Rapport sur les épreuves de mathématiques des concours 2005 des classes préparatoires économiques et commerciales

APHEC

juin-septembre 2005

Ce document, public, est disponible sur le site de l'APHEC à l'adresse :

`http://www.int-evry.fr/aphec/enseignements/math/concours/2005-rapport-math.pdf`

Table des matières

Partie I
Option Economique

1 HEC 2005 option E math 3

Ecoles utilisant cette épreuve (coefficient) :
H.E.C. (4)

Le sujet comprend un exercice et un problème.

EXERCICE : Etude d'endomorphismes vérifiant l'équation $f \circ f = 4\,\mathrm{Id}$ dans un cas particulier (partie A) puis dans le cas général (partie B).
Le vecteur de $\mathbb{R}^2$ est noté en colonne contrairement à l'usage. Les techniques employée dans le A, qui devraient préparer le travail du B dans un cadre plus simple n'ont rien à voire avec celles du B. Les calculs (inutiliement lourds) à mener dans le cas particulier n'éclairent pas la suite de l'exercice;
Par contre, la partie B de l'exercice est meilleure même si nos élèves sont plus habitués à travailler sur des matrices que sur des endomorphismes.

PROBLEME : Etude du nombre de paires, ou de la première paire, obtenues dans des tirages avec ou sans remise.

Partie I : Loi de couple puis loi marginale.

Des calculs intéressants et des décompositions d'événements demandant de la rigueur.

1) Quel univers attend-t-on?

3)a) Pourquoi faire ici retrouver la loi Géométrique que l'on devait simplement donner à la question 1 b)

l'énoncé dit : "U la variable aléatoire égale à" et ne fais vérifier qu'ensuite qu'elle est bien définie presque surement !

3b) La loi conjointe n'est pas facile à obtenir, les erreurs y sont faciles, elle aurait pu être donnée pour permettre de traiter les questions suivantes.

Partie II : Cette partie s'appuie fortement sur le dénombrement qui est marginal dans le programme de ECE et donne lieu à des calculs d'une lourdeur rebutante.

1a) "L" univers ... il n'y aurait donc qu'une modélisation?

1c) Pour l'ensemble des valeurs prises par X_n, on voit à la question 1b) que les valeurs possibles ne sont pas toutes celles de l'intervalle [0,n] mais déterminer exactement les valeurs possibles est un réel problème sans indication. La question est d'ailleurs reposée au 4c) ! ! !

4b) inversion de 2 sommes finies, qui aurait mérité une indication.

Partie III : Partie consacrée principalement à la programmation.

Avec un questionnement bien adapté. Programmation. Cependant, les définitions de TYPE ne sont pas au programme.

"donner l'espérance et la variance d'une loi binomiale" ... question sans intérêt

La progression des difficultés est chaotique : des questions triviales suivant des calculs virtuoses.Il ne balaye qu'une petite part du programme. S'il permet d'éliminer les élèves qui ne sont pas brillants matheux, il n'est pas certain qu'il trie correctement ceux là ! Un point très positif : la présence de programmes PASCAL à faire et à comprendre. En conclusion : Le sujet est en grand partie inadapté aux élèves de ECE et d'une longueur excessive.

2 CCIP 2005 option E math 2

Ecoles utilisant cette épreuve (coefficient) :
H.E.C. (4) ESCP-EAP (3) E.M. LYON (2)

L'objectif du sujet est l'estimation du paramètre inconnu p d'une variable aléatoire suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Le sujet est divisé en 6 parties.

- Les deux premières parties traitent de la convergence et de la somme de deux séries $(\sum_{n\geqslant r}\binom{n}{r}x^n$ et $\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{n})$ via leurs sommes partielles respectives et le calcul intégral pour la seconde.
- La troisième partie étudie quelques fonctions d'une ou plusieurs v.a.r. indépendantes, de même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. En particulier, la loi binômiale négative est traitée.
- La quatrième et cinquième partie portent essentiellement sur le calcul intégral. Les estimations asymptotiques qui en découlent fournissent des résultats sur l'espérance et la variance d'un certain estimateur de $\frac{1}{p}$ étudié dans la troisième partie.
- La partie 6 concerne l'application des parties précédentes à l'explicitation d'un intervalle de confiance pour p suivi d'une application numérique.

> Le niveau de difficulté de ce sujet est convenable. Néanmoins, ce sujet porte sur une trop petite partie du programme et l'on regrette la sur-représentation du calcul intégral (presque la moitié du sujet ! !).

3 ESCP 2005 option E math 3

Ecoles utilisant cette épreuve (coefficient) :
ESCP-EAP (4)

Il est dommage qu'aucune question de programmation ne figure dans les épreuves de mathématique 2005 de l'ESSEC eco.

