Rapport sur les épreuves de mathématiques des concours 2010 des classes préparatoires économiques et commerciales

APHEC

juin 2010

Ce document est public, et disponible sur le site de l'APHEC (`http://aphec.it-sudparis.eu`), rubrique "Observatoire des concours / Rapports annuels sur les concours"

Introduction

Comme tous les ans, la commission mathématiques de l'APHEC regarde d'un œil critique les sujets du millésime, pour rendre un avis a posteriori. Mais alors se pose inévitablement la question : qu'est-ce qui fait la qualité d'un sujet de mathématique ?

La beauté d'un sujet de mathématique tient dans divers ingrédients : dans l'originalité du thème traité qui doit intéresser voire piquer la curiosité du lecteur, dans l'élégance et la finesse de la résolution des difficultés mathématiques rencontrées, ou encore dans l'enchaînement harmonieux des parties, des questions ou des indications. Toute personne qui cotoie intimement le monde des mathématiques est inévitablement sensible à cette beauté. Les professeurs préparationnaires, au même titre que les concepteurs, attendent ou recherchent cet idéal de beauté, veulent l'atteindre, le partager avec d'autres.

En sport, la beauté du geste ne vaut rien si l'efficacité n'est pas au rendez-vous, et l'on pourrait en dire de même d'un sujet de concours. Qu'est ce qu'un bon sujet alors ? C'est avant tout un sujet qui permet aux candidats de s'exprimer, de mobiliser les connaissances assimilées lors des deux années de préparation en vue de la résolution d'un problème ou d'un exercice. C'est aussi un sujet qui doit servir à trier petit à petit les candidats, afin que l'épreuve valorise graduellement les candidats en fonction de leur perspicacité et leur niveau. Enfin, c'est un sujet qui doit doit permettre aux étudiants de pouvoir se rattraper lors des changements de parties ou d'exercices, afin de ne pas les juger uniquement sur une partie mal débutée, ou bien sur une trop faible partie du programme.

La notion de difficulté n'est pas antinomique avec un beau sujet, ni avec un bon sujet, bien au contraire. C'est une bonne connaissance du niveau des candidats qui permet de jauger au mieux les exigences que l'on est en droit d'espérer des candidats, et donc de calibrer le niveau de difficulté mathématique. La variété des épreuves doit être une garantie que tous les candidats trouveront une épreuve à leur mesure. La disparition de l'épreuve ESC dans les voies E et S est à ce titre fort dommageable. C'est pour aider à mieux apprécier le niveau mathématique des élèves de la filière qu'un avis a posteriori des professeurs préparationnaires sur les sujets de concours est nécessaire.

La recherche de la perfection d'un sujet passe immanquablement par une chasse à l'imperfection. Les écueils à éviter sont innombrables : excès de calculs, absence de progressivité, notations ou rédactions maladroites ou imprécises, sans parler du cauchemar de tout concepteur : l'erreur d'énoncé !

Si la maîtrise de nouvelles notions est la preuve d'une aisance mathématique certaine, il ne faut cependant pas croire qu'en introduisant une définition ou un résultat hors du programme, les élèves pourront en assimiler toutes les subtilités, même après un ou deux exemples introductifs. Cette technique d'élaboration de sujet, qui consiste à viser le "beau" en introduisant des nouveautés, est certainement louable dans l'intention, mais est à utiliser avec délicatesse et parcimonie. Les mathématiques sont une école d'abstraction, de rigueur, où chaque nouvelle notion est une falaise à escalader, dont la hauteur et la difficulté, en un mot l'accessibilité, sera fonction du savoir et des capacités de chaque candidat. En ce sens, le programme est déjà en lui même un beau parcours d'obstacles.

Le sujet idéal est celui qui fait preuve d'une démarche esthétique réussie tout en répondant aux exigences, plus pragmatiques, d'efficacité pour le fonctionnement du concours, et qui, enfin, ne souffre d'aucune malformation congénitale. La recherche d'un sujet proche de la perfection, le plus adapté possible, celui qui fera unanimité, est un art délicat, nous espérons tous nous en approcher au plus près avec les sujets futurs.

Table des matières

1 Les épreuves de mathématiques 2010

1.1 Option Economique

Date et appellation	Concepteur	(coefficient) Ecoles utilisant l'épreuve
Mercredi 21 avril 2010 de 8 à 12h Ecricome voie E	Ecricome	(5) ESC BORDEAUX (4) EUROMED MARSEILLE (4) ICN NANCY (5) Sup de Co REIMS (5) ESC ROUEN (5) ESC TOURS-POITIERS
Lundi 3 mai 2010 de 8 à 12h EML voie E	EML	(4) EM Lyon (4) CERAM ESC Lille (4) Ecole Magt Normandie (3) ESC Bretagne Brest (3) ESC Chambéry Savoie (4) ESC Clermont (3) ESC Dijon Bourgogne (4) ESC La Rochelle (4) ESC Pau (4) ESC Rennes (4) ESC Saint Etienne (5) ESC Troyes (4) Ecole Magt Strasbourg (4) ISC Paris (9) ESM de Saint-Cyr
Mardi 4 mai 2010 de 8 à 12h HEC voie E	HEC	(4) HEC (4) ESCP-Europe
Vendredi 7 mai 2010 de 8 à 12h EDHEC voie E	EDHEC	(8) EDHEC (8) AUDENCIA Nantes (2) ESC Amiens Picardie (9) ESC Grenoble (GEM) (4) ESC Montpellier (7) ESC Toulouse (5) INSEEC (Paris-Bordeaux) (6) TELECOM EM (3) ENAss (option Mathématiques) (2) ISCID (4) ISG
Lundi 10 mai 2010 de 8 à 12h ESSEC voie E math 2	ESSEC	(4) HEC (4) ESSEC MBA (3) ESCP Europe (2) EM Lyon
Mardi 11 mai 2010 de 14 à 18h ESSEC voie E math 1	ESSEC	(4) ESSEC

1.2 Option Scientifique

Date et appellation	Concepteur	(coefficient) Ecoles utilisant l'épreuve
Mercredi 21 avril 2010 de 8 à 12h Ecricome voie S	Ecricome	(5) ESC BORDEAUX (5) EUROMED MARSEILLE (5) ICN NANCY (5) Sup de Co REIMS (7) ESC ROUEN (5) ESC TOURS-POITIERS
Lundi 3 mai 2010 de 8 à 12h EML voie S	EM Lyon	(4) CERAM ESC-Lille (6) Ecole Magt Normandie (6) EM Lyon (3) ESC Bretagne Brest (3) ESC Chambéry Savoie (5) ESC Clermont (5) ESC Dijon Bourgogne (4) ESC La Rochelle (3) ESC Montpellier (4) ESC Pau (5) ESC Rennes (4) ESC Saint Etienne (5) ESC Troyes (5) Ecole Magt Strasbourg (6) ISC Paris
Mardi 4 mai 2010 de 8 à 12h HEC voie S	HEC	(6) HEC (6) ESCP Europe (25) ENSAE
Vendredi 7 mai 2010 de 8 à 12h EDHEC voie S	EDHEC	(8) EDHEC (8) AUDENCIA Nantes (3) ESC Amiens Picardie (8) ESC Grenoble (7) ESC Toulouse (6) INSEEC (7) TELECOM EM (3) ENAss (option Mathématiques) (2) ISCID (5) ISG
Lundi 10 mai 2010 de 8 à 12h CCIP voie S	CCIP	(5) HEC (5) ESSEC MBA (4) ESCP Europe (3) EM Lyon
Mardi 11 mai 2010 de 14 à 18h ESSEC voie S	ESSEC	(6) ESSEC MBA

