écoles, ainsi que les coefficients utilisés.

Ecole	Math Ecricome	Math EMLyon	Math HEC	Math EDHEC	Math 2 CCIP	Math ESSEC
Audencia				8		
Management Normandie		6				
EDHEC				8	2	
EMLyon		6			3	
EM Strasbourg		5				
ESC Dijon		5				
ESC Grenoble				8		
ESC La Rochelle		4				
ESC Montpellier				6		
ESC Pau		4				
ESC Rennes		4				
ESC Troyes		5				
ESCP Europe			6		4	
ESSEC					5	6
HEC Paris			6		5	
INSEEC		5				
ISC Paris		4				
SKEMA		5				
Telecom EM		6				
Toulouse Business School				7		
ICN (Ecricome)	5					
Néoma (Ecricome)	6					
Kedge (Ecricome)	5					

### 3.2 ECRICOME option S : mercredi 16 avril 2014

Comme d'habitude, le sujet comporte deux exercices et un problème.

**Exercice 1** Exercice très classique d'étude de diagonalisabilité d'un endomorphisme ; l'originalité porte sur l'espace considéré, "exotique" en voie EC et qui permet l'utilisation d'outils d'analyse.

Il est très regrettable que le résultat de la seconde question soit crucial à la résolution complète des questions suivantes (hormis la sixième). Pourquoi ne pas le donner ? C'est d'autant plus regrettable que les questions 3 à 5, vraiment accessibles, aurait pu rassurer certains candidats, les plus faibles et les plus angoissés, il s'agit de la première épreuve de la session.

**Exercice 2** Exercice d'analyse dont la finalité est une jolie identité faisant intervenir la fonction digamma (dérivée logarithmique de  $\Gamma$ ). Un cas limite de la relation entre les fonctions polygammas et la fonction d'Hurwitz. A nouveau, c'est assez exotique en voie EC. Ceci ressemble plus à un "morceau" de problème qu'à un exercice. Les six questions alternent remarquablement entre le (très) difficile et le facile.

La première question, difficile, est bien maladroite : stricto sensu l'intégrale est convergente car il s'agit de la dérivée  $k$ -ième en  $x > 0$  de  $\Gamma$ ... Maladresse également dans la seconde question : "rappeler l'expression de  $\Gamma(x+1)$  en fonction..." au lieu d'"exprimer  $\Gamma(x+1)$ ..." aurait été sans équivoque : la preuve n'est pas demandée (si ?). On continue avec une utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (imposée). Les candidats auront donc à introduire l'espace et le produit idoines avec les justifications qui s'imposent. On pouvait faire plus léger... Mais le sujet contient ainsi de l'algèbre bilinéaire, ouf!

Pour le dernier point sensible (5(a)), il faut commencer par décomposer en éléments simples  $\frac{1}{k^2 - a^2}$ , ou au moins en avoir l'idée. En plaçant cette question à la suite de 2., on donnait une chance aux candidats dont les "compétences" ne s'étendent pas au delà du programme.

**Problème** Problème sur les probabilités discrètes avec des questions d’informatique. Le problème s’occupe de la modélisation d’un tournoi entre joueurs dont le gagnant est désigné lorsqu’un joueur gagne pour la première fois successivement  $N$  duels.

Le problème se décompose en 3 parties.

Dans la première partie, on considère le cas  $N = 3$ . Cette partie commence par trois questions de Turbo Pascal avec tout d’abord une première fonction simulant un duel. La deuxième fonction demandée TEST\_VICTOIRE nécessite l’utilisation de variables de type boolean, ce qui n’était plus arrivé dans un sujet de concours depuis de nombreuses années et qui a dû déstabiliser de nombreux candidats, d’autant qu’on aurait pu se passer de l’utilisation de cette fonction dans l’écriture du programme permettant de simuler le tournoi. En ce qui concerne le programme en lui-même, on peut regretter l’absence d’indications supplémentaires car pour une troisième question d’un problème, il n’est pas si simple à mettre en œuvre. La suite de cette partie, classique, consiste à trouver la relation de récurrence suivie par la suite  $(P(E_n))$  puis la forme de  $P(E_n)$  en fonction de  $n$ . On peut se demander pourquoi dans les questions I.4, I.5 et I.6 on ne considère que les entiers supérieurs à 2.