L'exercice : L'exercice porte sur la résolution d'équation d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie dans trois cas particuliers : $n = 2$, $u^2 = 0$, $n = 4$ (et de façon indirecte 2), $u^2 = -\mathrm{Id}$; puis fait l'étude d'un endomorphisme f de $\mathbb{R}_3[X]$ qu'on diagonalise. Les sous espaces propres E_0 et E_{-2} sont ici de dimension 2, puis on résout $u^2 = f$ en établissant que E_0 et E_{-2} sont stables par u.
En notant u_0 et u_{-2} les restrictions respectives de u à E_0 et E_{-2} on utilise les deux résultats précédents pour résoudre $u_0^2 = 0$ et $(2^{-1/2}u_{-2})^2 = -\mathrm{Id}$.

problème :

- Partie 1 : suite adjacente et théorème des suites alternées, application à la série harmonique alternée, et calcul de sa somme par intégration d'une somme
  - La première partie du problème part du cours sur les suites monotones et fait établir le théorème des séries alternées. En application, on établit la convergence de la série harmonique alternée.
    Le calcul de la somme de la série harmonique alternée est établi par intégration d'une somme géométrique, et majoration d'intégrale (reste).
  - La seconde partie est l'étude d'un jeu faisant intervenir des variables à valeurs dans $\mathbb{N}$.
- Partie 2 : Étude d'un jeu d'argent à deux personnes faisant intervenir une machine
  exercice de probabilité discrète, on demande de calculer une espérance qui n'existe pas. L'exercice fait appel au calcul de somme de séries (dominos) aux intégrales généralisées, majoration de l'intégrale d'une fonction sur un segment, intégration par partie, prolongement par continuité.
  Il y a pas mal de calcul dans cette partie et quelques astuces.

L'exercice fait appel à pratiquement tous les résultats essentiels d'algèbre linéaire, les calculs sont très raisonnables. Les élèves qui ne maîtrisent pas très bien leur cours d'algèbre linéaire ont sans doute eu des difficultés sur cet exercice.

Le problème était de difficulté progressive. Il fait intervenir

- presque la totalité du cours d'analyse sur les fonctions d'une variable, prolongement par continuité, intégrales généralisées, calcul de série, ainsi que quelques astuces.
- relativement peu de connaissance sur les probabilités discrètes, mais beaucoup de soins de rédaction.

Le tout constitue une épreuve sélective entre candidats ayant bien travaillé en mathématiques.

4 ESSEC 2005 option E math 3

Ecoles utilisant cette épreuve (coefficient) :
E.S.S.E.C (4)
Deux exercices indépendants.

Exercice 1 : Chaîne de Markov à deux points absorbants utilisant la réduction des matrices.

Exercice 2 : Intégrales impropres en vue du calcul de l'espérance et de la variance d'une variable à densité.

Deux exercices classiques pour l'ESSEC, bien rédigés, sans difficultés majeures, nécessitant toutefois de la rigueur, notamment dans le premier exercice où les indications suivies à la lettre, amènent le candidat à l'étude de nombreux cas. Par contre, l'exercice 2 est peut-être un peu trop directif. La longueur du sujet permet de bien sélectionner les candidats. De l'algèbre, de l'analyse et une bonne dose de probabilités discrètes et continues, une bonne partie du programme est balayé, même si les nouveaux points au programme ne sont pas abordés dans ce sujet.

5 ESSEC 2005 option E math 2

Ecoles utilisant cette épreuve (coefficient) :
E.S.S.E.C (4)
Deux points dans la partie II de ce devoir ont pu gêner des candidats :

- ≪ on admet que si $X \hookrightarrow \gamma(a)$; $Y \hookrightarrow \gamma(b)$ indépendantes,alors $E(XY) = E(X)E(Y)$ ≫.
  Ce résultat est insuffisant pour établir dans (partie II 5)c)) que
$$\forall s \in I, \quad E\left[\exp(s\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right))\right] = \prod_{k=1}^{n} E\left[\exp(s\left(\frac{X_k}{n}\right))\right] \quad \text{avec} \quad X_k \hookrightarrow \gamma(a)$$
- en partie II 5)c) il était nécessaire d'établir l'inégalité précédente avec $\frac{s}{n} \in I$ pour pouvoir répondre à partie II 9)a)

Résumé de l'épreuve

Préliminaires : loi faible des grands nombres une question d'application

Énoncé de la loi faible des grands nombres, et une application.

Partie I : on aborde ici trois méthodes de recherche d'un intervalle de confiance à un risque déterminé du paramètre p d'une loi de Bernoulli (cas d'une variable discrète)

Questions : 1-6) On établit le théorème des grandes déviations dans le cas d'une suite de variables de Bernoulli (convergence exponentielle vers p de la moyenne empirique d'une suite de variables de Bernoulli indépendantes de paramètre p) ce qui fait intervenir : des calculs de lois de v.a.r, des calculs sur des sommes, une étude de fonction, des majorations. (ce qui donne une première méthode pour obtenir un intervalle de confiance de p)

7) Calcul de biais de la moyenne empirique, du risque quadratique (ce qui donne une seconde méthode pour obtenir un intervalle de confiance de p via l'inégalité de B.T.)

8) Application du théorème de limite centrée à la détermination d'un intervalle de confiance de p paramètre d'une loi de Bernoulli au risque $1 - a$. (troisième méthode)

Partie II : On étudie une méthode empirique (grandes déviations) de recherche d'un intervalle de confiance à un risque déterminé du paramètre $a > 0$ d'une loi de Gamma $\gamma(a)$ (cas d'une variable à densité)

1-3 études de la fonction Γ puis de la loi $\gamma(a)$: intégrales généralisées variables à densité (assez facile et classique)

4-11 théorème des grandes déviations : pour la moyenne empirique d'une famille de variables aléatoires indépendantes de même loi $\gamma(a)$.