1.3 Option Technologique

Date et appellation	**Concepteur**	**(coefficient) Ecoles utilisant l'épreuve**
Mercredi 21 avril 2010 de 8 à 12h Ecricome voie T	Ecricome	(4) ESC BORDEAUX (4) EUROMED MARSEILLE (3) ICN NANCY (4) Sup de Co REIMS (4) ESC ROUEN (4) ESC TOURS-POITIERS
Lundi 10 mai 2010 de 8 à 12h ESCP Europe voie T	ESCP Europe	(5) ESCP Europe (3) AUDENCIA Nantes (6) CERAM ESC Lille (5) EDHEC (3) EM Lyon (10) ESC Grenoble (4) ESC Rennes (5) ESC Toulouse (5) HEC (5) ESSEC MBA (4) ESC Lille (5) TELECOM EM
Mardi 11 mai 2010 de 14 à 18h ESC voie T	ESC	(4) Ecole de Management de NORMANDIE (3) ESC Amiens Picardie (4) ESC Bretagne Brest (4) ESC Chambéry Savoie (2) ESC Clermont (2) ESC Dijon (3) ESC La Rochelle (5) ESC Montpellier (4) ESC Pau (4) ESC Saint-Etienne (4) ESC Troyes (3) Ecole Magt Strasbourg (4) INSEEC (3) ISC Paris (2) ISCID (4) ISG

2 Option Economique

2.1 ECRICOME 2010 voie E

Exercice 1 : Trigonalisation d'une matrice dépendant d'un paramètre et utilisation pour une suite récurrente linéaire d'ordre 3.
Commentaires : Etant donnée la lourdeur des expressions dans le calcul de Q, une indication ("en utilisant la méthode de Gauss") aurait contribué à mettre les candidats en confiance.
Exercice 2 :
Etude d'une fonction et calcul de l'espérance d'une variable à densité.
Avec un programme de dichotomie (ou de balayage) pour ceux qui ont travaillé PASCAL.
Commentaire : Exercice bien adapté offrant des pistes mais laissant des initiatives.
Exercice 3 :
Exercice complet sur les probabilités discrètes avec décompositions d'événements, loi usuelle, sommes de séries, et calculs très lourds (loi de Y_3, $E(T_2)$).
Commentaires : Tout l'exercice reposait sur le calcul des probabilités de E_1, E_2 et E_3. Le seul résultat permettant de contrôler les calculs était ... douze questions plus loin.
La recherche par de très lourds calculs de la loi de T_3 présentait peu d'intérêt. Le calcul complet d'un des termes aurait suffi.
L'intitulé de la question 6.b) était ou bien faux, ou bien intraitable dans le cadre donné.

> Nous apprécions que l'énoncé balaye largement les programmes de première et deuxième année (y compris le PASCAL).
> Malgré les qualités de l'exercice II, nous regrettons que les deux autres demandent autant de calculs.
> Le simple fait de placer l'exercice le plus classique (exercice 2) au début de l'énoncé aurait davantage mis les candidats en confiance.
> L'enchaînement des exercices devrait donc permettre bien trier ceux des candidats qui ne se seront pas laissés déstabiliser par l'exercice I.

2.2 EML 2010 voie E

Exercice 1 : Etude d'un endomorphisme de l'espace vectoriel des matrices symétriques d'ordre 2, puis réduction de la matrice d'ordre 3 de cet endomorphisme dans une base convenable. Exercice adapté au public qui couvre une bonne partie du programme d'algèbre de la classe.

Exercice 2 : Etude d'une fonction d'une variable réelle, suite récurrente et séries, étude des extrema d'une fonction de deux variables. Exercice qui aborde de nombreux points du programme d'analyse. Les deux premières parties sont classiques, la dernière question de la partie III nécessite en revanche des calculs lourds, peu dans l'esprit du programme, qu'il sera difficile pour les candidats de mener à terme en un temps raisonnable.

Exercice 3 : Variables discrètes puis continues. Exercice classique sur les variables aléatoires, nécessitant de manière répétitive la formule des probabilités totales.

> Sujet adapté aux élèves de la voie économique, qu'il sera cependant difficile de finir en 4 heures.

2.3 HEC 2010 voie E

Le sujet comporte un exercice et un problème.

Exercice : l'exercice étudie la dérivation dans $\mathbb{R}_3[X]$, et se termine par la recherche des sous-espaces stables. Les questions, très abordables, devraient permettre de distinguer les étudiants ayant compris la notion de dimension d'un sous espace vectoriel. Il est cependant regrettable que le sujet parle de «polynôme propre» au lieu de «vecteur propre», ce qui a pu troubler certains candidats.

Problème : Le problème comporte trois parties : la première étudie le sup, l'inf, la somme et la différence de deux variables exponentielles indépendantes. Il est un peu surprenant que le sujet demande en toute première question de «rappeler» un résultat qui n'est pas explicitement au programme.

La deuxième partie fait de même avec des variables géométriques : contrairement à ce qu'annonce le préambule, il y a peu d'analogies avec la première partie, et les calculs d'espérance conditionnelle de la fin sont inutilement longs.

La troisième partie est double : d'abord, on estime le paramètre d'une loi exponentielle par l'inverse de la moyenne, puis on étudie la convergence de la variable centrée associée au sup vers la loi de Gumbel.

> Le sujet est adapté, intéressant, guide les candidats, donne les résultats intermédiaires ; il couvre une grande partie du programme, avec une petite question d'algorithmique. Mais on pourra regretter que ce soit la longueur, excessive, qui soit discriminante plus que la difficulté graduelle des questions.

2.4 EDHEC 2010 voie E

Exercice 1 : Étude d'une fonction de deux variables réelles. Seule originalité, la fonction admet une infinité de points critiques. Les expressions algébriques utiles et indications sont données par le sujet.

Exercice 2 : Convergence d'une suite (u_n) par croissance majorée puis, en notant ℓ sa limite, étude de celle de la série de terme général $(u_n - \ell)$. Exercice un peu plus technique mais standard et bien guidé.

