Jean-François COSSUTTA. Lycée Marcelin Berthelot Saint Maur 94. jean-francois.cossutta@wanadoo.fr

LYON 2004

PREMIER PROBLÈME

PARTIE I - Étude de la fonction $x \to \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t$

1. a. Notons que la fonction $u \to \dfrac{\sin u}{u}$ est continue sur $]0, +\infty[$. Soit x un élément de $]0, +\infty[$.

Les fonctions $u \to \dfrac{1}{u}$ et $u \to -\cos u$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, une intégration par parties simple donne :

$F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u = \int_1^x \frac{1}{u}\sin u\,\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{u}\,(-\cos u)\right]_1^x - \int_1^x \left(-\frac{1}{u^2}\right)(-\cos u)\,\mathrm{d}u.$

Ainsi $F(x) = -\dfrac{\cos x}{x} + \cos 1 - \displaystyle\int_1^x \frac{\cos u}{u^2}\,\mathrm{d}u.$

$$\boxed{\forall x \in]0, +\infty[,\ F(x) = -\frac{\cos x}{x} + \cos 1 - \int_1^x \frac{\cos u}{u^2}\,\mathrm{d}u.} \quad (1)$$

$\forall x \in]0, +\infty[,\ 0 \leqslant \left|\dfrac{\cos x}{x}\right| \leqslant \dfrac{1}{x}\cdot$ Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, il vient par encadrement : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$.

Ainsi $x \to -\dfrac{\cos x}{x} + \cos 1$ admet une limite finie en $+\infty$. L'égalité (1) autorise alors à dire que F admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si $x \to \displaystyle\int_1^x \frac{\cos u}{u^2}\,\mathrm{d}u$ admet une limite finie en $+\infty$; autrement dit si et seulement si $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u^2}\,\mathrm{d}u$ converge.

Or $\forall u \in]0, +\infty[,\ 0 \leqslant \left|\dfrac{\cos u}{u^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{u^2}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u$ converge ; les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives donnent alors la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos u}{u^2}\right|\mathrm{d}u$.

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u^2}\,\mathrm{d}u$ est absolument convergente donc convergente. Ceci achève de montrer que :

$$\boxed{F : x \to \int_1^x \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u \text{ admet une limite finie en } +\infty \text{ donc que } \int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u \text{ converge}}.$$

Dans la suite $\alpha = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$. On a encore : $\alpha = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u.$

b. Notons que la fonction $u \to \dfrac{\cos u}{u}$ est continue sur $]0, +\infty[$. Soit x un élément de $]0, +\infty[$.

Les fonctions $u \to \dfrac{1}{u}$ et $u \to \sin u$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, une intégration par parties simple donne :

$G(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u = \int_1^x \frac{1}{u}\cos u\,\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{u}\left(\sin u\right)\right]_1^x - \int_1^x \left(-\frac{1}{u^2}\right)\sin u\,\mathrm{d}u.$

Ainsi $\forall x \in]0,+\infty[,\ G(x) = \dfrac{\sin x}{x} - \sin 1 + \displaystyle\int_1^x \frac{\sin u}{u^2}\,\mathrm{d}u \quad (2).$

$\forall x \in]0,+\infty[,\ 0 \leqslant \left|\dfrac{\sin x}{x}\right| \leqslant \dfrac{1}{x}\cdot$ Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, il vient par encadrement : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$

Ainsi $x \to \dfrac{\sin x}{x} - \sin 1$ admet une limite finie en $+\infty$. L'égalité (2) autorise alors à dire que G admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si $x \to \displaystyle\int_1^x \frac{\sin u}{u^2}\,\mathrm{d}u$ admet une limite finie en $+\infty$; autrement dit si et seulement si $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u^2}\,\mathrm{d}u$ converge.

Or $\forall u \in]0,+\infty[,\ 0 \leqslant \left|\dfrac{\sin u}{u^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{u^2}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u$ converge ; les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives donnent alors la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin u}{u^2}\right|\mathrm{d}u.$

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u^2}\,\mathrm{d}u$ est absolument convergente donc convergente. Ceci achève de montrer que :

$$\boxed{G : x \to \int_1^x \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u \text{ admet une limite finie en } +\infty \text{ donc que } \int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u \text{ converge}}.$$

Dans la suite $\beta = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} G(x)$. On a encore : $\beta = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u.$

Remarque *On peut aisément faire a. et b. simultanément en montrant que* $x \to \displaystyle\int_1^x \frac{\sin(u+b)}{u}\,\mathrm{d}u$ *admet une limite finie en* $+\infty$ *et en donnant à* b *successivement les valeurs* 0 *et* $\dfrac{\pi}{2}$ *!*

c. Soit x un réel strictement positif.

Répétons que $u \to \dfrac{\sin u}{u}$ et $u \to \dfrac{\cos u}{u}$ sont continues sur $]0,+\infty[$.

Par conséquent les intégrales $\displaystyle\int_x^1 \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_x^1 \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u$ existent.

Or les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u$ convergent.

Ainsi les intégrales $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u$ convergent également.

