MATHÉMATIQUES

Option économique

Édouard Lebeau
Alexandre Reissman

Commentaires généraux sur les copies

Cette épreuve était constituée de deux problèmes : un problème d'algèbre et un problème de probabilités. Chacun des deux problèmes comportait des questions de difficultés très variées, permettant aux candidats les moins à l'aise de mettre en valeur leur connaissance du cours et aux candidats les plus forts de se démarquer en traitant des questions plus délicates. On peut regretter la longueur excessive du sujet mais il nous a semblé que les candidats avaient généralement su gérer leur temps et aborder les parties qui leur semblaient à leur portée. Avec une moyenne de 9,5 et un écart-type de 4,8, cette épreuve s'est révélée très classante.

En dehors des erreurs mathématiques, que nous mentionnons en détail ci-dessous, nous tenons à déplorer le laisser-aller total dans la rédaction des copies. En plus des habituelles confusions logiques entre condition nécessaire et condition suffisante, entre équivalence et déduction, nous avons observé un mépris des plus élémentaires règles de grammaire. Les adjectifs sont employés comme des verbes (« Soit un entier n tel que $R(n)$ vraie. » ou « Comme M nilpotente, alors $M^3 = 0$. »), la syntaxe est malmenée (« On a donc A vérifie Δ_1 et Δ_2. » ou « Soit X admet un kurtosis. »), la conjugaison est erratique (on a pu lire le très classique « L'ensemble des valeurs propres de M sont les solutions de $X^p = 0$. »). Peut-être n'est-il pas inutile de rappeler aux candidats que la rédaction des mathématiques doit se faire dans un français correct.

Commentaires sur le problème 1

Ce problème d'algèbre évoque la question – un peu folklorique – des matrices carrées dont les valeurs propres sont exactement les coefficients diagonaux. La première partie aborde quelques généralités puis étudie des matrices particulières de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. La deuxième partie traite des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de diagonale nulle dont le spectre est $\{0\}$. On y montre notamment qu'il existe une infinité de telles matrices qui ne sont pas triangulaires.

Ce problème parcourt la majeure partie du programme d'algèbre linéaire d'ECE, de ses aspects les plus pratiques aux plus théoriques. Nous avons pu constater que si la recherche des valeurs propres est une technique généralement bien maîtrisée, la signification de ces manipulations n'est en revanche que rarement assimilée. La définition même du noyau d'une application linéaire semble rarement connue et la notion d'inclusion est confondue avec celle d'égalité !

I.1. Il était demandé en substance de réciter une propriété du cours. Ce qui était évalué était principalement l'adéquation de la réponse à la logique de la définition de $\mathcal{D}_n$: dire que les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont sur sa diagonale ne justifie que Δ_2 ; il faut dire aussi que tous les coefficients diagonaux sont des valeurs propres pour répondre pleinement à la question.

Nous avons eu la surprise de lire de nombreuses fois qu'une matrice triangulaire possède ses valeurs propres « sur la diagonale et *pas ailleurs* ». De fait, les réponses aux questions ultérieures montrent que de nombreux candidats ont cru que les matrices de $\mathcal{D}_n$ devaient n'avoir aucune valeur propre parmi leurs coefficients non diagonaux. Cette interprétation est tellement éloignée de la définition de l'énoncé qu'on est amené à s'interroger sur les méthodes de travail des candidats.

I.2. Cette question était peut-être un peu difficile en début de problème, même si c'était sa place logique. Elle consistait à montrer que les valeurs propres de la matrice $M + \alpha I_n$ sont exactement les nombres $\lambda + \alpha$, où λ parcourt les valeurs propres de M.

Cette question a été rarement traitée avec succès.

I.3.a. Cette question a souvent été réussie.

I.3.b. À l'inverse, peu de candidats ont compris que la matrice K_n permettait de montrer que $\mathcal{D}_n$ n'est pas stable par combinaison linéaire. La plupart des copies prétendent démontrer que $\mathcal{D}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n$ en interprétant le résultat de la question **I.2** comme une preuve de la stabilité par combinaison linéaire, ce qui révèle une mauvaise compréhension de cette notion.