Exercice 3 : Consacré aux variables aléatoires à densité, il s'achève par la simulation informatique – celle du programme – d'une variable de loi exponentielle à partir d'une variable de loi uniforme.

Problème : On réduit dans la première partie un endomorphisme en suivant un parcours imposé – discutable – mais qui permet de balayer très largement le programme d'algèbre linéaire ; dans la seconde on applique ce qui précède à la détermination de la loi d'une suite de variables aléatoires réelles définies par un « jeu ». Ici encore le texte ratisse large : complétion d'un script Pascal (où il manque malheureusement l'instruction `randomize`), formules des probabilités totales et du binôme pour les matrices.

Le programme des deux années de préparation est passé en revue dans ce texte qui fait la part belle à l'informatique et paraît adapté en longueur comme en difficulté au public visé.
À noter que le concepteur a visiblement souhaité faire réfléchir les candidats par des formulations de questions imposant parfois la démarche ; voir par exemple exercice 3 question 3)b) ou problème partie 1 question 1)b).

2.5 ESSEC 2010 voie E

Ce sujet se compose de deux problèmes : un problème d'algèbre et un problème de probabilités.
Premier problème : ensemble des matrices dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres.
La première partie permet d'obtenir des résultats simples sur ces matrices d'ordre n puis de passer à l'étude de quelques exemples. Dans la seconde partie, il s'agit d'étudier les matrices nilpotentes d'ordre 3 (en développant des raisonnements sur les espaces vectoriels et les noyaux) afin d'arriver à décrire une infinité de matrices vérifiant les objectifs fixés. Le problème s'arrête ainsi, sans chercher à généraliser les résultats entrevus en dimension 3, évitant ainsi le piège d'une partie trop longue et/ou trop difficile.
Le problème est intéressant et original. Il utilise l'ensemble du programme d'algèbre des deux années. Un certain nombre de questions sont de nature calculatoire mais classiques et d'autres permettent de sélectionner les élèves capables de raisonnements algébriques plus fins.
Second problème : le kurtosis
Après en avoir donné la définition et montré son invariance par transformation affine, une première partie propose de déterminer le kurtosis de quelques lois usuelles. Dans une seconde partie, on détermine un minorant du kurtosis. Enfin, une troisième partie s'intéresse au kurtosis d'une somme de variables aléatoires indépendantes.
Ce problème fait appel à l'essentiel du programme portant sur les variables aléatoires aussi bien discrètes qu'à densité. Il nécessite notamment une bonne maîtrise de la formule de transfert, des propriétés de l'espérance et de la variance. Les calculs sont de difficultés raisonnables. Plusieurs questions demandent aux candidats de prendre des initiatives ce qui devrait permettre de distinguer les meilleurs.

Un sujet intéressant, de longueur raisonnable, bien adapté à la voie économique. Un énoncé composé de questions classiques accessibles à la majorité des candidats et de questions plus fines ou ouvertes qui permettent de distinguer les meilleurs.

2.6 ESSEC 2010 voie E math 2

Partie I : Cette partie porte sur des propriétés classiques de la loi exponentielle. Les techniques utilisées sont classiques et variées (intégration par parties, démonstration par récurrence, étude du minimum et du maximum de deux variables aléatoires,...).
Cette partie, comportant par ailleurs des questions de cours, permettra de reconnaître les candidats maîtrisant le contenu et les méthodes classiques du programme.
A noter tout de même quelques questions plus délicates (par ex 2bii) qui auraient peut-être mérité quelques indications.

Partie II : Cette partie aborde les notions de fiabilité et de taux de défaillance de variables aléatoires représentant la durée de vie d'un système. Après l'étude théorique de certaines

propriétés liées à ces notions, on propose une illustration sur des systèmes "simples".
Cette partie, beaucoup plus théorique, déstabilisera plus d'un candidat. Peut-être aurait-il fallu placer les illustrations en début de partie afin que l'étudiant puisse d'abord se familiariser avec les notions présentées ? D'autant plus que les questions 6b) et 6c) sont dans la continuité de la fin de la partie I.
Pour les questions 1) et 2), l'intérêt d'utiliser la fonction R_T est discutable : pourquoi ne pas traiter la question 2 directement avec la fonction f_T ?
Cette partie comporte des questions très délicates (par ex 4b).
Elle permettra de départager les bons candidats des très bons candidats, et de reconnaître ceux qui parviennent à travailler en temps limité sur des notions abstraites et à s'adapter à une certaine lourdeur de notations.

Partie III : L'objectif de la partie III est de prouver que les variables aléatoires d'un processus de Poisson suivent effectivement une loi de Poisson. Cette partie utilise, sans la nommer, la notion de fonction génératrice qui n'est pas au programme. Cette partie est beaucoup plus difficile que la précédente et n'est plus dans l'esprit du programme. Certaines questions utilisent des connaissances mathématiques que les étudiants n'ont pas (2e et 6a). Ils peuvent peut-être contourner ces obstacles mais il n'est pas possible de mettres en place les raisonnements nécessaires en temps limité.

L'épreuve porte dans sa globalité sur les probabilités, et plus précisément sur les variables à densité. Elle comporte 3 parties dont le niveau de difficulté est croissant. Le côté progressif de la difficulté est une des principales qualités de l'épreuve. Les correcteurs ne s'étonneront pas que certaines questions, voire certaines parties soient boudées par les candidats d'une voie eco peu adaptée au style de l'épreuve.

3 Option Scientifique

3.1 ECRICOME 2010 voie S

Le sujet se compose de deux exercices et d'un problème.

Execice 1 : Exercice d'analyse (étude d'une suite définie par une intégrale)

Question 1 : étude de la convergence de la suite u_n.
On établit de façon très classique une relation qui permet d'encadrer l'intégrale, avec une petite difficulté de rédaction du fait d'une formule non valable en 1. Étude de limite évidente. Relation entre u_n et v_n sans difficulté, le changement de variable étant fourni. Les élèves auront-ils pensé à mentionner au passage le fait que v_n est une intégrale impropre ?

Question 2 : obtention de résultats intermédiaires. Limite de $\dfrac{(\ln(x))^k}{x-1}$: penser à distinguer le cas $k = 1$. Convergence de l'intégrale : en 1 la question précédente permettait de conclure immédiatement. En 0 : sans indication, une partie des élèves a certainement séché. Après passage à l'équivalent, on pouvait faire une récurrence ou utiliser un $o(\frac{1}{\sqrt{x}})$. Taylor Lagrange sans problème pour qui connaissait sa formule.

Question 3 : recherche d'un équivalent de $u_n - \frac{1}{2}$. La majoration du a) n'était pas évidente sans indication (trouver quel "x" utiliser pour la formule de Taylor...) Obtention de l'équivalent sans difficulté, mais penser à justifier la non nullité des intégrales par lesquelles on divise.