Dans la deuxième partie, on étudie le cas général avec un entier  $N$  quelconque supérieur ou égal à 3. Les premières questions (II.1 à II.4) sont assez classiques tout en demandant une bonne compréhension de l’énoncé. On peut d’ailleurs regretter que le système d’événements fourni à la question II.2 ne soit pas complet ce qui est traître pour les étudiants qui penseraient à juste titre à appliquer la formule des probabilités totales. À ce sujet, il faut signaler un manque de précision importante du sujet. En effet, vu ce résultat, le concepteur du sujet a considéré que le tournoi ne s’arrêtait pas une fois le gagnant désigné. En effet, si cela était le cas, il y aurait ici une erreur d’énoncé, car sachant l’événement  $A_k^{(n)}$  réalisé,  $E_n$  serait alors forcément réalisé et  $P_{A_k^{(n)}}(E_n) = 1$ . Il est donc regrettable que davantage d’explications n’aient donc pas été données sur ce point d’autant que cette situation où le tournoi ne s’arrête pas une fois le gagnant désigné n’est ni courante, ni naturelle.

La suite de cette partie n’est plus du tout classique. L’introduction à la question II.5 d’une question d’analyse a ainsi dû déstabiliser de nombreux étudiants. La récurrence forte de la question 6 n’est pas évidente et nécessite une bonne rédaction de la part d’étudiants. La question II.8 fait ensuite apparaître la seule variable aléatoire du problème alors qu’il s’agit d’une notion majeure du programme de probabilités en ECS... Le calcul de l’espérance est assez complexe et nécessite beaucoup d’esprit d’initiative de la part des étudiants. On peut s’attendre à ce que cette question ne soit que peu abordée.

La troisième partie permet de tester les élèves sur d’autres domaines que les probabilités dans le but de permettre le calcul de la probabilité de l’événement  $E_n$  : “le gagnant n’a pas encore été désigné à l’issue du duel numéro  $n$ ”. La première question, un peu artificielle car tous les résultats importants sont admis, permet de montrer que toutes les racines du polynôme  $Q$  introduit dans la partie II sont simples. On peut remarquer d’ailleurs une coquille typographique (un  $Z$  au lieu d’un  $X$  dans l’expression de  $Q$ ) qui n’est cependant pas trop gênante. La deuxième question, d’algèbre linéaire, consiste à étudier une application linéaire et sa matrice pour déterminer l’existence d’une unique solution à un système de second membre  $(P(E_1) \dots P(E_n))$ . Ici aussi, on peut regretter le caractère un peu artificiel de la question qui fait apparaître ce système sans en expliquer, ne serait-ce qu’un peu, son importance. La dernière question de cette partie permet enfin d’exprimer  $P(E_n)$  à l’aide des solutions de ce système et des racines du polynôme  $Q$ .

**Conclusion** Pour conclure, ce problème, assez intéressant, mobilise le cours de probabilités discrètes vu principalement en première année. Certaines questions utilisent des théorèmes importants du cours mais on peut regretter le manque de questions plus classiques qui auraient permis aux élèves de se rassurer et de se raccrocher au problème et également des imprécisions d’énoncé qui ont pu causer des soucis aux étudiants. D’autant que l’incursion dans le domaine des complexes et des polynômes a contribué à rendre peu appréhendable ce sujet. Ce sujet ne sera sans doute pas utilisé comme support d’entraînement pour les futurs préparatoires. En plus de ses imperfections mathématiques, il n’est pas adapté aux candidats. Le problème semble n’être qu’une simple adaptation d’un sujet de CAPES... ECRICOME est sans doute le concours le plus onéreux (410 euros pour 3 écoles) on peut s’attendre à une épreuve de meilleure facture.

### 3.3 EMLyon option S : mardi 29 avril 2014

Cette épreuve est constituée de deux problèmes qui font principalement appel aux chapitres d’analyse et d’algèbre de première et seconde année.

## Problème 1

Ce problème a pour objet l'étude d'un opérateur défini sur l'espace des applications continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , principalement au travers d'exemples.

### Partie I Généralités sur $T$ .

Mise en place d'un certain nombre de résultats sur  $T$  et  $T(f)$  où  $T(f) : x \mapsto \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt$ .

Pas de difficulté dans cette partie qui débutait par des questions classiques et faciles permettant de tester les candidats sur les notions de primitives, dérivation, convergence d'intégrales, surjectivité et injectivité d'une application linéaire. Des résultats intermédiaires permettaient de baliser la réflexion pour les questions les moins faciles.

### Partie II Étude d'un premier exemple.

Cette partie était consacrée à l'étude de  $T(f_a)$  avec  $f_a : t \mapsto e^{at}$ . Elle comportait des questions un peu plus fines portant sur la dérivabilité et l'étude des variations d'une fonction et établissait un résultat sur le spectre de  $T$ .