De plus $\alpha - F(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u - \int_1^x \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u = \int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u + \int_x^1 \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u = \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u.$

De même $\beta - G(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u.$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ strictement positif } \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u \text{ et } \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u \text{ convergent.}}$$

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u = \alpha - F(x) \text{ et } \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u = \beta - G(x).}$$

2. a. Soient x et T deux réels strictement positifs. Le changement de variable $u = t + x$ donne sans difficulté : $\displaystyle\int_0^T \frac{\sin t}{t+x}\,\mathrm{d}t = \int_x^{x+T} \frac{\sin(u-x)}{u}\,\mathrm{d}u = \int_x^{x+T} \frac{\sin u\,\cos x - \cos u\,\sin x}{u}\,\mathrm{d}u$. Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ \forall T \in]0,+\infty[,\ \int_0^T \frac{\sin t}{t+x}\,\mathrm{d}t = \cos x \int_x^{x+T} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u - \sin x \int_x^{x+T} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u.}$$

b. Soit x un réel strictement positif. $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u$ convergent donc :

$$\lim_{T\to+\infty} \left(\cos x \int_x^{x+T} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u - \sin x \int_x^{x+T} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u \right) = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u.$$

Alors $\displaystyle\lim_{T\to+\infty} \int_0^T \frac{\sin t}{t+x}\,\mathrm{d}t = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u$. Par conséquent :

$$\boxed{\text{pour tout réel } x \text{ strictement positif, } \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,\mathrm{d}t = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u.}$$

3. $\displaystyle\forall x \in]0,+\infty[,\ A(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,\mathrm{d}t = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u.$

Ainsi $\forall x \in]0,+\infty[,\ A(x) = \big(\alpha - F(x)\big)\cos x - \big(\beta - G(x)\big)\sin x$.

F (resp. G) est la primitive sur l'intervalle $]0,+\infty[$ de la fonction continue $u \to \dfrac{\sin u}{u}$ (resp. $u \to \dfrac{\cos u}{u}$) qui prend la valeur 0 en 1. Ainsi F et G sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

De plus $\forall x \in]0,+\infty[,\ F'(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ et $G'(x) = \dfrac{\cos x}{x}\cdot$

F' et G' sont clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ donc F et G sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.

F, G, cos et sin sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ donc $A = (\alpha - F)\cos - (\beta - G)\sin$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.

$$\boxed{A \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]0,+\infty[.}$$

Soit x un élément de $]0,+\infty[$. $A'(x) = -F'(x)\cos x + \big(\alpha - F(x)\big)(-\sin x) - \big(-G'(x)\big)\sin x - \big(\beta - G(x)\big)\cos x$.

Notons alors que $-F'(x)\cos x - \big(-G'(x)\big)\sin x = -\dfrac{\sin x}{x}\cos x - \Big(-\dfrac{\cos x}{x}\Big)\sin x = 0$.

Ainsi $A'(x) = \big(\alpha - F(x)\big)(-\sin x) - \big(\beta - G(x)\big)\cos x = \big(F(x) - \alpha\big)\sin x + \big(G(x) - \beta\big)\cos x$.

Alors $A''(x) = F'(x)\sin x + \big(F(x) - \alpha\big)\cos x + G'(x)\cos x + \big(G(x) - \beta\big)(-\sin x)$.

Ce qui donne $A''(x) = \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)\sin x - \big(\alpha - F(x)\big)\cos x + \left(\dfrac{\cos x}{x}\right)\cos x + \big(\beta - G(x)\big)\sin x.$

Donc $A''(x) = -\Big(\big(\alpha - F(x)\big)\cos x - \big(\beta - G(x)\big)\sin x\Big) + \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{x} = -A(x) + \dfrac{1}{x}\cdot$

Ce qui donne $A(x) + A''(x) = \dfrac{1}{x}\cdot$

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ A(x) + A''(x) = \frac{1}{x}\cdot}$$

4. $\forall x \in]0,+\infty[,\ A(x) = \big(\alpha - F(x)\big)\cos x - \big(\beta - G(x)\big)\sin x.$

Alors $\forall x \in]0,+\infty[,\ |A(x)| = \big|\big(\alpha - F(x)\big)\cos x - \big(\beta - G(x)\big)\sin x\big| \leqslant |\alpha - F(x)|\,|\cos x| + |\beta - G(x)|\,|\sin x|.$

Donc $\forall x \in]0,+\infty[,\ 0 \leqslant |A(x)| \leqslant |\alpha - F(x)| + |\beta - G(x)|.$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(\alpha - F(x)\big) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(\beta - G(x)\big) = 0$ il vient par encadrement $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x) = 0.$

De même $\forall x \in]0,+\infty[,\ A'(x) = \big(F(x) - \alpha\big)\sin x + \big(G(x) - \beta\big)\cos x$ donc :

$\forall x \in]0,+\infty[,\ |A'(x)| = \big|\big(F(x) - \alpha\big)\sin x + \big(G(x) - \beta\big)\cos x\big| \leqslant |F(x) - \alpha|\,|\sin x| + |G(x) - \beta|\,|\cos x|.$

$\forall x \in]0,+\infty[,\ 0 \leqslant |A'(x)| \leqslant |F(x) - \alpha| + |G(x) - \beta|.$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(F(x) - \alpha\big) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(G(x) - \beta\big) = 0$ il vient par encadrement $\lim\limits_{x\to+\infty} A'(x) = 0.$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} A(x) = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} A'(x) = 0.}$$

5. a. Soit x un élément de $]0,1]$.