Conclusion : exercice et méthodes classiques, quelques pièges de rédaction, deux questions (2b et 3a) un peu difficiles pour un public écricome.

Exercice 2 : Algèbre linéaire - fonction de plusieurs variables.

Question 1 : toute l'étude des valeurs et vecteurs propres de f est très classique, très guidée, sans difficulté pour un étudiant ayant assimilé le cours correspondant.

Question 2 : utilisation de l'unicité des H_n pour obtenir diverses relations. Ecriture d'un programme turbo Pascal très simple.

Question 3 : Recherche des points critiques d'une fonction de 3 variables en utilisant le polynôme H_3. Dans la question a) Les élèves auront-ils dérivé correctement le logarithme avec la valeur absolue ? Toute cette partie est longue et très calculatoire si on s'y prend mal (ce qui est souvent le cas de nos élèves...) et peut donc faire perdre beaucoup de temps.

Conclusion : La première moitié de l'exercice aura bien rapporté aux élèves sérieux, la deuxième moitié n'aura à mon avis été traitée que par les étudiants qui savent s'interroger sur la manière d'aborder les calculs avant de s'y lancer.

Problème : Etude de variables aléatoires discrètes.

Partie 1 : Question 1 : Deuxième programme turbo Pascal, à nouveau très simple. Etude d'une suite : très classique et sans difficulté.

Question 2 : étude de la loi de Gumbel. Une petite interrogation sur la mention "*variable aléatoire continue*", mais comme on parle tout de suite de densité dans la première question, cela n'a pas dû troubler outre mesure les candidats. Tout est très classique, seule la convergence de l'intégrale impropre est d'un niveau un peu relevé. De plus, il y a une imprécision de l'énoncé à ce niveau, qui dit "*pour tout entier* k", alors qu'il faudrait dire "*pour tout entier naturel* k". Pour les entiers strictement négatifs, l'intégrale diverge. Espérons qu'il n'y a pas de candidat qui a perdu du temps avec le cas $k < 0$.

Partie 2 : Question 1 : Étude du cas particulier $r = 3$. Bien guidé et sans grosse difficulté.

Question 2 : même commentaire.

Question 3 : espérance et variance : calculs sans difficulté. L'obtention du développement de $E(X_r)$ et de l'équivalent de $V(X_r)$ sont par contre assez théoriques pour des candidats écricome.

Partie 3 : Question 1 : a) il manque la précision "*k numéros distincts fixés*", si les élèves n'ont pas rectifié d'eux-mêmes, ils n'auront pas pu répondre à cette question. De toute façon beaucoup sont rebutés par la formule du crible et n'auront même pas cherché le b).

Question 2 : Obtention d'une majoration, le début s'obtient facilement, seule la fin du c) est corsée.

Question 3 : Cette partie est assez difficile pour des candidats écricome et a dû être rarement traitée.

Conclusion : Problème proposant des questions de difficulté variable, dont beaucoup sont abordables.

Ce sujet est bien construit par rapport à notre programme de concours : il aborde beaucoup de parties différentes du cours (on pourrait dire même qu'il y a de tout), avec certaines questions d'application directe du cours, d'autres nécessitant un peu plus de réflexion, et certaines (peu nombreuses heureusement) un peu trop théoriques pour le public visé. Son état d'esprit est également bien adapté à nos étudiants. Son principal défaut est d'être très (trop) long, mais si le barème est adapté, cela n'est pas forcément pénalisant pour un concours.
Dans les questions proposées, il y a largement de quoi occuper avec succès un étudiant moyen correspondant au profil écricome. Malgré ses petits défauts, ce sujet aura rempli de façon satisfaisante son rôle de sélection des candidats.

3.2 EM LYON 2010 voie S

Cette épreuve est constituée de deux problèmes qui font appel à un bon nombre de parties du programme de première et seconde année.

Problème 1 :

Partie I : Mise en place d'un certain nombre de résultats sur les matrices stochastiques (définition équivalente et résultats sur les valeurs propres d'une telle matrice).
Pas de difficulté dans cette partie qui permettait de commencer tranquillement l'étude. Malgré tout, certaines questions ont dû départager les candidats parce qu'elles demandaient un peu d'initiative (question 3.b.) ou parce qu'en fonction de la méthode de résolution adoptée, le candidat perdait plus ou moins de temps.

Partie II : Étude de la limite de suites de matrices stochastiques (moyennes et puissances de matrices). Des questions nécessitant d'avoir une bonne connaissance du cours d'algèbre linéaire et d'utiliser des résultats démontrés dans la partie précédente. Cette partie a dû permettre aux bons candidats de se démarquer.

Partie III : Un exemple d'application des résultats obtenus dans les deux parties précédentes à une expérience aléatoire. Pas de difficulté dans cette partie qui permettait aux candidats les plus faibles de traiter une partie des questions.

Problème 2 : Ce problème portait sur l'étude de la fonction f définie sur $]-1;+1[$ par : $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\mathrm{d}t$

Préliminaires : Préliminaires : Quelques résultats sur les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$

Partie I : Etude de la fonction f : domaine de définition, sens de variation, continuité, limites et équivalents. Les questions étaient de difficulté croissante mais assez classiques, mis à part la question 6 qui a dû dérouter un certain nombre de candidats.

Partie II : Etude de la dérivabilité de f et allure de la courbe représentative. Une partie relativement classique, mais dans laquelle les questions étaient posées sans indication. Cette partie a dû permettre aux meilleurs candidats de montrer leur aisance. La dernière question sur la courbe représentative de f est une très bonne question de synthèse de tout ce qui a été démontré sur la fonction f.

Cette épreuve est constituée de deux problèmes de longueur assez équilibrée, le premier portant principalement sur des notions d'algèbre linéaire et de probabilités discrètes, et le second portant sur de l'analyse. Le sujet, peut-être un peu long, fait principalement appel à des notions du programme de première année (algèbre linéaire, suites et séries, étude de fonctions, probabilités discrètes). Les intégrales impropres constituent la seule notion de seconde année abordée dans le sujet. Les deux problèmes sont d'une difficulté progressive. Ils comportent à la fois des questions simples ou proches du cours qui ont dû permettre de valoriser un travail sérieux, mais aussi des questions plus techniques comportant peu d'indications permettant aux meilleurs candidats de se démarquer. Notons que dans le premier problème, un certain nombre de questions ont dû départager les candidats du fait du temps perdu ou gagné selon la méthode de résolution choisie. Malgré la grande diversité d'écoles utilisant cette épreuve, le sujet de cette année a dû pouvoir jouer pleinement son rôle de sélection des candidats.

3.3 HEC 2010 voie S

Le problème a pour but l'étude d'un problème de Nash et d'un théorème de Hahn-Banach (séparation de deux convexes) sur des exemples.

