Q1 a) P_0 s'annule en 1, 2 et 3. $P_0(0) = -\frac{1}{6}(-1)(-2)(-3) = 1$

Par conséquent : $P_0(j) = \begin{cases} 0 \text{ si } j \in \{1,2,3\} \\ 1 \text{ si } j = 0 \end{cases}$

P_1 s'annule en 0, 2 et 3. $P_1(1) = \frac{1}{2}\,1(1-2)(1-3) = 1$

P_2 s'annule en 0, 1 et 3. $P_2(2) = -\frac{1}{2}\,2(2-1)(2-3) = 1$

P_3 s'annule en 0, 1 et 2. $P_3(3) = \frac{1}{6}\,3(3-1)(3-2) = 1$

En résumé : $\forall (i,j) \in [\![0,3]\!]^2, \quad P_i(j) = \begin{cases} 1 \text{ si } j = i \\ 0 \text{ si } j \neq i \end{cases}$

$\Big\{$ P_0, P_1, P_2, P_3 sont les polynômes de Lagrange associés aux points 0, 1, 2, 3.

b) $\dim E = 4$, pour montrer que $\mathcal{C} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ est une base de E il suffit de prouver qu'elle est libre puisqu'elle possède quatre éléments.

Soit $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^4$ tel que : $\sum_{i=0}^{3} \alpha_i P_i = 0_E$ $\qquad P_i(j) = \begin{cases} 0 \text{ si } j \neq i \\ 1 \text{ si } j = i \end{cases}$

$\forall j \in [\![0,3]\!], \ \sum_{i=0}^{3} \alpha_i P_i(j) = 0$ donc $\forall j \in [\![0,3]\!], \ 0 = \sum_{i=0}^{3} \alpha_i P_i(j) \overset{\downarrow}{=} \alpha_j$

Finalement : $\forall (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^4, \ \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 = 0_E \Rightarrow \alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

$\mathcal{C} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ est une famille libre de E.

$\mathcal{C} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ est une base de E.

c) $P_0 = -\frac{1}{6}(X^2 - 3X + 2)(X-3) = -\frac{1}{6}(X^3 - 6X^2 + 11X - 6) = 1 - \frac{11}{6}X + X^2 - \frac{1}{6}X^3$

$P_1 = \frac{1}{2}X(X-2)(X-3) = \frac{1}{2}(X^3 - 5X^2 + 6X) = 3X - \frac{5}{2}X^2 + \frac{1}{2}X^3$

$P_2 = -\frac{1}{2}X(X-1)(X-3) = -\frac{1}{2}(X^3 - 4X^2 + 3X) = -\frac{3}{2}X + 2X^2 - \frac{1}{2}X^3$

$P_3 = \frac{1}{6}X(X-1)(X-2) = \frac{1}{6}(X^3 - 3X^2 + 2X) = \frac{1}{3}X - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X^3$

La matrice de passage de la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ à la base $\mathcal{C} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ est :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -11/6 & 3 & -3/2 & 1/3 \\ 1 & -5/2 & 2 & -1/2 \\ -1/6 & 1/2 & -1/2 & 1/6 \end{bmatrix}$$

d) Ici cela se gâte ! Normal c'est de l'algèbre linéaire lyonnais !

En effet calculer Π^{-1} c'est trouver la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{B}$; c'est donc trouver les coordonnées de $1, X, X^2$ et X^3 dans $\mathcal{B}$. Ce ...

Soit $P \in E$ et soit $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ses coordonnées dans $\mathcal{B}$.

$$\forall j \in [\![0,3]\!], \quad P(j) = \sum_{i=0}^{3} \alpha_i P_i(j) = \alpha_j.$$

Les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}$ sont donc : $P(0), P(1), P(2), P(3)$.