$\forall u \in [x,1],\ \dfrac{1}{u} \geqslant 0$ et $0 \leqslant \cos u \leqslant 1$ donc $\forall u \in [x,1],\ 0 \leqslant \dfrac{\cos u}{u} \leqslant \dfrac{1}{u}\cdot$

En intégrant il vient $0 \leqslant \displaystyle\int_x^1 \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u \leqslant \int_x^1 \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u$ car $x \leqslant 1$.

Or $\displaystyle\int_x^1 \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \big[\ln|u|\big]_x^1 = \ln 1 - \ln x = -\ln x.$ Finalement :

$$\boxed{\forall x \in]0,1],\ 0 \leqslant \int_x^1 \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u \leqslant -\ln x.}$$

b. $\forall x \in]0,+\infty[,\ \sin x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u = \sin x \int_x^1 \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u + \sin x \int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u.$

Notons que $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\left(\sin x \int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u\right) = 0$. Ainsi pour montrer que $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\left(\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u\right) = 0$, il suffit donc de montrer que : $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\left(\sin x \int_x^1 \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u\right) = 0.$

$\forall x \in]0,1],\ 0 \leqslant \displaystyle\int_x^1 \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u \leqslant -\ln x$ et $\sin x \geqslant 0$.

Par conséquent : $\forall x \in]0,1],\ 0 \leqslant \sin x \displaystyle\int_x^1 \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u \leqslant \sin x\,(-\ln x) = -\frac{\sin x}{x}\,(x\,\ln x)$.

Or $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(x\,\ln x) = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{\sin x}{x}\,(x\,\ln x)\right) = 0$.

Il vient alors par encadrement : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\sin x \int_x^1 \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u\right) = 0$ et ceci achève de montrer que :

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+}\left(\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u\right) = 0.}$$

c. $u \to \dfrac{\sin u}{u}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et prolongeable par continuité en 0 car $\displaystyle\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u} = 1$.

Ainsi $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin u}{u}\,du$ converge. Or nous avons vu plus haut que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$ converge donc :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du \text{ converge.}}$$

Ceci permet de dire que $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$.

Rappelons que $\forall x \in]0,+\infty[,\ A(x) = \cos x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u$.

Rappelons également que $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u\right) = 0$.

Alors $\displaystyle\lim_{x\to 0} A(x) = 1 \times \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u - 0$. Finalement :

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} A(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u.}$$

PARTIE II - Étude de la fonction $\mathbf{x} \to \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathbf{e^{-x\,t}}}{\mathbf{1+t^2}}\,\mathrm{d}\mathbf{t}$.

1. Soient x un réel strictement positif et k un élément de $\mathbb{N}$.

$\displaystyle\lim_{t\to +\infty}\left(t^k\,e^{-xt}\right) = 0$ donc il existe un réel A strictement positif A tel que : $\forall t \in]A,+\infty[,\ \left|t^k\,e^{-xt}\right| < 1$.

Ainsi $t \to t^k\,e^{-xt}$ est bornée sur $]A,+\infty[$. Comme cette fonction est continue sur le segment $[0,A]$ elle est également bornée sur $[0,A]$.

$t \to t^k\,e^{-xt}$ est bornée sur $[0,A]$ et sur $]A,+\infty[$ donc elle bornée sur $[0,+\infty[$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ strictement positif et pour tout élément } k \text{ de } \mathbb{N},\ t \to t^k\,e^{-xt} \text{ est bornée sur } [0,+\infty[.}$$

Fixons de nouveau x dans $]0,+\infty[$ et k dans $\mathbb{N}$. $t \to t^k\,e^{-xt}$ est bornée sur $[0,+\infty[$ donc il existe un réel M strictement positif tel que $\forall t \in [0,+\infty[,\ 0 \leqslant t^k\,e^{-x\,t} = |t^k\,e^{-x\,t}| \leqslant M$. Ainsi :

1. $t \to \dfrac{t^k\, e^{-x\,t}}{1+t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$;
2. $\forall t \in [1,+\infty[;\ 0 \leqslant \dfrac{t^k\, e^{-x\,t}}{1+t^2} \leqslant \dfrac{M}{1+t^2} \leqslant \dfrac{M}{t^2}$;
3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Les règles de comparaison des intégrales généralisées de fonctions positives donnent alors la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x\,t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ strictement positif et pour tout élément } k \text{ de } \mathbb{N},\ \int_0^{+\infty} \frac{t^k\, e^{-x\,t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

2. a. $\varphi : u \to e^u$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall u \in \mathbb{R},\ \varphi'(u) = \varphi''(u) = e^u$.