Partie I : Projection sur un convexe fermé
Deux exemples suivis du cas général. Le premier exemple (projection sur un convexe qui n'est pas un sev) ne peut que dérouter les candidats, ce qui est malvenu pour un premier exemple. Il aurait fallu inverser b) et c), la figure pouvant aider les candidats. Si on n'a pas résolu b), on ne peut pas faire l'informatique : dommage ! L'exemple 1 aurait plus être choisi plus "simple" (la boule unité par exemple, qui était en lien avec II) et être placé après l'exemple 2.

Partie II : Un cas particulier

Il s'agit d'une projection sur un convexe fermé et on aboutit à une double inégalité de séparation de deux ensembles (convexes ?), notion définie dans l'énoncé pour deux convexes.

Partie III : Une séparation de deux convexes. On introduit un sous-ensemble, noté B_n, de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. On étudie un exemple, analogue à celui du II., mais ici on utilise la concavité de la fonction ln.

Partie IV : La solution de Nash. Maintenant on appelle *négociation* un certain type de convexe et *règle de partage* une application φ de B_n dans $\mathbb{R}^n$ vérifiant quatre axiomes. Dans ces derniers, apparaît une loi interne à $\mathbb{R}^n$, notée $\otimes$.

Ici, les notions introduites sont nettement hors de portée des étudiants de la filière. Quatre qualificatifs sont proposés pour ces axiomes dans le désordre et l'on doit les remettre dans l'ordre. Est-ce « questions pour un champion » ? Combien de candidats auront-ils abordé cette partie ?

L'énoncé, ne distinguant pas les théorèmes ou les résultats admis des définitions, manque de rigueur :
Peu de connaissances sont utiles : produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, projection orthogonale sur un sev, topologie de $\mathbb{R}^n$, calcul de dérivées partielles et extrema d'une fonction sur un compact, ce qui ne représente qu'une maigre partie du programme.
Les questions portant sur la nature topologique de sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ sont très contestables : Le programme précise qu'en topologie, "*aucune difficulté théorique ne sera soulevée*" et que "*la détermination de la nature topologique d'un ensemble n'est pas un objectif du programme ; elle devra toujours être précisée*". Un fermé y est défini comme complémentaire d'un ouvert, logique ignorée par le sujet : l'énoncé admet dans le préliminaire que l'image réciproque par une fonction continue d'un fermé est un fermé, mais ne dit pas si c'est vrai pour un ouvert. Ce résultat est introduit pour une utilisation dans les questions 1.a, 3.b, 13.a et 14.a, où on demande de prouver qu'une partie est fermée. Admettre la nature topologique de ces ensembles aurait été plus dans l'esprit du programme, c'est d'ailleurs ce qui est fait dans les questions 2.a et 7.a.
Par contre, ce sujet introduit beaucoup de notions, rappels et théorèmes (parfois faux) admis. Les élèves doivent s'imprégner rapidement de ces notions abstraites sans aucun moment de digestion possible : "inégalité" entre vecteurs, introduction des fonctions Ψ et H, signification des propriétés des ensembles K du III. Dans la question 13, ϕ^* est une application d'un sous ensemble de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathbb{R}^n$, le summum étant atteint dans IV où on jette sèchement qu'"*un élément K de $\mathcal{B}_n$ est interprété comme un problème de négociation*", les maigres explications qui suivent ne faisant qu'embrouiller la notion en parlant, toujours sans exemple, de "*gain*" et d'"*accord*", de "*règle de partage*"...
De plus, cet énoncé manque beaucoup de rigueur, et fourmille de maladresses :

- La définition d'une partie convexe est un "résultat"
- Il n'est pas clair que dans la définition de la séparation de deux convexes, ceux-ci ne sont pas interchangeables
- L'exemple 2, de la partie I, est illustré par un exemple dans $\mathbb{R}^4$, dont les calculs pouvaient être rebutants. Des calculs dans $\mathbb{R}^3$ auraient peut-être été suffisants.
- Il y a des questions faussement analogues : en 3.a), il faut "*justifier*" une continuité de f, en 7.a), il faut "*montrer*" que f est C^1... Quel niveau de réponse le candidat doit-il donner ? Certains candidats ont dû sérieusement se poser des questions !
- En 8, Ω est un ouvert... mais de $\mathbb{R}^{n-1}$, il aurait fallu le préciser.

- De plus, beaucoup d'hypothèses sont faites dans cette question 8, y compris l'existence de z^*... Sous cette réserve d'existence, on prouve alors l'unicité de z^*, et on calcule ses coordonnées. Mais alors, quelles hypothèses a-t-on sur z^* en 9a ? les hypothèses de la question 8 (existence) sont elles encore valables ? Ou bien faut-il démontrer l'existence d'un point critique ? Là encore, les « standards »de la rédaction d'un sujet sont ignorés.
- La propriété admise au début du III, avant la question 10, est fausse (contre-exemple des deux axes de $\mathbb{R}^2$). Elle ne sera utilisée que dans la question 15. Alors pourquoi ne pas admettre le résultat de cette question ?
- L'énoncé définit une fonction strictement concave de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, sans se référer aux fonctions convexes du programme officiel. Peut-on utiliser les théorèmes sur celles-ci ?

> Ce problème est très long, sans que ce soit un avantage pour les candidats. En effet, repérer les questions les moins difficiles n'était pas évident, cet énoncé souffrant de nombreux défauts. Trop peu de questions font appel à une connaissance et une bonne maitrise du programme. Ce problème permet de détecter seulement les candidats capables d'assimiler des notions nouvelles et abstraites, puis de les manipuler aussitôt, démarche beaucoup plus courante en prépa scientifique au niveau ENS qu'en ECS.
> Il y a eu un effort pour rechercher un thème original et adapté à la filière, mais le passage à l'obtention d'un sujet original et adapté a été globalement raté.
> Ce sujet semble inadéquat pour sélectionner de manière la plus fiable possible les 600 admissibles à HEC et encore moins les 1200 admissibles à l'ESCP.
> Espérons que les concepteurs ne se draperont pas dans leur dignité en refusant toute critique, et qu'ils offriront aux futurs candidats un sujet qui leur permette de défendre raisonnablement leurs chances.

3.4 EDHEC 2010 voie S

Comme d'habitude, ce sujet se compose de trois exercices et un problème. Mais ce problème comporte seulement deux parties (et un petit préliminaire) donc ce sujet semble, au premier abord, un peu moins long que celui de l'an dernier qui lui-même était plus court que celui des années précédentes.