I.4.a. Cette question a généralement été bien traitée. On a trouvé dans quelques copies une argumentation basée sur le déterminant, qui est pourtant absent du programme officiel d'ECE. Ces réponses n'ont pas été acceptées.

I.4.b. Là encore, peu de candidats ont fait le lien avec la question précédente.

I.5. Cette question technique a souvent été traitée convenablement même si certains candidats ont oublié partiellement de répondre aux questions posées. Rappelons qu'il est indispensable de relire l'énoncé d'une question qu'on a résolue avant de passer à la suivante si l'on souhaite éviter ce genre d'étourderie.

I.6.a. L'apparition du paramètre t rendait les calculs plus compliqués mais ils restaient abordables, à condition de ne pas se précipiter pour tout développer.

I.6.b. Dans cette question, il fallait distinguer les valeurs de t pour lesquelles la matrice $M(t)$ possède trois valeurs propres distinctes et celles pour lesquelles $4 + 2t$ vaut 2 ou 3. Dans le premier cas, la classique condition *suffisante* de diagonalisabilité permettait de conclure. Dans les autres cas, il fallait étudier en détail la dimension des espaces propres de la matrice.

Plusieurs copies ont invoqué la condition *suffisante* de diagonalisabilité pour affirmer que la matrice $M(t)$ est diagonalisable si et seulement si elle possède trois valeurs propres distinctes, ce qui révèle une fois de plus une incompréhension de la structure logique d'un raisonnement.

II.1. Cette question utilisait deux arguments : le fait que le polynôme X^p est un polynôme annulateur de M, qui prouve que seul 0 peut être une valeur propre de M ; le fait que l'égalité $M^p = 0$ empêche M d'être inversible, si bien que M admet effectivement 0 pour valeur propre.

Le premier fait a été plus souvent observé que le second mais les candidats qui ont identifié ce polynôme annulateur en ont trop souvent déduit abusivement que 0 est une valeur propre de M.

II.2. Cette suite de questions était de loin le passage le plus difficile de ce problème et il est compréhensible que les candidats aient préféré consacrer leur temps à des paragraphes plus accessibles.

De trop nombreuses copies affirment que l'égalité $u(x) = 0$ équivaut à $u^2(x) = 0$. D'autres affirment encore que l'égalité $\mathrm{Ker}(u^2) = \mathrm{Ker}(u^3)$ équivaut à $u^2 = u^3$.

II.3. Le calcul de la question **(a)** était simple mais les correcteurs ont pu observer que certains candidats tentaient de masquer des erreurs de calcul par des pirouettes malhonnêtes, qui ont évidemment été sanctionnées.

À la question **(b)**, il a généralement été affirmé que l'égalité $M^3 = \gamma(M)M + \delta(M)I_3$ équivaut à $\gamma(M) = \delta(M) = 0$ parce que M et I_3 sont non nulles. C'est abusif car non seulement M n'a pas été supposée non nulle – il était d'ailleurs nécessaire de traiter ce cas à part – mais même dans ce cas, il manquerait un argument – le fait que la famille (M, I_3) est libre, par exemple.

Les questions **(c)**, **(d)** et **(e)** étaient délicates car elles nécessitaient de faire la synthèse de plusieurs propriétés rencontrées dans le problème. Nous avons eu le plaisir de rencontrer plusieurs réponses convenables à ces questions.

Commentaires sur le problème 2

Ce problème de probabilité présente l'étude du kurtosis [1], notion d'usage courant en statistiques. La première partie pose le calcul du kurtosis pour quelques lois classiques, discrètes ou continues. La deuxième partie fournit une minoration du kurtosis et traite le cas d'égalité. La troisième partie montre que les sommes de n variables indépendantes identiquement distribuées voient leur kurtosis tendre vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Comme 0 est la valeur du kurtosis d'une variable aléatoire suivant une loi normale, ce phénomène de convergence fait écho à l'approximation desdites sommes par des variables gaussiennes fournie par le théorème centrale limite.