### Partie III Étude d'un second exemple.

Cette partie était consacrée à l'étude de  $T(h)$  avec  $h : t \mapsto \frac{1}{|t|+1}$  et apportait un contre-exemple à la réciproque d'une propriété établie dans la partie I. Même si l'énoncé guidait beaucoup, cette partie a dû rebuter un certain nombre de candidats de par la présence d'une valeur absolue et par son caractère répétitif par rapport à la partie précédente (étude de fonction, représentation graphique).

### Partie IV Recherche d'extremum locaux d'une fonction de deux variables.

Mis à part la résolution du système de la question 15, cette partie était une application directe du cours sur les fonctions de deux variables.

### Partie V Transformée d'une densité.

La première question de cette partie, très calculatoire, a dû pousser un certain nombre de candidats à abandonner très vite pour passer au problème suivant. Notons qu'il s'agissait de la seule partie faisant intervenir des probabilités et uniquement au travers de la notion de densité.

## Problème 2

Ce problème portait sur l'étude de la fonction  $\Phi_A$  définie sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  par :  $\Phi_A(M) = AM - MA$  où  $A$  est une matrice fixée.

### Partie I Généralités.

Deux questions très simples portant sur la linéarité, l'injectivité et la surjectivité de  $\Phi_A$ . De nouveau, les indications de l'énoncé permettaient à des candidats faibles mais connaissant leur cours de traiter cette partie.

### Partie II Étude d'un cas particulier.

On se plaçait dans le cas où  $n = 2$  et  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ . Les questions de cette partie portaient sur la réduction de  $A$  et de la matrice de  $\Phi_A$  dans la base canonique de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Cette deuxième partie, facile elle aussi, permettait de tester les connaissances en algèbre linéaire.

### Partie III Étude du cas où $A$ est diagonalisable.

Mis à part la première question qui était une application directe du cours, cette partie permettait de tester l'aisance des candidats sur le produit matriciel, la notion de base, les éléments propres d'un endomorphisme. Elle avait pour but de montrer que si  $A$  est diagonalisable,  $\Phi_A$  l'est aussi et de caractériser les valeurs propres de  $\Phi_A$  à l'aide de celles de  $A$ . Cette partie reprenait le même thème que l'exercice 1 du sujet d'Ericome 2009 mais en le traitant de façon plus élégante.

**Partie IV** Étude d'un sous-espace propre de  $\Phi_A$  associé à une valeur propre non nulle. Une partie un peu plus délicate mais assez classique, qui a dû permettre aux meilleurs candidats de se démarquer.

**Partie V** Étude du cas où  $A$  est symétrique.

Cette partie conduisait à la construction d'une base orthonormale de vecteurs propres de  $\Phi_A$  à partir d'une base orthonormale de vecteurs propres de  $A$ . Mis à part la première question facile, le reste de cette partie demandait une certaine aisance dans les manipulations du produit scalaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  introduit en début de partie et du produit scalaire usuel sur  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

**Conclusion** Cette épreuve est constituée de deux problèmes de longueurs comparables, le premier portant principalement sur des notions d'analyse, et le second portant sur des notions d'algèbre.

Le sujet est nettement plus long que les années antérieures. Il fait très largement appel aux chapitres d'algèbre et dans une mesure un peu moindre, aux chapitres d'analyse des deux années. En revanche, on peut déplorer le peu de place occupée par les probabilités : seule la définition d'une densité était utilisée.

Les deux problèmes comportent un grand nombre de questions classiques ou découlant directement des notions vues en cours. En cela, ce sujet permet de valoriser un travail sérieux et une connaissance approfondie du cours de mathématiques des deux années de classes préparatoires. Il comporte aussi des questions plus fines sur lesquelles les meilleurs candidats ont pu se démarquer.

Malgré la grande diversité d'écoles utilisant cette épreuve, le sujet de cette année a certainement permis de départager des candidats.

### 3.4 HEC option S : mercredi 30 avril 2014

Etant donné deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$ , la fonction de transport de  $X$  vers  $Y$  est une fonction  $T$  de  $X$ , telle que  $T(X)$  suit la même loi que  $Y$ . Son coût est le réel  $C(T) = E((X - T(X))^2)$ . Le but, annoncé, du problème est de trouver le programme de transport de coût minimal. Ce transport est alors optimal.