Exercice 1 : *Fonctions de plusieurs variables, réduction des matrices.*

La difficulté essentielle de cet exercice réside dans le fait que la question 2 ne fournit pas la réponse à obtenir (les coordonnées des points critiques qui sont en nombre infini), cette réponse étant à utiliser dans plusieurs autres questions. Toutefois, la partie algébrique peut se traiter sans ce résultat. La réduction des matrices est très classique et très guidée. En question **4d**, on peut quand même conclure à l'existence d'un minimum local en exploitant davantage les sous-espaces propres de la matrice hessienne (la non possibilité de conclure résultant seulement du signe des valeurs propres). La question **5a** peut s'avérer perturbante à réutiliser en **5b** (« en déduire »), en effet, en développant et réduisant au même dénominateur l'expression de $f_2(x_1, x_2) - f_2(a, a)$, on obtient immédiatement le signe attendu. Enfin, la dernière question est un peu plus subtile pour les candidats non rodés à ce type d'astuce mais permettra certainement de classer les candidats.

Exercice 2 : *Algèbre linéaire et bilinéaire.*

On étudie, dans cet exercice, un endomorphisme symétrique d'une forme rencontrée de nombreuses fois au travers des sujets écrits ou oraux des années antérieures. Cet exercice se traite assez rapidement lorsqu'on connaît parfaitement son cours. On peut regretter que la question **4e** utilise un raisonnement déjà utilisé dans l'exercice 1, question **4c**.

Exercice 3 : *Variables aléatoires à densité.*
Exercice classique permettant de vérifier les connaissances du cours (loi par transfert, produit de convolution, calcul d'une espérance et d'une variance). Les résultats utiles pour avancer sont fournis régulièrement et permettent aux candidats les moins à l'aise dans les calculs de montrer leurs connaissances acquises en seconde année de préparation.

Problème : *Variables aléatoires discrètes, séries.*
Dans ce problème, comme l'an dernier, on définit une nouvelle notion de convergence des suites de variables aléatoires (la convergence complète) et on montre très aisément qu'elle implique la convergence en probabilité mais que la réciproque est fausse (la définition de la loi de Y_n étant assez mal formulée). Ensuite, on s'intéresse à un cas particulier censé établir une sorte de réciproque. Ici encore, les différents outils figurant au programme (sur les deux thèmes abordés) sont très largement testés. La fin de la partie **II** et notamment la question **II5**, un peu plus difficile sans être insurmontable, hormis **II5e**, devrait permettre de distinguer les très bons candidats. Élément troublant, il semble impossible de répondre à la dernière question à l'aide de ce qui a été démontré auparavant et donc on ne sait toujours pas si on peut établir la convergence complète à partir de la convergence en probabilité dans un cas particulier.

Ce sujet, de facture classique et de longueur très raisonnable, aborde la quasi totalité des thèmes figurant au programme des deux années et permet aux candidats sérieux mais non nécessairement brillants de s'exprimer pleinement. Il semble donc bien adapté au profil du candidat moyen de cette filière et correspond à ce qui avait été annoncé suite à la disparition de l'épreuve ESC. Le seul petit point noir est la question d'informatique qui est bien trop facile.

3.5 CCIP 2010 voie S

Partie I : Cinq questions indépendantes (suites séries, théorème de transfert, croissance de l'espérance, convergence en loi et en probabilité, densité d'une somme et de fonctions de variables aléatoires à densité) ; la difficulté est soutenue ; les résultats ne sont donnés que lorsqu'ils sont nécessaires à l'établissement du résultat final.

Notons que la dernière inégalité de **3.c** ne s'obtient directement qu'en procédant à des majorations intermédiaires bien choisies ; un candidat conduisant ses calculs " bêtement " obtient un majorant sous forme de fraction rationnelle, certes plus compliqué, mais tout aussi efficace pour ce qu'il faut faire ensuite (il est meilleur que celui demandé !). Pour trouver le majorant proposé, il faut fournir un travail supplémentaire non trivial tout à fait inutile.

Partie II L'hypothèse : " pour chaque $\alpha > 0$, X_α est indépendante de chacune des variables de la suite $(Y_k)_{k\geqslant 1}$ " apparaît comme insuffisante dès la question **7.b**. : en effet, de l'indépendance de X_t avec chaque variable $Y_1, \dots, Y_m$, on ne peut à priori inférer l'indépendance de X_t avec la somme $Y_1 + \cdots + Y_m$. Et comment justifier en **8.a** que $\frac{X_t}{X_t+Y_1}$ et Y_2 sont indépendantes ?

Pour répondre aux questions de cette partie dans des conditions raisonnables, il faudrait supposer par exemple que les variables X_{t+k}, $k \geqslant 0$ et Y_k, $k \geqslant 1$ sont mutuellement indépendantes.

Par ailleurs, en **8.a**, on admet que les variables $R_{t,k}$ $(k \geqslant 1)$ sont mutuellement indépendantes, mais on ne dit pas que les variables $R_{t,k}$ $(k \geqslant 1)$ et $X_t + S_n$ le sont, ce qui peut poser problème pour la résolution de **8.b**, en particulier si l'on se laisse guider par le " en déduire ". En fait la question **8.b** peut se résoudre sans utiliser l'indépendance des $R_{t,k}$ (qui sera utilisée en **9.d**) en notant que $\frac{X_t}{X_t+S_n}$ et $X_t + S_n$ sont indépendantes, donc leur logarithme aussi, et il suffit ensuite de décomposer $\ln\left(\frac{X_t}{X_t+S_n}\right)$.

Notons que l'on utilise de façon fondamentale dans les parties 2 et 3 le résultat suivant non explicitement au programme : " si X et Y sont indépendantes alors la loi de $X+Y$ ne dépend que des lois de X et de Y ". Ajouter ce résultat à la liste des résultats admis aurait eu l'avantage supplémentaire de guider les candidats vers un type de raisonnement peu courant dans nos classes.

Les questions **12** et **13** ne sont pas utiles à l'établissement du résultat final et ont sans doute été introduites pour augmenter le spectre des points du programme abordés. Le programme actuel définit un estimateur comme une simple statistique des variables W_1, W_2, …, W_p. Était-ce la réponse attendue des candidats à la question : " Justifier que la variable aléatoire G_p est un estimateur du paramètre μ " ?

Partie III Cette partie est consacrée à l'établissement de la formule de Wilks et Legendre et de la formule de Stirling (notons qu'une démonstration courte de la première formule est proposée dans l'exercice 1 d'oral d'analyse ESCP 2008).

La question **14.c**, question clé du problème, ne semble pas pouvoir être traitée en utilisant le résultat établi en **4.c** (attention aux pièges : si X et X' ont même loi, alors on ne peut affirmer à priori que $X+Y$ et $X'+Y$ ont même loi que lorsque X et Y d'une part, X' et Y d'autre part sont indépendants ; en particulier de l'hypothèse X et $Y+Z$ ont même loi, on ne peut inférer que $X-Z$ a même loi que Y).

On peut s'en sortir en modifiant le contenu de la question **4**. Par exemple le résultat suivant permet d'établir **14.c** : si pour tout n, M_n et N_n ont même loi, si (M_n) converge en probabilité vers M, (N_n) converge en probabilité vers N, alors M et N ont même loi.