L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à φ à l'ordre 1 donne :

$\forall u \in \mathbb{R},\ \big|\varphi(u) - \varphi(0) - (u-0)\,\varphi'(0)\big| \leqslant \dfrac{|u-0|^2}{2} \displaystyle\operatorname*{Max}_{z \in \widehat{[0,u]}} |\varphi''(z)|$ ou $\forall u \in \mathbb{R},\ \big|e^u - 1 - u\big| \leqslant \dfrac{u^2}{2} \displaystyle\operatorname*{Max}_{z \in \widehat{[0,u]}} e^z$.

Comme la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$: $\forall u \in \mathbb{R},\ \displaystyle\operatorname*{Max}_{z \in \widehat{[0,u]}} e^z \leqslant e^{\mathrm{Max}(0,u)} \leqslant e^{|u|}$.

Ainsi $\forall u \in \mathbb{R},\ \big|e^u - 1 - u\big| \leqslant \dfrac{u^2}{2} \displaystyle\operatorname*{Max}_{z \in \widehat{[0,u]}} e^z \leqslant \dfrac{u^2}{2}\, e^{|u|}$.

$$\boxed{\forall u \in \mathbb{R},\ \big|e^u - 1 - u\big| \leqslant \frac{u^2}{2}\, e^{|u|}.}$$

b. Soient k un élément de $\mathbb{N}$, x un réel strictement positif et h un réel tel que $0 < |h| \leqslant \dfrac{x}{2}$.

$-\dfrac{x}{2} \leqslant h \leqslant \dfrac{x}{2}$ donc $0 < \dfrac{x}{2} \leqslant x+h$. Alors on peut parler de $B_k(x+h)$... ainsi que de $B_k(x)$, $B_{k+1}(x)$ et de $B_{k+2}\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

Posons $\Delta(h) = \dfrac{B_k(x+h) - B_k(x)}{h} + B_{k+1}(x)$.

$$\Delta(h) = \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} \left(\frac{t^k\, e^{-(x+h)\,t}}{1+t^2} - \frac{t^k\, e^{-x\,t}}{1+t^2} + \frac{h\, t^{k+1}\, e^{-x\,t}}{1+t^2} \right) \mathrm{d}t = \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} \frac{t^k\, e^{-x\,t}}{1+t^2} \big(e^{-h\,t} - 1 + ht\big)\,\mathrm{d}t.$$

Soit A un réel strictement positif. Posons $\Delta_A(h) = \dfrac{1}{h} \displaystyle\int_0^{A} \frac{t^k\, e^{-x\,t}}{1+t^2} \big(e^{-h\,t} - 1 + ht\big)\,\mathrm{d}t$.

Notons que $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \Delta_A(h) = \Delta(h)$. Ainsi $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} |\Delta_A(h)| = |\Delta(h)|$.

$$|\Delta_A(h)| = \left| \frac{1}{h} \int_0^{A} \frac{t^k\, e^{-x\,t}}{1+t^2} \big(e^{-h\,t} - 1 + ht\big)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{1}{|h|} \int_0^{A} \frac{t^k\, e^{-x\,t}}{1+t^2} \big|e^{-h\,t} - 1 + ht\big|\,\mathrm{d}t.$$

En appliquant le résultat de a) il vient :

$$|\Delta_A(h)| \leqslant \frac{1}{|h|} \int_0^{A} \frac{t^k\, e^{-x\,t}}{1+t^2} \frac{(-h\,t)^2}{2}\, e^{|-h\,t|}\,\mathrm{d}t = \frac{h^2}{2\,|h|} \int_0^{A} \frac{t^{k+2}\, e^{(|h|-x)\,t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{|h|}{2} \int_0^{A} \frac{t^{k+2}\, e^{(|h|-x)\,t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

$|h| \leqslant \dfrac{x}{2}$ donc $\forall t \in [0, +\infty[,\ e^{(|h|-x)\,t} \leqslant e^{(\frac{x}{2}-x)\,t} = e^{-\frac{x}{2}\,t}$ donc $\forall t \in [0, +\infty[,\ \dfrac{t^{k+2}\, e^{(|h|-x)\,t}}{1+t^2} \leqslant \dfrac{t^{k+2}\, e^{-\frac{x}{2}\,t}}{1+t^2}\cdot$

En intégrant on obtient alors : $\displaystyle\int_0^A \frac{t^{k+2}\, e^{(|h|-x)\,t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^A \frac{t^{k+2}\, e^{-\frac{x}{2}\,t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ car A est (strictement) positif.

Alors $|\Delta_A(h)| \leqslant \displaystyle\frac{|h|}{2}\int_0^A \frac{t^{k+2}\, e^{(|h|-x)\,t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{|h|}{2}\int_0^A \frac{t^{k+2}\, e^{-\frac{x}{2}\,t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$

B_{k+2} est définie en $\dfrac{x}{2}$ car $\dfrac{x}{2}$ est strictement positif donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{k+2}\, e^{-\frac{x}{2}\,t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

De plus $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} |\Delta_A(h)| = |\Delta(h)|$.