> Dans cette épreuve on passe en revue l'essentiel du cours sur la convergence de suite de v.a.r. et l'estimation d'une moyenne en probabilité. Les résultats n'ont pas tous été exploités (l'épreuve étant assez longue il n'était guère possible d'en rajouter).
> Les questions sont de difficultés variables et utilise des méthodes d'analyse (étude de fonction, somme, intégrales généralisée, inégalités), et permettent à la fois de tester les connaissances de cours et les savoirs faire des candidats.
>
> Cette épreuve est sélective et met en valeur les candidats qui ont des acquis solides en mathématiques.

6 EML 2005 option E math 1

Ecoles utilisant cette épreuve (coefficient) :
E.M. LYON (4) E.S.C. RENNES (3) E.S.C. CLERMONT (4) E.S.C. DIJON (3) E.S.C. LILLE (5) CERAM NICE (5) E.S.C. PAU (4) I.E.C.S. STRASBOURG (3) ESM DE ST.CYR (9) ESM DE ST.CYR (SEUL) (9)

On peut tout d'abord déplorer une erreur d'énoncé dans l'exercice 2 : dans la définition de $U(x)$, c'est l'unique solution de l'équation $\varphi_x(u) = \frac{1}{2}$ (et non pas 0). Cette erreur est évidente pour un candidat ayant un minimum de recul mais aura pu perturber des candidats plus faibles.

- Dans l'exercice 1, question 4, la recherche de la valeur propre de f demande des calculs conséquents pour ceux qui utilisent la méthode du pivot. Inciter les élèves à utiliser une autre méthode aurait été souhaitable.
- L'exercice 2 est complexe pour des élèves de la voie économique : $U(x)$ qui est solution d'une équation apparaît ensuite dans les bornes d'une intégrale... D'autre part au 7.d. l'allure de la courbe est demandée alors qu'aucune étude de la fonction n'a été effectuée. Qu'attend-on exactement comme justifications ?
- Dans l'exercice 3 question 1)d. Il aurait été souhaitable de donner des indications pour trouver la loi de S_n (en faisant écrire $(S_n = k)$ avec des événements ou par récurrence), la loi de Pascal n'étant pas au programme.

> Sujet qui comporte des questions délicates pour des élèves de la voie économique, le reste de l'épreuve étant d'un niveau raisonnable. Il est peut-être dommage que les nouveaux points du programme n'aient pas été abordés.

7 ECRICOME 2005 option E

Ecoles utilisant cette épreuve (coefficient) :
ESC BORDEAUX (5) EUROMED MARSEILLE (4) ICN NANCY (4) ESC REIMS (5) ESC ROUEN (5) ESC TOULOUSE (5)

Exercice 1 : Onze questions pour parvenir au résultat, cela fait beaucoup ! On aurait pu faire des regroupements par thèmes : les questions 2, 3 et 4 ensemble, de même pour 5, 6 et 7 puis 8, 9 et 10. Pourquoi, dans 4, interdire $n = 0$?

Exercice 2 : 2.1.8.d. Les deux équations ne sont pas équivalentes puisque d'ensembles de définition distincts.
2.2. La nature topologique de $\mathbb{R}^2$ n'est pas précisée. Il aurait suffi de dire que c'était un ouvert pour appliquer les théorèmes.

Exercice 3 : L'usage de p minuscule, à la fois pour la probabilité et celle de "pile" est très maladroit.

- 3.1.1. : Étant donné l'importance pour la suite des deux résultats demandés (somme et produit des racines), peut-être aurait-on pu les fournir ? Néanmoins, beaucoup de candidats les ont obtenus.
- 3.1.3. : La méticulosité que sous-entend cette question est atypique de ce qui se fait en lycée sur le trinôme. D'ailleurs, les candidats ne s'y sont pas trompés, qui n'y ont pas répondu !

- 3.2.2. : L'expression "*en remarquant*" fait qu'il n'y a rien à démontrer. La formulation de la question est, en outre, fort critiquable. Il aurait fallu donner un nom A'_n à l'événement "*On obtient* A_{n+2} *à l'issue d'un début par* PF" et demander d'établir que A'_n avait la même probabilité que A_n.
- 3.2.3. : La phrase est mal construite. On aurait pu préférer "*Écrire un programme en langage Pascal permettant, une fois l'entier* n *et les réels* p *et* q *donnés par l'utilisateur, de calculer* a_n".
- 3.2.5 : Quelle drôle d'idée de chercher un équivalent sous cette forme. Au demeurant, le résultat est inutile. D'ailleurs les candidats, décidément clairvoyants, n'ont pas répondu à la question.
- 3.4. : T n'est pas une application puisque les séquences où PP n'apparaîtrait jamais n'ont pas d'image. Certes, on vérifiait tout de suite que cet événement était quasi impossible, mais il aurait fallu déclarer que T était nulle (par exemple) dans ce cas.

Ce sujet, d'une longueur excessive, est de difficulté convenable, permettant de bien trier les candidats à Ecricome. Mais il comporte très peu de parties portant sur le programme de seconde année. Pas de questions sur la réduction (tout ou presque se fait par le calcul matriciel de première année), l'informatique est à dose homéopathique et il n'y a rien ni sur les variables à densité, ni sur l'estimation, élément pourtant essentiel du nouveau programme !