Les questions sont numérotées de 1 à 14 et réparties en un préliminaire et trois parties indépendantes. Il s'agit d'un problème de probabilités faisant appel à des théorèmes fondamentaux d'analyse : convergences d'intégrales, intégration par parties, inégalité des accroissements finis, sommes de Riemann ; de probabilités : théorèmes de transfert.

**Préliminaires** Q1 : Deux dénombrements sans démonstration. Bizarrement ces deux résultats sont demandés pour  $N \geq 2$ , alors qu'ils sont valables pour  $N = 1$ , mais plus étonnant, ils ne sont pas utilisés dans la suite du problème.

Q2 : Un exemple : fonction de partie entière d'une variable aléatoire exponentielle. L'hypothèse  $p < 1$  n'a pas lieu d'être, puisque la loi géométrique suivie par  $(Y + 1)$  est de paramètre  $1 - \exp(-1/p)$ .

Q3 : Convergence et calcul d'une intégrale de Bertrand.

**Partie I** On définit l'accessibilité d'une variable aléatoire  $Y$  par l'existence d'une fonction de transport  $T$  telle que  $T(X)$  suit la loi de  $Y$  : Il est regrettable que l'énoncé ne précise pas que  $T$  convient si  $T(X)$  est une variable aléatoire.  $X$  suit la loi uniforme sur  $]0, 1[$ .

Q4 : La fonction de transport prend ses valeurs dans  $\{0, 1\}$ .

Q5 : Deux fonctions de transport définies à partir de la fonction logarithme.

Q6 :  $Y$  est une variable aléatoire de densité continue et strictement positive sur  $\mathbb{R}$ .

Q7 : Cas particulier où  $Y$  suit la loi normale centrée réduite.

**Partie II** On donne deux  $N$ -listes de réels strictement croissantes. Cette croissance stricte est inutile pour prouver les résultats de 8. et 9., mais est fort gênante en 11., où on introduit une fonction croissante, au sens large, si bien les images des  $N$ -listes initiales ne sont pas strictement croissantes.

Q8 et 9 : Suite d'inégalités concernant deux suites de  $N$  réels.

Q10 et 11 : Résolution du problème lorsque  $X$  est discrète, à l'aide de ces inégalités.

**Partie III**  $Y$  est une variable aléatoire de densité continue, nulle à l'extérieur d'un segment. Dans les questions 12. 13. et 14., on cherche la fonction de transport optimale.

Dans cette partie les inégalités strictes ou larges sont utilisées à bon escient.

**Conclusion** La théorie du transport optimal est un des champs des mathématiques particulièrement vivant à l'heure actuelle, tant sur le plan théorique que celui des applications<sup>1</sup>. Néanmoins, la mise à la portée de nos élèves de cette théorie rend cet énoncé peu intéressant mathématiquement. On a l'impression d'une suite d'exercices. Cette fonction de transport est l'art d'embrouiller la notion usuelle de fonction de variable aléatoire. Tous les résultats, utiles à la suite, sont dans l'énoncé, ce qui permet au candidat de ne pas perdre son temps s'il ne voit pas immédiatement ce qu'il faut faire, en particulier dans les questions 8. et 9. Cela donne l'impression finale que cet énoncé semble d'une longueur raisonnable. La seule difficulté, pour le candidat, est de citer le bon théorème au bon moment. Il n'y a pas vraiment de raisonnements à conduire. Qu'un sujet de math I traite de probabilités n'est pas choquant, mais un peu plus de rigueur aurait été souhaitable.

### 3.5 EDHEC option S : mardi 6 mai 2014

Comme d'habitude, l'épreuve se compose de 3 exercices et un problème.

**Exercice 1** L'exercice 1 fait travailler sur la loi gamma, puis en utilisant des carrés et une somme, fait calculer la valeur d'une intégrale. L'exercice ne comporte aucune difficulté intrinsèque. Il s'agit de connaître son cours.

**Exercice 2** L'exercice 2 est un exercice d'algèbre linéaire, utilisant la trace. Il valorisera là encore ceux qui ont suivi les résolutions d'exercices durant l'année.

**Exercice 3** L'exercice 3 est un calcul d'intégrale suivant deux méthodes. Une par projection, l'autre par fonction de deux variables. Encore une fois, le cours est essentiel.