Ainsi $\displaystyle\left|\frac{B_k(x+h)-B_k(x)}{h} + B_{k+1}(x)\right| = |\Delta(h)| \leqslant \frac{|h|}{2}\int_0^{+\infty} \frac{t^{k+2}\, e^{-\frac{x}{2}\,t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{|h|}{2}\, B_{k+2}\left(\frac{x}{2}\right).$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0, +\infty[,\ \forall h \in \mathbb{R},\ 0 < |h| \leqslant \frac{x}{2} \Rightarrow \left|\frac{B_k(x+h)-B_k(x)}{h} + B_{k+1}(x)\right| \leqslant \frac{|h|}{2}\, B_{k+2}\left(\frac{x}{2}\right).}$$

c. Soit k un élément de $\mathbb{N}$. Soit x un réel strictement positif.

$\forall h \in \left[-\dfrac{x}{2}, \dfrac{x}{2}\right] - \{0\},\ 0 \leqslant \displaystyle\left|\frac{B_k(x+h)-B_k(x)}{h} + B_{k+1}(x)\right| \leqslant \frac{|h|}{2}\, B_{k+2}\left(\frac{x}{2}\right)$ et $\displaystyle\lim_{h\to 0}\left(\frac{|h|}{2}\, B_{k+2}\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 0.$

Il vient alors par encadrement : $\displaystyle\lim_{h\to 0}\left(\frac{B_k(x+h)-B_k(x)}{h} + B_{k+1}(x)\right) = 0.$

Ceci donne encore : $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{B_k(x+h)-B_k(x)}{h} = -B_{k+1}(x).$

Par conséquent B_k est dérivable en x et $B_k'(x) = -B_{k+1}(x)$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } k \text{ de } \mathbb{N},\ B_k \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[\text{ et } \forall x \in]0, +\infty[,\ B_k'(x) = -B_{k+1}(x).}$$

d. Ce qui précède montre en particulier que B_0 est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $\forall x \in]0, +\infty[,\ B_0'(x) = -B_1(x)$.

Cela montre également que B_1 est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $\forall x \in]0, +\infty[,\ B_1'(x) = -B_2(x)$.

Alors B_0 est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x \in]0, +\infty[,\ B_0''(x) = -B_1'(x) = B_2(x)$.

Mais B_2 est dérivable sur $]0, +\infty[$ donc continue. Alors B_0'' est continue sur $]0, +\infty[$. Finalement :

$$\boxed{B_0 \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]0, +\infty[.}$$

$\forall x \in]0, +\infty[,\ B_0''(x) + B_0(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{t^2\, e^{-x\,t}}{1+t^2} + \frac{e^{-x\,t}}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-x\,t}\,\mathrm{d}t.$

$\forall x \in]0, +\infty[,\ \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x\,t}\,\mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A e^{-x\,t}\,\mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty}\left(\left[-\frac{e^{-x\,t}}{x}\right]_0^A\right) = \lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{x} - \frac{e^{-x\,A}}{x}\right) = \frac{1}{x}\cdot$

Ainsi : $\forall x \in]0, +\infty[,\ \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x\,t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\cdot$

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ B_0''(x) + B_0(x) = \frac{1}{x}\cdot}$$

3. Soit x un élément de $]0,+\infty[$. Rappelons que $B_0(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x\,t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et $-B_0'(x) = B_1(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\,e^{-x\,t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

$\forall t \in [0,+\infty[,\ \dfrac{1}{1+t^2} \leqslant 1$ et $e^{-x\,t} \geqslant 0$ donc $\forall t \in [0,+\infty[,\ 0 \leqslant \dfrac{e^{-x\,t}}{1+t^2} \leqslant e^{-x\,t}$.

Or nous venons de voir que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x\,t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\cdot$ En intégrant il vient donc : $0 \leqslant B_0(x) \leqslant \dfrac{1}{x}\cdot$

$\forall t \in [0,+\infty[,\ \dfrac{1}{1+t^2} \leqslant 1$ et $t\,e^{-x\,t} \geqslant 0$ donc $\forall t \in [0,+\infty[,\ 0 \leqslant \dfrac{t\,e^{-x\,t}}{1+t^2} \leqslant t\,e^{-x\,t}$.

Ainsi en intégrant on obtient : $\forall A \in [0,+\infty[,\ 0 \leqslant \displaystyle\int_0^A \frac{t\,e^{-x\,t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^A t\,e^{-x\,t}\,\mathrm{d}t$.

Une intégration par parties simple donne :

$\forall A \in [0,+\infty[,\ \displaystyle\int_0^A t\,e^{-x\,t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t\,e^{-x\,t}}{-x}\right]_0^A - \int_0^A \frac{e^{-x\,t}}{-x}\,\mathrm{d}t$.