Ce problème, très calculatoire, testait la connaissance de la plupart des lois usuelles

1. En réalité, le kurtosis d'une variable aléatoire X est le quotient $\mu_4(X)/(\mu_2(X))^2$. Le nombre $K(X)$ manipulé dans ce problème s'appelle plutôt *excès d'aplatissement* mais nous avons préféré pratiquer un abus de langage pour éviter que les formulations de l'énoncé ne soient trop lourdes.

et l'application de la formule de transfert. La bonne connaissance du cours a été généreusement récompensée.

I.1. La question **(a)** a été bien réussie même si certains candidats ont donné sans calcul la valeur de la variance, du fait d'une lecture inattentive de l'énoncé probablement.

À l'inverse, la question **(b)** a été catastrophique sur le plan calculatoire, les candidats ayant développé $(X - \frac{1}{2})^4$ au lieu d'appliquer directement la formule de transfert. Ils se sont alors empêtrés dans les calculs, oubliant même souvent de simplifier leurs fractions.

La question **(c)** pouvait se traiter en introduisant la variable $Y = \dfrac{X-a}{b-a}$ et en *prouvant* que celle-ci suit la loi uniforme sur $[0,1]$ si bien qu'elle admet le même kurtosis que la variable de la question précédente. Beaucoup de candidats semblent croire que si X suit la loi uniforme sur $[0,1]$, alors la variable $aX+b$ suit la loi uniforme sur $[a,b]$ – une simple étude de l'univers-image leur aurait montré que cette formule ne convient pas. D'autres pensent que si X suit la loi uniforme sur $[0,1]$ et Y suit la loi uniforme sur $[a,b]$, alors elles vérifient la relation $Y = aX + b - a$; rappelons que deux variables aléatoires peuvent suivre la même loi sans être égales.

I.2. La question **(a)** testait la connaissance de la loi normale centrée réduite, l'application de la formule de transfert et la connaissance des techniques classiques de convergence d'intégrale par comparaison de fonctions positives. Il est étonnant qu'elle ait souvent fait l'objet d'une impasse.

La question **(b)** a plus souvent été traitée, généralement avec bonheur, les candidats ayant presque tous pensé à se ramener à un segment pour effectuer l'intégration par parties.

La question **(c)** a été presque toujours détectée comme source de points faciles.

La question **(d)**, analogue à **I.1.(c)**, a connu plus de succès que cette dernière.

I.3. Là encore le calcul de $\mu_4(X)$ était bien plus facile si l'on ne développait pas $(X - E(X))^4$. Cette question a, elle aussi, été le cadre de nombreuses erreurs de calcul.

II.1. La plupart des candidats ont reconnu là une conséquence de la formule de Koenig-Huyghens et de la positivité de la variance.

II.2. L'inégalité $K(X) \geqslant -2$ se déduisait de l'inégalité précédente en prenant $Y = (X - E(X))^2$. Cette méthode a rarement été trouvée.

II.3. Ce calcul aurait pu figurer dans la première partie et ne présentait pas plus de difficulté, mais il a rarement été effectué.

II.4. Cette suite de questions était fort difficile, à l'instar du paragraphe **II.2** du premier problème. Elle n'a été abordée avec succès qu'exceptionnellement.

II.5. Cette question n'a guère été abordée non plus.

III.1. Ce calcul facile n'a pas souvent été mené à bien, les candidats oubliant de remarquer l'égalité $V(X) = E(X^2)$ pour une variable centrée. Là encore, ainsi qu'à la question suivante, nous avons eu le malheur de sanctionner des tentatives de « bluff ».

III.2. Ce calcul découlait simplement du précédent. Il a rarement été abordé.

III.3. Cette question était une application directe de la formule du préliminaire. Elle n'a presque pas été traitée, faute de temps probablement.

III.4. On attendait là un raisonnement par récurrence, qui a rarement été mené au bout, là aussi par manque de temps.

III.5. La question **(a)** a rarement été traitée, les candidats ayant choisi de mettre en valeur leur connaissance du cours à la question **(b)**.

Correcteurs : Guy Brouard, Ludovic Freitag, Éric Guichet, Édouard Lebeau, Françoise Michel, Yves Monlibert, Audrey Rault, Alexandre Reissman, Jean-Yves Roussel.