8 EDHEC 2005 option E

Ecoles utilisant cette épreuve (coefficient) :
E.S.C. AMIENS (2) E.S.C. GRENOBLE (7) E.S.C. MONTPELLIER (3) AUDENCIA NANTES (8) E.S.C.E.M. (6) I.E.C.S. STRASBOURG (2) E.S.L.S.C.A. (5) I.S.C. (3) I.N.S.E.E.C. (3) I.N.T. MANAGEMENT (6) E.N.A.S.S. OPT. MATH (3) E.D.H.E.C. (8)

Exercice 1 : Etude d'un endomorphisme de l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2, diagonalisation et calcul de la puissance n de sa matrice dans la base canonique. L'exercice est classique et très guidé. On pourrait reprocher au calcul de la puissance n de la matrice de ne pas avoir d'application, mais il semble inopportun d'augmenter la longueur du sujet.

Exercice 2 : Etude d'une fonction de deux variables. L'exercice propose d'abord la recherche d'un extremum local. Il est appréciable qu'ensuite il fasse démontrer que cet extremum est global. On aurait pu citer le terme de ≪ point critique ≫.

Exercice 3 : Etude d'une variable aléatoire à densité. Les techniques utilisées semblent un peu artificielles car l'espérance et la variance pouvaient être obtenues à partir de la première intégrale étudiée. Cependant, cela donnait aux candidats l'occasion de montrer leur aptitude à travailler sur les variables aléatoires à densité.

Problème : Etude du déplacement d'un mobile sur un axe, ce qui met en jeu une suite de variables aléatoires discrètes finies et une variable aléatoire discrète infinie. On apprécie que l'étude de leur loi soit complétée par un programme en Pascal qui simule l'expérience aléatoire. Le problème se termine par la détermination de l'espérance et de la variance qui donnent lieu à des calculs assez laborieux. Il est souhaitable que le temps passé sur ces calculs soit valorisé dans le barème.

Une bonne épreuve peut-être un peu longue, mais bien adaptée aux élèves de voie économique. Elle couvre en grande partie le programme des deux années sauf les développements limités. Un candidat ayant travaillé régulièrement et ayant bien assimilé le programme doit pouvoir le prouver au cours de cette épreuve.

9 ESC 2005 option E

Ecoles utilisant cette épreuve (coefficient) :
E.S.C. BREST (5) E.S.C. LE HAVRE (4) E.S.C. SAINT-ETIENNE (5) E.S.C. CHAMBERY (5) E.S.C. TROYES (5) E.S.C. LA ROCHELLE (5) I.S.C.I.D. (2)

Le sujet comporte 3 exercices.

- Le premier exercice traite la réduction d'un certain endomorphisme ainsi que un calcul de puissance n-ième de matrices.

- Le second exercice porte sur les fonctions d'une et deux variables réelles (étude des points critiques amenant à l'utilisation du théorème de bijection, manipulation de la notion de "solution d'une équation", calcul intégral)
- Le troisième exercice concerne l'étude probabiliste d'une pioche itérative dans une urne.

Sujet classique et varié, de longueur convenable, ne présentant aucune difficulté particulière et portant sur une large partie du programme des deux années. On regrettera seulement l'absence de la partie estimation et de l'algorithmique. Globalement, le sujet est de bonne qualité.

Partie II
Option Scientifique

10 HEC 2005 option S math 1

Ecoles utilisant cette épreuve (coefficient) :
H.E.C. (6)

Les deux premières parties de ce problèmes permettent de (presque) tout savoir sur la fonction Γ. Dans la partie I, on trouve une expression de $\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$. La partie II est consacrée à la dérivabilité de Γ, puis à l'étude de la fonction $\ln(\Gamma(x))$.

La partie III utilise ces résultats pour établir, par la méthode du maximum de vraisemblance, des formules d'estimateurs des deux paramètres d'une loi Γ.

Enfin, la partie IV étudie un estimateur sans biais de l'écart-type d'une loi normale centrée.

La partie I, très classique, commence très progressivement, ce qui permet au candidat de bien démarrer cette épreuve. Dès le début de la partie II, l'initiative est laissée au candidat dans la question 1 où le concepteur donne peu d'indications pour la dérivation sous le signe intégral.

Dans la question 2a, le premier encadrement est strict, il est surprenant de constater que l'énoncé se contente de $\gamma_n \leqslant 1$ alors que l'inégalité stricte était tout aussi facile à prouver.

L'abréviation *i.i.d.* est utilisée dans la partie III sans y être définie clairement, alors qu'elle l'est dans la partie IV. Le fait que les réels $x_1, \dots, x_p$ soient non tous égaux peut paraître surprenant comme hypothèse, même si il est quasi-certain que cela se produise. L'énoncé aurait pu être plus clair là dessus.

Dans la partie IV, les candidats avaient vraisemblablement déjà oublié γ la constante d'Euler de la partie II, et donc la notation γ de la loi de T (notation au programme) ne les a pas gêné.