Alors $\forall A \in [0,+\infty[,\ \displaystyle\int_0^A t\,e^{-x\,t}\,\mathrm{d}t = -\frac{A\,e^{-x\,A}}{x} + \frac{1}{x}\int_0^A e^{-x\,t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x}\int_0^A e^{-x\,t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-x\,t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}\cdot$

Par conséquent $\forall A \in [0,+\infty[,\ 0 \leqslant \displaystyle\int_0^A \frac{t\,e^{-x\,t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^A t\,e^{-x\,t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x^2}\cdot$

En faisant tendre A vers $+\infty$ il vient $0 \leqslant B_1(x) \leqslant \dfrac{1}{x^2}$ ou $0 \leqslant -B_0'(x) \leqslant \dfrac{1}{x^2}\cdot$

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ 0 \leqslant B_0(x) \leqslant \frac{1}{x} \text{ et } 0 \leqslant -B_0'(x) \leqslant \frac{1}{x^2}\cdot}$$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$. Il vient alors sans difficulté par encadrement :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} B_0(x) = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} B_0'(x) = 0.}$$

4. a Soit x un élément de $]0,+\infty[$.

$t \to \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$, $\forall t \in [1,+\infty[,\ \dfrac{1}{1+t^2} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Les règles de comparaison des intégrales généralisées de fonctions positives donnent alors la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

$\forall t \in [0,+\infty[,\ e^{-x\,t} \leqslant 1$ et $\dfrac{1}{1+t^2} \geqslant 0$ donc : $\forall t \in [0,+\infty[,\ \dfrac{e^{-x\,t}}{1+t^2} \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}\cdot$

En intégrant on obtient alors $B_0(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x\,t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\cdot$

Notons que $t \to e^{-x\,t}$ est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$ car x est strictement positif. Alors :

$\forall t \in \left[0, \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right]$, $e^{-x\,t} \geqslant e^{-x\,\frac{1}{\sqrt{x}}} = e^{-\sqrt{x}}$ et $\dfrac{1}{1+t^2} \geqslant 0$ donc : $\forall t \in \left[0, \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right]$, $\dfrac{e^{-x\,t}}{1+t^2} \geqslant \dfrac{e^{-\sqrt{x}}}{1+t^2}\cdot$

En intégrant il vient : $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{e^{-x\,t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = e^{-\sqrt{x}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\cdot$

$\forall t \in \left[\dfrac{1}{\sqrt{x}}, +\infty\right[$, $\dfrac{e^{-x\,t}}{1+t^2} \geqslant 0$ donc $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty} \frac{e^{-x\,t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ ($\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty} \frac{e^{-x\,t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge car $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x\,t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge).

Alors $B_0(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x\,t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{e^{-x\,t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty} \frac{e^{-x\,t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{e^{-x\,t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \geqslant e^{-\sqrt{x}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\cdot$

$$\boxed{\forall x \in]0, +\infty[,\ e^{-\sqrt{x}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant B_0(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\cdot}$$

b. tan est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et définit une bijection de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $[0, +\infty[$. Soit y un élément de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Le changement de variable $t = \tan u$ donne alors $\displaystyle\int_0^{y} \mathrm{d}u = \int_0^{\tan y} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ ($\mathrm{d}t = (1+\tan^2 u)\,\mathrm{d}u$ ou $\mathrm{d}u = \dfrac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$).

$$\boxed{\forall y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[,\ \int_0^{y} \mathrm{d}u = \int_0^{\tan y} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t}.$$

$\forall y \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\displaystyle\int_0^{\tan y} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{y} \mathrm{d}u = y.$

Comme $\displaystyle\lim_{y\to\frac{\pi}{2}^-} \tan y = +\infty$, en faisant tendre y vers $\dfrac{\pi}{2}$ par valeur inférieure, il vient :
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\cdot$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\cdot}$$

Rappelons que $\forall x \in]0, +\infty[,\ e^{-\sqrt{x}} \displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant B_0(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\cdot$

Ainsi : $\forall x \in]0, +\infty[,\ e^{-\sqrt{x}} \displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant B_0(x) \leqslant \frac{\pi}{2}\cdot$

$\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\cdot$ De plus $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} e^{-\sqrt{x}} = 1.$

Ainsi $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} e^{-\sqrt{x}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\cdot$ Il vient alors par encadrement :

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} B_0(x) = \frac{\pi}{2}\cdot}$$

PARTIE III - Calcul de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$

1. Rappelons que A et B_0 sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et que $\forall x \in]0,+\infty[,\ A''(x)+A(x) = B_0''(x)+B_0(x) = \frac{1}{x}\cdot$

Or $\forall x \in]0,+\infty[,\ \varphi(x) = A(x) - B_0(x)$ donc φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.

De plus $\forall x \in]0,+\infty[,\ \varphi(x) + \varphi''(x) = A(x) - B_0(x) + A''(x) - B_0''(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0.$

$U = \varphi^2 + \varphi'^2$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ car φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$. En dérivant on obtient :

$\forall x \in]0,+\infty[,\ U'(x) = \big(\varphi^2 + \varphi'^2\big)'(x) = 2\,\varphi'(x)\,\varphi(x) + 2\,\varphi''(x)\,\varphi'(x) = 2\,\varphi'(x)\big(\varphi(x) + \varphi''(x)\big) = 0.$

U est alors de dérivée nulle sur l'intervalle $]0,+\infty[$ donc :

$$\boxed{U \text{ est constante sur }]0,+\infty[.}$$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} B_0(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} A'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} B_0'(x) = 0.$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \Big(A(x) - B(x)\Big) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \Big(A'(x) - B'(x)\Big) = 0.$

Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} U(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \Big(\big(\varphi(x)\big)^2 + \big(\varphi'(x)\big)^2\Big) = 0.$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} U(x) = 0.}$$

3. U est constante sur $]0,+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} U(x) = 0$. Ainsi U est nulle sur $]0,+\infty[$.