**Problème** Le problème fait la part belle à l'analyse et aux probabilités. A l'aide d'une variable aléatoire  $X$ , on définit  $Y$  par :  $\forall \omega \in \Omega, Y(\omega) = \int_0^1 \max(X(\omega); t) dt$  et on étudie les différentes propriétés de  $Y$ . La partie I étudie plusieurs cas où  $X$  est discrète. On note une simulation Pascal dans une des questions. La partie II étudie plusieurs cas où  $X$  est à densité (ce n'est pas forcément le cas de  $Y$ ) (de nouveau 3 questions de Pascal).

**Conclusion** Si parfois les calculs sont lourds, aucune question n'est ardue et la connaissance du cours devrait jouer son rôle de filtre pour les écoles prenant cette épreuve. Soulignons la bonne idée des simulations Pascal.

### 3.6 CCIP 2 option S : mercredi 7 mai 2014

Le sujet est composé de trois parties, et porte essentiellement sur des vecteurs aléatoires, utilisant des outils algébriques pour les étudier : matrices de variance-covariance, rang et support stochastiques. Avant de débiter, le candidat doit s'imprégner de "notations algébriques" et de "notations probabilistes", sans surprise. Le choix est fait de noter l'espérance d'un vecteur aléatoire  $\mathcal{E}(Y)$  plutôt que  $E(Y)$ , et la matrice de variance-covariance  $\mathcal{V}(Y)$  plutôt que  $V(Y)$ . Il est vraisemblable que la différence ne se voit pas du fait de l'écriture manuscrite de certains candidats.

**Partie I** Cette partie étudie les lois de Bernoulli généralisées, c'est à dire à valeur dans  $\{e_1; \dots; e_n\}$  si  $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$  est la base canonique de  $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ . La première question étudie, de manière très détaillée, les matrices de la forme  $a^t u$  où  $a$  et  $u$  sont deux vecteurs colonnes, c'est donc une entame portant sur des points très classiques. On peut se demander pourquoi, dans la question 1.f, on parle soudainement de la base canonique de  $\mathbb{R}^k$  alors que l'énoncé a jusqu'à présent uniquement parlé de l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ . Cela n'a vraisemblablement pas gêné les candidats. Pour la question 2, la difficulté principale était de désalgébriser l'événement  $[X = e_i]$  afin de l'écrire sous forme plus traditionnelle. Dans la suite de la question 2, l'initiative était laissée au candidat d'extrapoler ce qui a été fait pour le couple  $(X_1; X_2)$  aux autres couples  $(X_i; X_j)$ , ce qui était pertinent dans le contexte et tel que l'énoncé était formulé. La question 3 a dû sembler plus difficile aux étudiants.

1. <http://images.math.cnrs.fr/Transport-optimal-de-mesure-coup.html>

**Partie II** Cette partie, qui se propose d'étudier des "tirages avec remise dans une population stratifiée", commence avec son lot de notations, ce qui nécessite un effort certain pour aborder la première question de cette partie. La question 5, avec l'espérance conditionnelle, puis la variance conditionnelle, a dû faire la différence entre les candidats. Pour aborder la question 6 sérieusement, il fallait avoir bien maîtrisé le modèle et les notations, ce qui était réservé aux meilleurs.

**Partie III** Cette partie a pour ambition d'étudier les support et rang stochastiques d'un vecteur aléatoire, ce qui constitue un saut conceptuel important. La question 7.a introduit tout de suite le rang stochastique d'un vecteur aléatoire, sans que les étudiants aient eu le temps de se familiariser avec la notion de support stochastique. La question 7.c aurait pu être placée en tout début de partie, et 7.b réécrite sous la forme "Que peut-on dire si  $\{0_{k,1}\} \in \mathcal{S}(Y)$  ?". Dans le même esprit, on aurait pu intervertir les questions 7 et 8 sans que cela nuise en rien à ce sujet.

**Conclusion** Cette épreuve, rappelons-le, est utilisée par cinq écoles HEC, ESSEC, ESCP-Europe, EMLyon et EDHEC, ce qui représente un grand nombre de candidats aux profils très variés. Les difficultés des parties sont croissantes, cependant les entames des partie II et III n'ont peut être pas toujours permis à des candidats de "rebondir" efficacement. La difficulté de conception réside dans la gestion de l'hétérogénéité, il faut en effet pouvoir noter de manière pertinente des étudiants ayant des niveaux très variables. Les concepteurs ont globalement réussi ce défi, tout en arrivant à produire un sujet original.