Après avoir produit pendant plusieurs années des sujets trop ambitieux ou bien à la limite du programme, HEC nous a livré un sujet ambitieux mais réaliste. Certes le sujet est long, mais les thèmes abordés sont parfaitement dans l'esprit du programme, des questions de niveaux variés permettent de trier efficacement les candidats, la connaissance du cours était une condition nécessaire, mais non suffisante pour bien réussir cette épreuve. Un tel sujet est toujours améliorable, mais il convient parfaitement à cette épreuve

11 CCIP 2005 option S math 2

Ecoles utilisant cette épreuve (coefficient) :
H.E.C. (5) ESCP-EAP (4) E.M. LYON (3)

Partie I : *Calcul matriciel*
Pas de difficultés particulières. On étend les propriétés de l'espérance et de la variance à des variables aléatoires matricielles.

Partie II - A : *Algèbre bilinéaire et linéaire, moindres carrés et projection orthogonale pour construire une estimation, diagonalisation d'endomorphisme symétrique.*
Nécessite d'avoir bien compris le cours sur ces notions.

Partie II - B : *(estimation de a_1, a_2, ..., a_k et s_2) Étude d'un estimateur du vecteur a. C'est le meilleur au sens de la variance. Construction d'un estimateur de s_2.*
On se demande si la question 3 soit se déduire de A4°

Partie II - C : *suite d'estimateurs.*
La question 2 est la plus difficile et technique du problème, mais le résultat étant donné on peut facilement terminer et montrer la convergence de l'estimateur.

> Même si on travaille sur des variables aléatoires, réelles ou matricielles, ce problème reste essentiellement un problème d'algèbre linéaire et bilinéaire. Un des sujets les plus courts, pour un math II CCIP, mais de difficulté bien adaptée.
> La difficulté vient entre autres de la longueur de l'exposé du modèle linéaire, et de la maîtrise des notations. En résumé, nous estimons que ce sujet était conforme à l'esprit du programme et adapté à une "parisienne", il a donc dû remplir correctement son rôle de sélection.

12 ESCP 2005 option S math 1

Ecoles utilisant cette épreuve (coefficient) :
ESCP-EAP (6)

Ce problème en trois parties porte sur le programme de probabilité et d'analyse de première année. La première partie étudie un exemple de couple de variables aléatoires suivant une loi trinomiale, la deuxième partie étudie les lois marginales d'un tel couple et la troisième partie propose une caractérisation de la loi de Poisson.

La première partie comportant une question informatique est très classique et accessible à tous.

La difficulté de la deuxième partie réside essentiellement dans l'utilisation des sommes doubles et de la notion $(k, l) \in I_n$; à part cette difficulté, la partie est tout à fait abordable.

La troisième partie ne présente pas de grandes difficultés, mais a dû sûrement en dérouter beaucoup car le travail demandé sur les couple de variables aléatoires est en général très mal maîtrisé et compris. Les deux dernières questions sont essentiellement des questions d'analyse, peu classiques pour ces candidats, mais elles arrivent en fin d'épreuve. Cette troisième partie a pu permettre de départager les meilleurs candidats.

> Ce problème est intéressant, de longueur convenable et de difficulté progressive ; il n'a pas découragé et au contraire encouragé les candidats ayant bien travaillé pendant ces deux années et permis de distinguer les élèves ayant bien maîtrisé le programme de probabilité.

13 ESSEC 2005 option S math 1

Ecoles utilisant cette épreuve (coefficient) :
E.S.S.E.C (6)

Le sujet, composé de trois parties, étudie la transformation de Legendre d'une fonction f, c'est à dire la fonction, lorsqu'elle est définie, donnée par $f^*(y) = \max_{x \in U} \left(\langle x;\ y\rangle - f(x)\right)$.
La partie I traite le cas d'une fonction à une variable, puis dans la partie II, on se place dans certains cas particuliers de fonctions f à plusieurs variables. La partie III est consacrée à la présentation d'un algorithme de recherche de l'unique vecteur $\overline{x}$ réalisant le maximum de F_y.

Bien que la partie I ait pour ambition une approche "simple" du sujet avec le cas particulier de fonction à une variable, le candidat doit faire un effort non négligeable pour saisir le sens et la portée des notions et notations introduites. Il aurait peut être été possible d'adoucir un peu l'entrée en matière, sans pour autant diminuer les ambitions du sujet.

Le thème choisi imposait des notations diverses, il est dommage que la typographie utilisée ne soit pas toujours des plus agréables à l'oeil (pas d'italique pour annoncer un titre de question dans III.2, parenthèses et fractions mal proportionnées dans II.3.b, utilisation des symboles $\leq$ plutôt que $\leqslant$, ...).

La notation $\overline{z}$ dans la partie III n'est pas des plus heureuses, puisque cela ne peut que prêter à confusion avec la notation $\overline{x}$.

> Dans l'ensemble, ce sujet peut être tout à fait considéré comme un sujet adapté à l'épreuve. Le thème traité aborde une grande partie du programme, majoritairement celui de seconde année. On peut seulement regretter que ce problème n'ait pas une amorce de sujet plus progressive

14 ESSEC 2005 option S math 2

Ecoles utilisant cette épreuve (coefficient) :
E.S.S.E.C. (5)

Le problème porte sur la majoration des "queues de distribution" de la moyenne d'une suite de variables aléatoires normales ou de Bernoulli plus fine que celle donnée par l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev. Cette première étude est suivie d'un essai de généralisation.