Le sujet, consacré à la démonstration de quelques propriétés de la fonction Gamma par le biais de méthodes probabilistes était long, (41 questions), et, à l'image de ceux des années précédentes, de difficulté très soutenue, demandant une maturité mathématique hors d'atteinte des meilleurs candidats pour être résolu globalement dans le temps imparti.
On peut déplorer plusieurs défauts majeurs de conception :
• La seconde moitié du problème est fondée sur des manipulations à la fois inhabituelles et sophistiquées faisant intervenir la notion " avoir même loi " pour deux variables aléatoires sans que les hypothèses permettant ces manipulations ne soient explicitées.
• Les hypothèses d'indépendance données au début de la partie II sont insuffisantes, rendant problématique la résolution des questions qui suivent, alors même que ce caractère restrictif n'est pas nécessaire pour établir les résultats que le problème s'est assigné. Cela aura pu gêner les candidats entre autres dans la question **8.b**.
• La question **14.c**, question clé dans l'architecture du problème ne semble pas pouvoir être traitée correctement grâce aux outils mis en place dans la question **4.c**.
Au chapitre des points positifs, notons que des questions élémentaires de rappels de cours, et surtout le fait que le sujet comporte plusieurs questions totalement indépendantes sur des aspects variés du programme (suites séries, variables aléatoires à densité, convergence en probabilité et en loi, estimation) devraient permettre de départager correctement les bons et très bons candidats. Mentionnons également des questions d'algorithmique, sans difficultés techniques, mais demandant une bonne compréhension du cours de mathématiques.
Enfin, notons que le thème choisi (utilisation des probabilités pour montrer un résultat d'analyse) est indéniablement intéressant, mais on peut regretter que, depuis quelques années, cette épreuve ne propose plus la modélisation d'un phénomène régi par l'aléatoire et le risque.

3.6 ESSEC 2010 voie S

L'épreuve de mathématiques dont le concepteur est l'ESSEC n'est utilisée que par l'école ESSEC. Ce sujet est composé d'un problème en trois parties ; il étudie la solution bornée de l'équation différentielle $y' - ay + f = 0$ et l'opérateur U qui associe à la fonction f cette unique solution.
Dans ce problème, le chapitre des intégrales impropres est essentiellement abordé, il sera fait appel aussi aux connaissances d'algèbre linéaire et d'analyse de première année.
La première partie (un peu longue) commence par prouver l'existence et l'unicité de la solution bornée de l'équation différentielle $y' - ay + f = 0$ en utilisant surtout des notions sur les intégrales impropres et sur les fonctions bornées. Puis l'endomorphisme U est étudié ainsi que ses puissances faisant appel à des notions d'algèbre linéaire sans difficulté. Enfin après avoir montré une nouvelle expression de $U(f)$, la positivité de $U(f)$ et la dérivation de $U(f)$ sont regardées.
Dans la deuxième partie, des résultats préliminaires permettent de comparer $\displaystyle\int_x^{+\infty} \alpha(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_x^{+\infty} \beta(t)\mathrm{d}t$ quand α est négligeable devant β ou quand α et β sont équivalentes. Le sujet est détaillé, ne laissant pas normalement la possibilité aux candidats de faire des raisonnements

trop rapides ici. Les questions suivantes utilisent ces résultats préliminaires pour déterminer le comportement de $U(f)$ en $+\infty$ dans des cas particuliers.

Dans une troisième partie est étudiée la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} U(f)(t)\mathrm{d}t$. Cette partie ne présente pas de grandes difficultés mais était peut-être un peu plus délicate que les précédentes et permettait ainsi de distinguer un peu mieux les meilleurs candidats

> Ce sujet est tout à fait adapté et abordable par les élèves présentant l'école ESSEC. Pour réussir un tel problème, les candidats devaient avoir une maîtrise correcte du programme bien qu'ils soient très guidés. Certains raisonnements sont un peu répétitifs, en particulier beaucoup d'intégrations par parties sont à faire.

4 Option Technologique

4.1 ECRICOME 2010 voie T

Cette épreuve comporte trois exercices indépendants.

Exercice I : Le but de l'exercice, constitué de deux parties, est l'obtention du terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre trois (u_n) par utilisation du calcul matriciel. La première partie a pour objectif le calcul de M^n à l'aide d'une triangularisation guidée. La deuxième partie conduit à l'obtention du terme général u_n par les méthodes habituelles. L'exercice fait appel à une grande partie des connaissances sur le calcul matriciel, notamment l'inversion d'une matrice, et utilise par trois fois le raisonnement par récurrence.

L'énoncé est classique et ne présente pas de difficulté calculatoire particulière. Plusieurs résultats intermédiaires sont donnés, ce qui permet au candidat d'avancer dans la résolution ; cependant sans la matrice inverse le candidat ne peut calculer M^n et achever l'exercice.

Exercice II : L'exercice se décompose en trois parties :

Étude de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-x}$.

Étude des solutions positives de l'équation $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^*$.

Étude d'une variable aléatoire de densité f définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ f(x) \text{ si } x \geqslant 0 \end{cases}$.

Cet exercice permet de vérifier la connaissance et la maîtrise des principaux résultats du programme d'analyse dont les branches infinies, la convexité, le théorème de la bijection (les étapes nécessaires à son application étant bien détaillées) et l'intégration par parties sans laquelle la partie III (densité et fonction de répartition) ne peut être traitée.

On peut remarquer que l'exercice IV de l'épreuve ESC 2009 utilisait cette même densité, avec des variantes dans la méthode, et demandait le même calcul de probabilité conditionnelle.

Exercice III : Cet exercice de probabilités est constitué de deux parties indépendantes. La première partie, très simple et rapide, est une application directe du cours sur les lois binomiales et géométriques (expression de ces lois, espérances et variances). La deuxième partie, plus longue et calculatoire, étudie plusieurs lois de probabilité dont la loi d'un couple ; elle vérifie la capacité à établir une loi de probabilité, à calculer une espérance et une variance, à utiliser la linéarité de l'espérance, la variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes, à obtenir une loi marginale, à interpréter l'espérance.

Une rédaction parfaite suppose une bonne reconnaissance et manipulation des événements.

On peut regretter les notations des événements E_1, E_2, E_3, mal adaptées à la définition et source probable d'erreurs ; E_0, E_2, E_1 eussent été plus naturelles. Fort heureusement la donnée des probabilités de E_1 et E_3 dès la question 1. de la partie II, permettait à tout candidat de poursuivre l'exercice.

Quel était l'intérêt de distinguer les lancers simultanés (1er jeu) et les lancers successifs des deux dés (2ème jeu) ? Déstabiliser des élèves ? Cette seconde partie est plus délicate que la première, plus technique et conduit à des calculs peut-être trop nombreux en l'absence de calculatrice.