### 3.7 ESSEC option S : vendredi 9 mai 2014

Ce problème étudie les matrices normales, c'est-à-dire, les matrices réelles carrées qui commutent avec leur transposée. Ainsi, on est amené à étudier l'adjoint (non nommé) d'un endomorphisme canoniquement associé à la matrice  $A$ , c'est-à-dire l'endomorphisme canoniquement associé à la transposée de la matrice  $A$ . Le but est d'exprimer la transposée de la matrice  $A$ , comme fonction polynôme de  $A$ .

L'énoncé comporte 6 pages, 6 parties de longueurs inégales et est découpé en 28 questions, dont très peu sont divisées en sous-questions.

Cours utilisé : calcul matriciel, matrices semblables et changement de bases, espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ , racines dans  $\mathbb{C}$  des polynômes à coefficients réels

**Partie I** Matrices normales d'ordre 2, questions 1) à 3)

Exemple difficile pour un début de problème : le candidat doit savoir écrire deux réels  $a$  et  $b$  comme produits d'un même réel positif par le cosinus et le sinus d'un même réel, (il s'agit, sans le dire, de similitudes directes), puis effectuer des calculs pour trouver les matrices normales ayant un polynôme annulateur donné.

**Partie II** L'endomorphisme  $f^*$  (adjoint de  $f$ ), questions 4) à 8)

Inverse,  $f^{**}$ , caractérisation de  $f^*$  à l'aide d'un produit scalaire, caractérisation d'un endomorphisme par : pour  $x$  dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $\|f(x)\| = \|f^*(x)\|$ . La plupart des démonstrations de cette partie sont dans le cours de Math Spé. Le candidat peut s'inspirer de son cours sur les endomorphismes symétriques.

**Partie III** Matrices normales et polynômes annulateurs, questions 9) à 14)

Soit  $A$  une matrice normale. On montre que si  $P^q(A) = 0$ , alors  $P(A) = 0$ . Comme exemple d'application, on cherche les matrices  $M$  telles que :  $M^2 + M - {}^tM = I_n$ . On montre l'existence, si  $A$  est non nulle, d'un polynôme annulateur de  $A$ , n'ayant que des racines simples dans  $\mathbb{C}$ , unitaire et de degré minimal. On termine par un exemple, qui s'avère être le même que le précédent.

**Partie IV** Propriétés spectrales des matrices normales, questions 15) à 19)

On prouve que  $f$  et  $f^*$  ont mêmes valeurs propres et mêmes sous-espaces propres. Mêmes remarques qu'en II., et on aboutit à une matrice semblable à  $A$ , formée d'un bloc diagonal et de blocs d'ordre 2, qui sont des similitudes directes. Cette fin de partie, où il faut bien manier les complexes, paraît difficile.

**Partie V** Etude d'un exemple, questions 20) à 23)

Soit  $A$  une matrice normale, dont le polynôme annulateur donné est de degré 6. Après avoir trouvé les racines de ce polynôme, on cherche le polynôme annulateur de  $A$ , unitaire et de degré minimal. Il me semble que la plupart des candidats n'ont pas trouvé les racines (0 et -1 évidentes,  $j$  et  $j^2$  racines doubles) et n'ont donc pas pu terminer cet exemple.

**Partie VI** Généralisation, questions 24) à 28)

Le but est d'exprimer la transposée de la matrice  $A$ , comme fonction polynôme de  $A$ . La solution est donnée : on trouve un polynôme, combinaison linéaire de  $r + 2t$  polynômes, l'écriture de chacun d'eux nécessitant une ligne de l'énoncé, ressemblant à des polynômes de Lagrange, mais comportant des nombres complexes et leurs conjugués. La dernière question consiste à appliquer le résultat à  $A$ , dont on connaît le polynôme annulateur, unitaire et de degré minimal, de degré 5 dans l'exemple proposé. Cette dernière partie est fort rébarbative, les plus malins et les moins découragés auront pu traiter la question 28)

**Conclusion** L'utilisation des nombres complexes est très discriminante. Il aurait fallu deux exemples plus simples. Ce problème est beaucoup trop difficile pour la plupart des candidats. Si l'ESSEC veut recruter des bons matheux, c'est réussi. Mais ils ne seront pas assez nombreux et, vraisemblablement, ce sujet ne permet pas de départager de manière claire les candidats moyens des plus faibles.

## 4 Voie Technologique

### 4.1 Utilisation des épreuves

Le tableau récapitule l'utilisation de chaque épreuve de mathématiques par les différentes écoles, ainsi que les coefficients utilisés.