C'est un thème classique et on peut regretter que le concepteur n'ait pas expliqué clairement dès le début les objectifs du problème. Le texte est bien structuré. Les questions sont claires et progressives.

Le début du problème comporte quelques calculs sur des probabilités et un peu de statistique. La fin est plus calculatoire.

Toutefois, la plupart de nos élèves, censés connaître et savoir démontrer la loi faible des grands nombres sont restés perplexes devant la question leur demandant de citer cette loi pour une suite de variables aléatoires n'admettant pas de variance . . .

Etait-ce un piège? Une erreur du concepteur? Nous sommes maintenant malheureusement habitués, venant de l'ESSEC à des énoncés approximatifs !

De même, au début de la partie III, on demande au candidat de calculer la fonction φ associée à une variable X qui n'a pas été définie. Bien sûr, le candidat peut comprendre mais le texte n'est pas précis.

Dans la partie IV question 6, il faut deviner que m désigne l'espérance de X.

> En résumé, le problème est long et la fin est trop technique mais les résultats obtenus sont intéressants. On peut regretter l'absence de raisonnements probabilistes et déplorer les imperfections du texte.

15 EML 2005 option S math 1

Ecoles utilisant cette épreuve (coefficient) :
E.M. LYON (6) E.S.C. AMIENS (5) E.S.C. RENNES (5) E.S.C. CLERMONT (5) E.S.C. DIJON (5) E.S.C. LILLE (5) E.S.C. MONTPELLIER (3) CERAM NICE (7) E.S.C. PAU (4) I.E.C.S. STRASBOURG (3)

Comme d'habitude, le sujet comportait deux problèmes.

Problème 1 : *Étude des polynômes de Tchebicheff.*

Dans la première partie, on étudie les racines de ces polynômes il aurait été souhaitable de préciser racines distinctes dans le 4)b La troisième partie manque un peu d'ambition : la notion d'endomorphismes symétriques est au programme...

Problème 2 : Calcul de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, puis étude de la fonction S définie sur $\mathbb{R}^+$ par $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$ (continuité, dérivabilité et équivalent)

Le début est très classique, avec comme dans le problème 1 une utilisation des formules de trigonométrie. Dans la partie 2, la question sur la concavité n'a pas d'intérêt et dans le 6) pourquoi avoir fixé x ? La partie II n'est pas de difficulté progressive. Les questions de la fin du problème sont plus simples.

> Comme les autres années, cette épreuve reste très proche des exercices types traités en cours et doit permettre de valoriser le travail des élèves. On peut alors, dans cette optique, regretter que le programme de deuxième année ne soit presque pas abordé.

16 ECRICOME 2005 option S

Ecoles utilisant cette épreuve (coefficient) :
EUROMED MARSEILLE (5) ESC BORDEAUX (6) ESC REIMS (5) ESC ROUEN (7) ESC TOULOUSE (5) ICN NANCY (5)

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème

Exercice 1 : Étude d'une famille de matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dépendant de trois paramètres et simultanément diagonalisables. Application à la recherche du maximum d'une fonction de 3 variables, et à la résolution de l'équation matricielle $B^2 = M$

Exercice très classique, ce qui ne signifie pas "bateau". On aurait pu peut être présenter l'ensemble des matrices $M(a, b, c)$ comme un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Exercice 2 Etude de la suite définie par $u_0 \geqslant 0$ et $u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$

Exercice d'analyse faisant appel à relativement peu de connaissances du cours, mais où les techniques de majorations/minorations sont à l'honneur.

Problème Partie I Etude de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^\alpha}$ et calcul de cette intégrale pour n entier naturel non nul.

Partie II : Loi de Student à n degrés de liberté

Partie III : Simulation informatique de la loi de Cauchy

Partie IV : Obtention d'une loi de Cauchy à partir de lois normales

On peut regretter que le contexte de la partie III n'ait pas été illustré par un dessin, cela a pu être un point de blocage inutile pour bon nombre de candidats. La syntaxe PASCAL, bien que très bizarre, a été vraisemblablement sans incidence mathématique dans les copies, mais comment exiger des candidats une syntaxe correcte si un effort constant n'est pas fait de la part des concepteurs. L'image de manque de sérieux peut tenir à ce genre de détail.

Le sujet est dans l'ensemble très équilibré, la connaissance du cours, mais aussi des techniques classiques voire la culture générale mathématique étaient valorisés ici. Le sujet a dû parfaitement remplir sa mission

17 EDHEC 2005 option S

Ecoles utilisant cette épreuve (coefficient) :
E.S.C. GRENOBLE (8) AUDENCIA NANTES (8) E.S.C.E.M. (6) I.E.C.S. STRASBOURG (2) E.S.L.S.C.A. (6) I.S.C. (4) I.N.S.E.E.C. (4) I.N.T. MANAGEMENT (7) E.N.A.S.S. OPT. MATH (3) E.D.H.E.C. (8)

Sans grande difficulté ni viruosité technique, les trois exercices et le problème permettent de balayer largement le programme des deux années. Les questions, précisément rédigées, sont globalement bien amenées. Elles permettent une bonne appréciation de la maîtrise des concepts fondamentaux du cours (diagonalisation, v.a.r., séries, extrema et simulation). Les concepteurs ont tenu compte de l'évolution du programme, avec une part belle à la simulation dans le problème. On apprécie de plus la taille raisonnable du sujet, traitable intégralement par les meilleurs candidats.