Alors $\forall x \in]0,+\infty[,\ A(x) - B_0(x) = 0.$

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ A(x) = B_0(x).}$$

4. $\forall x \in]0,+\infty[,\ A(x) = B_0(x)$, $\lim\limits_{x\to0^+} A(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$ (d'après ***I.5.c.***) et $\lim\limits_{x\to0^+} B_0(x) = \frac{\pi}{2}$ (d'après ***II.4.c.***). Ainsi :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}\cdot}$$

SECOND PROBLÈME

PARTIE I - Étude d'exemples

1. $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est positive car ses coefficients sont des réels positifs ou nuls.

$$U - AU = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \left(1 - \frac{2}{3}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$U - AU$ est strictement positive.

Ainsi U est une matrice (strictement) positive de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que la matrice $U - AU$ soit strictement positive.

Ceci achève de montrer que :

$$\boxed{A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ est productive.}}$$

2. Notons que $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice positive de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Soit $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ une matrice positive de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$P - BP = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x + 4y + z \\ 2x + y + 3z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4y - z \\ -2x - 3z \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le dernier coefficient de $P - BP$ est nul donc cette matrice n'est pas strictement positive.

Ainsi il n'existe pas de matrice positive P de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $P - BP$ soit strictement positive.

$$\boxed{B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ n'est pas productive.}}$$

PARTIE II - Caractérisation des matrices productives positives

M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose que la matrice $M = (m_{ij})$ est positive. Alors $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ m_{ij} \geqslant 0$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ une matrice positive de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $\forall i \in [\![1,n]\!],\ x_i \geqslant 0$.

Posons $Y = MX = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. $\forall i \in [\![1,n]\!],\ y_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\, x_j$.

Comme $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ m_{ij} \geqslant 0$ et $\forall j \in [\![1,n]\!],\ x_j \geqslant 0 : \forall i \in [\![1,n]\!],\ y_i \geqslant 0$. $Y = MX$ est positive. Ainsi :

$\boxed{\text{Si } M \text{ est une matrice positive de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{ pour toute matrice positive } X \text{ de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \text{ le produit } MX \text{ est positif.}}$

2. Réciproquement supposons que pour toute matrice positive X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le produit MX est positif.

Montrons que M est positive.

Fixons j dans $[\![1,n]\!]$. Soit $E_j = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ le $j^{\text{ème}}$ élément de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$u_j = 1$ et $\forall i \in [\![1,n]\!] - \{j\},\ u_i = 0$.

E_j est donc une matrice positive de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc, par hypothèse, ME_j est une matice positive.

Redémontrons que ME_j est la $j^{\text{ème}}$ colonne de M.

Posons $ME_j = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$. $\forall i \in [\![1,n]\!],\ v_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_{ik}\, u_k = m_{ij}\, u_j = m_{ij}$. Nous retrouvons bien le fait que ME_j est la $j^{\text{ème}}$ colonne de M.

Comme ME_j est positive : $\forall i \in [\![1,n]\!],\ m_{ij} \geqslant 0$.

Ceci étant vrai pour tout élément j de $[\![1,n]\!]$ on alors $\forall j \in [\![1,n]\!],\ \forall i \in [\![1,n]\!],\ m_{ij} \geqslant 0$. M est donc positive.

$\boxed{\text{Réciproquement si } M \text{ est une matrice de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que, pour toute matrice positive } X \text{ de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \text{ le produit } MX \text{ est positif alors } M \text{ est une matice positive.}}$

$\boxed{\text{Si } M \text{ est une matrice de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M \text{ est positive si et seulement} : \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X \geqslant 0 \Rightarrow MX \geqslant 0.}$

PARTIE III - Caractérisation des matrices productives

1. a Posons $W = AP = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$. Alors $T = P - AP = \begin{pmatrix} p_1 - w_1 \\ p_2 - w_2 \\ \vdots \\ p_n - w_n \end{pmatrix}$.

Par hypothèse $T > 0$ donc $\forall i \in [\![1,n]\!],\ p_i - w_i > 0$. Ainsi : $\forall i \in [\![1,n]\!],\ p_i > w_i$.

A étant productive, A est positive. Comme P est une matrice (strictement) positive de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $W = AP$ est positive d'après ***II 1.***.

Alors $\forall i \in [\![1,n]\!],\ p_i > w_i \geqslant 0$ donc $\forall i \in [\![1,n]\!],\ p_i > 0$. Finalement :

$\boxed{P \text{ est strictement positive.}}$

b. $X \geqslant AX$ donc $\forall i \in [\![1,n]\!],\ x_i \geqslant \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j$.