Ecole	Math Ecricome	Math ESCP	Math ESC
Audencia		4	
Management Normandie			4
EDHEC		5	
EMLyon		3	
EM Strasbourg			3
ESC Dijon			2
ESC Grenoble		8	
ESC La Rochelle			3
ESC Montpellier			5
ESC Pau			3
ESC Rennes		4	
ESC Troyes			4
ESCP Europe		5	
ESSEC		5	
HEC Paris		7	
INSEEC			4
ISC Paris			3
SKEMA		6	
Telecom EM		5	
Toulouse Business School		5	
ICN (Ecricome)	6		
Néoma (Ecricome)	6		
Kedge (Ecricome)	6		

## 4.2 ECRICOME option T : mercredi 16 avril 2014

L'épreuve est constituée de trois exercices.

**Exercice 1** L'exercice étudie la fonction  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = 2 - \frac{1}{2} \ln(x)$ , puis la convergence de la suite récurrente  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  où  $u_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$  à l'aide de l'inégalité des accroissements finis. Cet exercice très classique ne présente pas de difficulté particulière en raison de calculs d'un niveau de première année et permet de mettre l'accent sur les raisonnements.

**Exercice 2** Composé de deux parties, la première fait calculer le terme général d'une suite récurrente linéaire double à l'aide de matrices carrées d'ordre deux, la seconde porte sur des probabilités discrètes et utilise le résultat de la question I.6. S'il est peut-être dommage de donner indirectement la matrice  $P^{-1}$ , l'obtention de la matrice colonne  $X_n$  par une autre méthode que  $PD^nP^{-1}$  est appréciable. La partie II commençant par la reconnaissance d'une loi binomiale et d'une loi géométrique, lors de lancers successifs d'une pièce de monnaie truquée, récompense les étudiants sérieux. L'exercice se poursuit par l'étude du rang d'apparition du premier double pile. Les questions sont progressives, les raisonnements plus délicats doivent permettre aux bons candidats de se démarquer.

**Exercice 3** Il est consacré à l'étude d'une variable à densité définie par  $h(x) = \begin{cases} \frac{2e^x}{(1+e^x)^2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ .

Bien que peu original et sans situation concrète modélisée par la variable de densité  $h$ , cet exercice permet de vérifier l'acquisition d'un chapitre traditionnellement traité en fin de seconde année et offre ainsi une prime aux étudiants sérieux restés attentifs jusqu'à la fin de leur formation.

**Conclusion** Sujet beaucoup plus raisonnable et mieux formulé que les années précédentes, il recouvre la majorité du programme ; sa longueur et les questions variées permettent aux étudiants sérieux de montrer leurs connaissances et aux meilleurs d'entre eux de se distinguer.

## 4.3 ESCP option T : mercredi 7 mai 2014

L'épreuve est constituée de quatre exercices indépendants.

**Exercice 1** Il étudie une variable aléatoire  $X$  de densité  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(t) = \begin{cases} 2e^{-2(t-a)} & \text{si } t \geq a \\ 0 & \text{si } t < a \end{cases}$  où  $a$  est un réel strictement positif, puis la variable  $Y = X - a$ . Les questions très classiques permettent aux étudiants maîtrisant cette partie du cours, de traiter cet exercice avec efficacité.

**Exercice 2** On retrouve un thème récurrent des sujets ESCP Europe ou HEC, les suites définies par une intégrale, ici la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donnée par  $u_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \int_0^1 [\ln(1+t)]^n dt$ . Les premières questions, fort simples, étudient la fonction  $f$  sur  $[0, 1]$  définie par  $f(t) = \ln(1+t)$ , (variation, tracé de la courbe, concavité), avant d'aborder l'étude de la suite, (encadrements, monotonie, convergence) pour s'achever par la limite de  $\frac{nu_n}{2(\ln 2)^{n+1}}$ . Les questions très progressives doivent valoriser les étudiants ayant travaillé régulièrement, la fin de l'exercice départageant les meilleurs d'entre eux.

**Exercice 3** En première partie on étudie la fonction homographique définie sur  $\mathbb{R}_+$  par  $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$ , puis de la suite récurrente  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  où  $u_0 = \frac{1}{2}$  et  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$  à l'aide de l'inégalité des accroissements finis. La seconde partie permet d'obtenir l'expression de  $u_n$  et de retrouver la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  grâce au calcul matriciel dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Tout étudiant sérieux doit réussir une bonne partie des questions classiques et sans difficulté, les raisonnements moins immédiats distinguant les plus aguerris.

**Exercice 4** Etude de probabilités discrètes (déplacements d'une puce sur les sommets d'un carré). Là aussi l'exercice est tout à fait dans l'esprit du programme, faisant appel à la formule des probabilités totales, au calcul matriciel dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , avec, bien heureusement, des formulations plus originales.