18 ESC 2005 option S

Ecoles utilisant cette épreuve (coefficient) :
E.S.C. BREST (7) E.S.C. LE HAVRE (7) E.S.C. SAINT-ETIENNE (5) E.S.C. CHAMBERY (5) E.S.C. TROYES (5) E.S.C. LA ROCHELLE (5) I.S.C.I.D. (2)

Exercice 1 : *Quelques propriétés des éléments d'un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Les questions 1 à 5 ne posent aucun problème particulier puisqu'elles sont classiques, progressives et bien guidées. Les candidats ayant assimilé normalement le cours et la pratique de la diagonalisation devraient donc s'y sentir à l'aise.

La question 6 quant à elle, s'avère bien peu intéressante. Elle introduit pour conclure l'exercice, la forme bilinéaire symétrique associée à l'une des matrices du sous-espace vectoriel étudié précedemment. Les calculs demandés sont fastidieux et répétitifs et débouchent au final sur un produit scalaire exotique dépourvu du moindre intéret.

Exercice 2 : *Extrema d'une fonction de trois variables réelles définie par une intégrale impropre*

L'idée d'étudier une fonction de trois variables réelles définie par une intégrale impropre est à priori louable, mais là aussi, la surabondance de coefficients et de constantes inutiles au sein même de l'intégrale est à même de décourager d'emblée le candidat moyen fatigué des calculs de l'exercice précédent.

Le calcul des dérivées partielles premières et secondes, puis des points critiques de la fonction sera donc forcément pénible voire décourageant et oblige ainsi le concepteur à donner tous les résultats dans l'énoncé.

Il est regrettable également que la fin de cet exercice ressemble un peu trop à celle de l'exercice 1.

En revanche, cette étude a le mérite de couvrir une grande partie du programme de seconde année en donnant ainsi l'occasion à chacun de montrer l'étendue de ses connaissances.

Exercice 3 : *Suite de tirages dans une urne à trois couleurs*

Cet exercice, bien que de facture plutôt classique, s'avère intéressant en ce sens qu'il utilise la notion nouvellement intégrée au programme cette année qu'est l'espérance conditionnelle. Cela est très positif.

Malheureusement, deux points sont à déplorer :

1. La conclusion concernant le comportement asymptotique de l'espérance de la variable aléatoire comptabilisant les boules rouges présentes dans l'urne est triviale dès le début, à la simple lecture du protocole de tirage. Un candidat ayant réfléchi quelques secondes sur cette expérience est donc à même de donner tout de suite la réponse et donc de se demander légitimement s'il est bien raisonnable de dépenser tant d'énergie pour une telle évidence...
2. Les questions sont ici beaucoup trop guidées : la méthode et le résultat sont donnés même lorsqu'il s'agit de banales questions de cours telles que la recherche de l'expression du terme général d'une suite arithmético-géométrique. Rappelons que l'étude de ces suites fait partie du cours de première année.

> Cette épreuve nous a semblé tout à fait faisable dans le temps imparti et raisonnable dans la difficulté des questions posées. De plus, mis à part le Turbo-Pascal, elle couvre l'ensemble du programme de seconde année et la faible proportion d'un exercice sur trois pouvant presque être traité par un élève de première année est certainement une bonne chose.

Partie III
Option Technologique

19 CCIP 2005 option T math 2

Ecoles utilisant cette épreuve (coefficient) :
H.E.C. (5) ESCP-EAP (5) EM. LYON (3)

L'épreuve est composée de deux exercices ce qui le distingue des autres sujets.

Exercice N°1 : Etude de propriétés des nombres $\binom{n}{k}$. Somme de deux variables binomiales indépendantes

Notions utilisées : Formule du binôme et dénombrement. Probabilité conditionnelle, loi conjointe, covariance etc. . . .

Exercice N°2 : Etude de la valeur actualisée d'un projet d'investissement et du taux de rentabilité.

Notions utilisées : Fonctions rationnelles, racine d'une équation, intégrale, encadrement, suite.

COMMENTAIRES

- Le premier exercice est très théorique, nécessite un niveau d'abstraction et de maîtrise des raisonnements dignes d'un élève de classe scientifique.
- Le deuxième exercice est dans le même esprit. On y dénombre au moins treize notations (variables, fonctions et paramètres)

> En conclusion, la seule lecture des énoncés a dû décourager la majorité des étudiants. Le sujet n'est pas adapté à la voie technologique, il ne permet pas de vérifier la bonne assimilation du programme et de tester les facultés de raisonnement des candidats.

20 ESSEC 2005 option T math 2

Ecoles utilisant cette épreuve (coefficient) :
E.S.S.E.C. (5) E.S.C. RENNES (3) E.S.C. CLERMONT (2) E.S.C. DIJON (2) E.S.C. GRENOBLE (8) E.S.C. LILLE (4) AUDENCIA NANTES (3) CERAM NICE (4) E.S.C.E.M. (3) I.E.C.S. STRASBOURG (3) I.N.T. MANAGEMENT (4) E.D.H.E.C (5)

Le sujet comporte trois exercices d'importances inégales, le troisième étant un peu plus long que les deux premiers.