Aux réserves près sur la deuxième partie de l'exercice III , il s'agit d'une excellente épreuve, de longueur raisonnable, conforme au programme, couvrant une large partie de celui-ci. Elle doit permettre de départager les candidats et donner aux élèves sérieux une grande chance de réussir.

4.2 ESCP-Europe 2010 voie T

L'épreuve était constituée, comme chaque année depuis 2007, de 4 exercices indépendants, portant sur des thèmes recouvrant l'ensemble du programme : analyse (suites, fonctions, intégrales), calcul matriciel, probabilités discrètes et continues.

Exercice 1

Dans cet exercice, on étudie la suite (u_n) où $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+3x+2}dx$.

L'exercice est de difficulté très graduée, et s'achève par la démonstration de ce que $\lim_{n\to+\infty} nu_n = \frac{1}{6}$.
Des questions très similaires avaient été posées dans l'énoncé 2006, exercice **2**, et permettait à un élève ayant travaillé ce thème de tirer son épingle du jeu.

Exercice 2

L'exercice débutait par une partie de calcul matriciel portant sur des matrices carrées d'ordre 2, puis appliquait les résultats obtenus à l'étude d'une suite homographique.
En **1.c.**, la formule $A^n = (-2)^n I + \frac{1}{2}[4^n - (-2)^n] J$ était fournie par l'énoncé, qui demandait explicitement une preuve par récurrence. Cette preuve est déjà suffisamment technique, en effet, pour qu'on n'attende pas du candidat une utilisation de la formule du binôme de Newton.
Il est à noter qu'en **3.**, l'énoncé épargnait la justification, quelque peu pénible, de l'existence de la suite (u_n).

Exercice 3

L'exercice **3.** était consacré à l'étude d'une marche aléatoire simple.
Pour certaines questions, la rédaction pouvait paraître quelque peu laborieuse.
Par exemple, après avoir justifié en **1.** que "X_1 suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{3}$", il faut, en **2**.b., "montrer que l'ensemble $\{[X_1 = 1], [X_1 = 0]\}$ forme un système complet d'événements".
Que peut-on attendre du candidat, sinon répéter la définition de ce qu'est un système complet d'événements ?
En **3.**, déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X_n est clairement une question de rédaction délicate (récurrence...).
Le reste du problème n'a vraisemblablement été abordé valablement que par une minorité de candidat(e)s.

Exercice 4

L'exercice **4.** concernait des manipulations techniques sur les lois de certaines variables à densité, à partir de ce qui est connu sur la loi normale centrée réduite.
En **3.a.**, l'intégration par parties demandée, n'était, sans indication supplémentaire, à la portée que d'un petit nombre de candidat(e)s.

En **4.b.**, il aurait mieux valu formuler comme question "*en déduire que Y suit une loi exponentielle, dont on précisera le paramètre*". Il y a autant de "lois exponentielles" que de valeurs du paramètre.

En conclusion, l'épreuve recouvrait bien l'ensemble des grandes parties du programme. Les énoncés étaient progressifs, les questions plus délicates étant situées vers la fin des exercices, ce qui permettait à un candidat moyen de tirer son épingle du jeu, et aux meilleurs de briller. Globalement, l'épreuve paraît longue ; ceci n'est pas anormal, car il convient de tenir compte de ce que cette épreuve sert à sélectionner des candidats pour un grand nombre d'écoles, parmi lesquelles figurent les meilleures du tableau. L'épreuve paraît ainsi bien adaptée aux candidats de la voie technologique.

4.3 ESC 2010 voie T

L'épreuve est constituée de 4 exercices.

Exercice 1 : Calcul matriciel.
L'objectif est de déterminer les puissances d'une matrice A par la formule du binôme, l'inverse de A et l'expression en fonction de n du terme général de suites récurrentes $(x_n), (y_n)$ et (z_n) à l'aide de A^n .
Un exercice très classique sans difficulté particulière ni calculs excessifs. Quelques réserves :
- L'inversibilité de A ne nécessite pas la méthode du pivot de Gauss contrairement à ce que formule l'énoncé.
- L'utilisation du calcul matriciel est bien artificielle pour déterminer les suites. En effet, on obtient aisément : $z_n = 1, y_n = n+1$ et $x_n = x_{n-1}+n$ et par récurrence immédiate $x_n = x_0+\sum\limits_{k=1}^{n} k$ où $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ est un résultat du cours. De plus la donnée de $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ n+1 \\ 1 \end{pmatrix}$ au lieu de $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ ne simplifie nullement le raisonnement.

Exercice 2 : Suites récurrentes.

Question 1 : Étude de la suite donnée par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$ où f est définie sur $[0, 1]$ par $f(t) = t(1-t)$.
La fonction f est particulièrement simple et le candidat est parfaitement guidé dans le raisonnement pour montrer la convergence de la suite. La justification attendue à la question 1. (d) a dû déconcerter plus d'un élève, montrer que $l = 0$ suffisait amplement.

Question 2 : Étude de $S_n = \sum\limits_{0}^{n-1} u_k^2$ pour en déduire que la suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ où $p_k = 2u_k^2$ est une loi de probabilité. Un peu plus difficile mais encore abordable.

Exercice 3 : Couple de variables aléatoires discrètes
L'expérience consiste en le lancer d'un dé équilibré suivi d'un ou deux lancers d'une pièce équilibrée, le nombre de ces lancers étant conditionné par le résultat du dé. Il s'agit alors de

déterminer les lois des variables X et Y où X est égale au résultat du dé et Y le nombre de PILES obtenus, ainsi que la loi du couple (X, Y). Les questions sont simples, voire simplistes pour la loi de X, et bien détaillées.

Exercice 4 : Variables aléatoires continues.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \frac{t}{2}$ si $t \in [0, 2]$ et $f(t) = 0$ sinon.
Les premières questions permettent d'établir que f est une densité de probabilité d'une variable X dont on détermine la fonction de répartition et calcule l'espérance. La fonction f étant particulièrement simple, ces questions sont très faciles. Seule la formulation de la question 1. (d) : Justifier que $X(\Omega) =]0, 2]$, est atypique.
En dernière question on détermine la loi de $U = X^2$. Partie plus difficile mais tout à fait à la portée d'un élève sérieux compte tenu des questions intermédiaires.

Pour conclure, il s'agit d'un bon sujet, équilibré, recouvrant une grande partie du programme, et parfaitement adapté aux candidats de la voie technologique. Une réserve : ni la fonction ln ni la fonction exp n'apparaissent... Les étudiants sérieux ont l'opportunité de réussir correctement cette épreuve, les quelques questions plus difficiles devraient permettre aux meilleurs de faire la différence. Incontestablement ce sujet est dans l'esprit du programme de la voie technologique.

La commission de Mathématiques de l'APHEC