En particulier $x_k \geqslant \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\, x_j$. Alors $0 \leqslant x_k - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\, x_j = c\, p_k - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{p_j}\, a_{kj}\, p_j$ (car $x_k = c\, p_k$).

Or $\forall j \in [\![1,n]\!],\ \dfrac{x_j}{p_j} \geqslant c,\ a_{kj} \geqslant 0$ et $p_j \geqslant 0$ donc $\forall j \in [\![1,n]\!],\ \dfrac{x_j}{p_j}\, a_{kj}\, p_j \geqslant c\, a_{kj}\, p_j$.

Ceci donne : $\forall j \in [\![1,n]\!],\ -\dfrac{x_j}{p_j}\, a_{kj}\, p_j \leqslant -c\, a_{kj}\, p_j$. En sommant il vient : $-\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{p_j}\, a_{kj}\, p_j \leqslant -c \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\, p_j$.

En ajoutant $c\, p_k$ on obtient : $c\, p_k - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{p_j}\, a_{kj}\, p_j \leqslant c\, p_k - c \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\, p_j = c\left(p_k - \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\, p_j\right)$.

Or nous avons vu plus haut que $0 \leqslant c\, p_k - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{p_j}\, a_{kj}\, p_j$. A fortiori :

$$\boxed{0 \leqslant c\left(p_k - \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\, p_j\right).}$$

$P - AP$ est strictement positive donc tous ses coefficients sont strictement positifs.

En particulier le coefficient de sa $k^{\text{ème}}$ ligne qui n'est autre que $p_k - \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\, p_j$.

Alors $p_k - \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\, p_j > 0$ et $0 \leqslant c\left(p_k - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\, p_j\right)$. Par conséquent $c \geqslant 0$.

$$\boxed{c \text{ est positif ou nul.}}$$

$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \dfrac{x_i}{p_i} \geqslant c \geqslant 0$ donc $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \dfrac{x_i}{p_i} \geqslant 0$. Or $\forall i \in [\![1,n]\!],\ p_i > 0$ car P est strictement positive.

Ainsi : $\forall i \in [\![1,n]\!],\ x_i \geqslant 0$. Finalement :

$$\boxed{X \text{ est positive.}}$$

c. $X = AX$ donc nécessairement $-X = A(-X)$. Le tout permet de dire que $X \geqslant AX$ et $-X \geqslant A(-X)$.

Alors ce qui précède montre que X et $-X$ sont des matrices positives. Par conséquent X est nulle.

$$\boxed{\text{Si } X \text{ est une matrice de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ telle que } AX = X \text{ alors } X \text{ est nulle.}}$$

Ceci signifie encore que : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ (I_n - A)X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \Rightarrow X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Ce qui est équivalent à dire que $I_n - A$ est inversible.

$$\boxed{I_n - A \text{ est inversible.}}$$

d. Soit X une matrice positive de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Posons $Y = (I_n - A)^{-1}X$ et montrons que cette matrice est positive.

$0 \leqslant X = (I_n - A)Y = Y - AY$ donc $Y \geqslant AY$. D'après ***III.1.b.*** Y est positive.

$$\boxed{\text{Pour toute matrice positive } X \text{ de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{, la matrice } Y = (I_n - A)^{-1}X \text{ est positive.}}$$

Ce qui précède indique que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X \geqslant 0 \Rightarrow (I_n - A)^{-1}X \geqslant 0$. ***II.2.*** permet alors de dire que :

$$\boxed{(I_n - A)^{-1} \text{ est positive.}}$$

2. $V = (I_n - B)^{-1}U$ donc $V - BV = (I_n - B)\,V = U$.

$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ étant strictement positive il en est de même de $V - BV$!

$$\boxed{V - BV > 0}$$

$(I_n - B)^{-1}$ est, par hypothèse, une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et U est une matrice positive de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc $V = (I_n - B)^{-1}U$ est une matrice positive de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

V est finalement une matrice positive de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui vérifie $V - BV > 0$.

Comme par hypothèse B est positive, on peut alors dire que :

$$\boxed{B \text{ est productive.}}$$

3. Grace à ***III.1*** nous pouvons dire que si A est une matrice productive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, A est positive, $I_n - A$ est inversible et $(I_n - A)^{-1}$ est positive.

III.2 vient de nous montrer que si B est une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $I_n - B$ est inversible et $(I_n - B)^{-1}$ est positive alors B est productive. Ainsi :

> Une matrice A, de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, est productive si et seulement si :
>
> 1. A est positive ;
> 2. $I_n - A$ est inversible ;
> 3. $(I_n - A)^{-1}$ est positive.

4. $(I_n - M)(I_n + 2\,M) = I_n + 2M - M - 2\,M^2 = I_n + 2M - M - M = I_n$.

$$\boxed{(I_n - M)(I_n + 2\,M) = I_n}.$$

Alors $I_n - M$ est inversible et son inverse est $I_n + 2\,M$.

M étant positive il en est de même de $I_n + 2\,M$ (non ?) donc de $(I_n - M)^{-1}$.

M est une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $I_n - M$ est inversible et son inverse est positive. D'après ce qui précède :

$$\boxed{M \text{ est productive.}}$$