Exercice N°1 : Calcul matriciel

Notions utilisées : Calcul des puissances nièmes d'une matrice à l'aide de la formule du binôme, calcul de l'inverse d'une matrice

Exercice N°2 : Etudes des fonctions définies par : $f(x) = x + \ln x$ et $g(x) = \frac{x - \ln x}{2}$ et convergence d'une suite récurrente associée à g

Notions utilisées : Fonctions avec logarithme, existence et encadrement de la solution d'une équation, inégalité des accroissements finis, raisonnement par récurrence.

Exercice N°3 : Probabilités avec tirages de boules dans une urne, démonstration de certaines propriétés des coefficients $\binom{n}{k}$

Notions utilisées : Propriétés des factorielles, combinaisons, somme $1 + 2 + \ldots n$, loi de Bernoulli, covariance, propriétés de la variance et de l'espérance.

COMMENTAIRES

- Les deux premiers exercices sont tout à fait classiques bien dans l'esprit d'une prépa technologique.
- L'exercice 3 est très intéressant (pour un enseignant) et constitue un excellent exercice de recherche et d'application du programme de première année mais n'est pas adapté à la sélection des candidats. Il semble un peu trop théorique pour une épreuve de concours et il aurait été bon de commencer par des cas particuliers n=2, n=3, pour mettre le candidat en confiance avant de traiter le cas n quelconque.

> En conclusion, c'est un sujet satisfaisant, globalement de difficulté normale où les candidats pouvaient bien s'exprimer.

21 ECRICOME 2005 option T

Ecoles utilisant cette épreuve (coefficient) :
ESC BORDEAUX (4) ESC MARSEILLE (5) ICN NANCY (3) ESC REIMS (4) ESC ROUEN (4) ESC TOULOUSE (4)
Le sujet comporte trois exercices d'importances sensiblement égales.

Exercice N°1 : Etude de la fonction définie par : $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 2x$ et de la convergence d'une suite récurrente associée.

Notions utilisées : étude de fonction logarithme, parité, convexité, raisonnement par récurrence, inégalité des accroissements finis.

Exercice N°2 : Calcul des puissances nièmes d'une matrice à l'aide de suites récurrentes applications aux suites.

Notions utilisées : calcul matriciel, raisonnement par récurrence, suites géométriques, sommes des termes d'une suite géométrique, limites de suites.

Exercice N°3 : Probabilités dans la situation d'un sondage.

Notions utilisées : loi binomiale, loi géométrique, probabilité conditionnelle, étude d'une variable aléatoire de densité de probabilité f définie par $f(x) = xe^{-x}$ pour x positif ou nul, calcul de l'espérance et de la variance.

COMMENTAIRES

- Les exercices 1 et 2 sont bien guidés et sans surprise pour des étudiants bien préparés (on note l'apparition de la convexité, bien dans l'esprit du nouveau programme).
- Pour l'exercice 3, trois remarques :
  - Le terme « sondage » ne précisait pas si une même personne pouvait être interrogée plusieurs fois.
  - La notation de la probabilité conditionnelle n'est pas conforme au nouveau programme
  - On aurait pu demander, à la question 3 e) de calculer l'espérance et la variance « à l'aide d'une intégration par parties », ce qui aurait permis aux étudiants qui savent faire ces calculs de se valoriser.

> Sujet dans l'ensemble très classique, de difficulté et longueur normales comme on peut attendre d'un sujet de concours pour la voie technologique, en un mot un bon sujet.

22 ESC 2005 option T

Ecoles utilisant cette épreuve (coefficient) :
E.S.C. AMIENS (3) E.S.C. BREST (5) E.S.C. LE HAVRE (5) E.S.C. MONTPELLIER (5) E.S.C. PAU (6) E.S.C. SAINT-ETIENNE (4) E.S.C. CHAMBERY (4) E.S.C. TROYES (4) E.S.C. LA ROCHELLE (4) E.S.L.S.C.A. (6) I.S.C. (3) I.N.S.E.E.C. (5)

Le sujet comporte trois exercices .

Exercice N°1 : Puissance d'une matrice et probabilité.

Notions utilisées : Pivot de Gauss, probabilité conditionnelle, formule des probabilités totales.

Exercice N°2 : Etude de fonction et probabilité.

Notions utilisées : Fonction exponentielle, parité, densité de probabilité, intégrale impropre.

Exercice N°3 : Egalité $E(X) = \sum P(X \geqslant k)$

Notions utilisées : loi binomiale, union d'événements incompatibles, probabilités composées, somme des termes d'une suite géométrique.

COMMENTAIRES

- Les deux premiers exercices sont très classiques parfaitement adaptés au programme . Un étudiant sérieusement préparé est en mesure d'aborder l'ensemble des questions .
- L'exercice 3 est un peu plus atypique et demande un peu de réflexion pour utiliser les méthodes habituelles.

En conclusion un bon sujet, globalement très équilibré.

La commission de Mathématiques de l'APHEC