**Conclusion** L'épreuve ESCP Europe option T est fort bien adaptée aux écoles auxquelles elle est destinée (ESSEC, HEC, EDHEC, EML, etc.). Elle recouvre quasiment le programme tout en respectant son esprit. Longue, exigeante, mais bien formulée et progressive, elle répartit et sélectionne les étudiants avec équité.

#### 4.4 ESC option T : vendredi 9 mai 2014

*L'épreuve est constituée de quatre exercices indépendants.*

**Exercice 1** La première partie de l'exercice conduit à l'obtention de  $M^n = \frac{1}{8} \left(\frac{3}{5}\right)^n A - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{5}\right)^n B$  où  $M$ ,  $A$  et  $B$  sont des matrices carrées d'ordre 3 en utilisant le raisonnement par récurrence et les suites géométriques. La seconde, sous des apparences de calcul de probabilités (une poule pond chaque semaine entre zéro et trois oeufs) fait essentiellement l'étude de trois suites  $(u_n)$ ,  $(d_n)$  et  $(t_n)$  (les réels  $u_n$ ,  $d_n$  et  $t_n$  sont les probabilités que la poule pond respectivement un, deux ou trois oeufs). L'exercice se termine par le calcul de la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n + 2d_n + 3t_n$ . La lecture de cet exercice n'est guère facilitée par le grand nombre de données, qu'il s'agisse des matrices ou des six suites apparaissant, les questions en paraissant d'autant plus difficiles. L'introduction des probabilités est quasiment artificielle puisque les relations de récurrence sont données par l'énoncé ( $X_{n+1} = MX_n$  où  $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ d_n \\ t_n \end{pmatrix}$ ), seules deux interprétations en terme de probabilité sont demandées, celle de  $1 - (u_n + d_n + t_n)$  et de  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n + 2d_n + 3t_n$ .

**Exercice 2** Thème classique : étude de la fonction sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x - 2 + e^{-x}$ , puis de la suite récurrente  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  où  $u_0 = \frac{1}{2}$  et  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = g(u_n)$  avec  $g(x) = f(x) - x$

Cet exercice est relativement bien adapté aux possibilités des étudiants de l'option T, on peut cependant noter la formulation de la question 3. "*Justifier que la courbe  $C$  coupe l'axe des abscisses exactement deux points...*" qui ne devait pas les inciter à utiliser le théorème de la bijection, d'autant plus qu'il leur fallait appliquer ce théorème par deux fois sur deux intervalles, initiative difficile pour la majorité de ces étudiants. Une rédaction plus adaptée, portant sur l'équation  $f(x) = 0$ ,  $x$  appartenant à  $\mathbb{R}_+$ , aurait été préférable.

**Exercice 3** Exercice de probabilités discrètes utilisant la loi binomiale et des variables de Bernoulli. Bien que les lois soient facilement reconnaissables par les étudiants de la voie T, l'énoncé encore une fois peu naturel, surprend : "5 personnes montent ensemble dans l'ascenseur... chacune souhaite monter à l'un des trois étages de manière équiprobable ..." et ne facilite pas sa compréhension.

Une bonne interprétation de l'expérience et des définitions des sept variables, est nécessaire pour réussir l'exercice, la seule maîtrise du cours ne récompensera pas nécessairement les étudiants sérieux et faibles.

**Exercice 4** L'exercice étudie d'abord une suite de fonctions données pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , par

$$f_n(t) = \begin{cases} (n+1)(n+2)t^n(1-t) & \text{si } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

puis les variables :  $X$  de densité  $f_1$ ,  $Y$  suivant une loi exponentielle, et  $Z = X + Y$  pour en calculer l'espérance. Bien que le programme soit respecté, ces fonctions, dépendant d'un paramètre, peuvent décourager les étudiants qui n'aborderont pas les questions les plus simples.

**Conclusion** Les étudiants qui traiteront avec réussite une part importante de cette épreuve, n'intégreront vraisemblablement pas les écoles qui l'utilisent mais plus certainement Néoma, SKEMA ou Grenoble car ils auront également réussi les épreuves de mathématiques d'ECRICOME ou de l'ESCP. Cette épreuve, choisie par les ESC de Troyes, Pau, La Rochelle etc. doit être adaptée à des étudiants parfois faibles en mathématiques, elle doit pouvoir les sélectionner et récompenser les plus sérieux d'entre eux.