Par conséquent :

$$\Pi^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{bmatrix}.$$

Vérifions maintenant

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{11}{6} & 3 & -3/2 & 1/3 \\ 1 & -5/2 & 2 & -1/2 \\ -\frac{1}{6} & 1/2 & -1/2 & 1/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3/2 & 1/3 \\ 0 & -5/2 & 2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 1/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1/3 \\ 0 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & -3/2 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1/3 \\ 0 & 0 & -1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 3/2 & -2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1/3 \\ 0 & 0 & -1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{11}{6} & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1/6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ \frac{11}{6} & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 2 \\ -1/3 & 0 & 2 & 10 \\ 5/6 & 1 & 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 2 \\ -1/3 & 0 & 2 & 10 \\ 1/3 & 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 + \frac{11}{6} L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, $L_4 \leftarrow L_4 + \frac{1}{6} L_1$; $L_3 \leftarrow 2L_3$, $L_4 \leftarrow 2L_4$, $L_2 \leftrightarrow L_4$; $L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2$, $L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2$; $L_4 \leftarrow L_4 + \frac{3}{2} L_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1/3 \\ 0 & 0 & +1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 2 \\ +1/3 & 0 & -2 & -10 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{bmatrix} \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{bmatrix}}$$

$L_3 \leftarrow -L_3$, $L_4 \leftarrow 3L_4$; $L_3 \leftarrow L_3 + \frac{2}{3} L_4$, $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{3} L_4$; $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$

Q2 <u>a)</u> Question classique à savoir faire très proprement

Soit $(A,B)\in\mathbb{R}[X]^2$ et soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

$\exists (U,V)\in\mathbb{R}[X]^2$, $A = UP+\hat{A}$ et $B = VP+\hat{B}$, $\deg \hat{A}<\deg P$ et $\deg \hat{B}<\deg P$.

$\alpha A+\beta B = (\alpha U+\beta V)P + \alpha\hat{A}+\beta\hat{B}$ et $\deg(\alpha\hat{A}+\beta\hat{B})<\deg P$

donc $\alpha U+\beta V$ et $\alpha\hat{A}+\beta\hat{B}$ sont respectivement le quotient et le reste dans la division de $\alpha A+\beta B$ par P. Par conséquent $\varphi(\alpha A+\beta B) = \alpha\hat{A}+\beta\hat{B} = \alpha\varphi(A)+\beta\varphi(B)$.

φ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

<u>b)</u> Soit $T\in\mathbb{R}[X]$. $\deg \hat{T} < \deg P = 4$, $\hat{T}\in E$.

Soit $(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ la famille des coordonnées de $\hat{T}$ dans la base $\mathcal{B} = (P_0,P_1,P_2,P_3)$.

$P_i(j)=\begin{cases}1 \text{ si } j=i\\ 0 \text{ si } j\neq i\end{cases}$

$\forall j\in [\![0,3]\!]$, $\hat{T}(j) = \sum_{i=0}^{3}\alpha_i P_i(j) = \alpha_j$. Donc $\hat{T} = \sum_{i=0}^{3}\hat{T}(\;)P_i$

Or $\exists Q\in\mathbb{R}[X]$, $T = QP+\hat{T}$. $P(i)=0$

$\forall i\in [\![0,3]\!]$, $T(i) = Q(i)P(i)+\hat{T}(i) = \hat{T}(i)$; $\underline{\hat{T} = \sum_{i=0}^{3} T(i)P_i}$

<u>c)</u> $\deg P = 4$ donc $\forall T\in E$, $\hat{T} = T$

$$\underline{\underline{\forall T\in E,\quad T = \sum_{i=0}^{3} T(i)P_i}}$$

En particulier

$$\begin{aligned} 1 &= P_0+P_1+P_2+P_3\\ X &= P_1+P_2+P_3\\ X^2 &= P_1+4P_2+9P_3\\ X^3 &= P_1+8P_2+27P_3 \end{aligned}$$

$$M^{-1} = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 4 & 9\\ 0 & 1 & 8 & 27\end{bmatrix}$$

(Q3) a) Posons $\forall Q \in E$, $\varphi'(Q) = QS$; φ' est évidemment une application linéaire de E dans $\mathbb{R}[X]$. Notons que : $\psi = \varphi \circ \varphi'$

$\forall T \in \mathbb{R}[X]$, $\deg \varphi(T) = \deg \widehat{T} < \deg P = 4$; $\forall T \in \mathbb{R}[X]$, $\varphi(T) \in E$, φ peut donc être considérée comme une application linéaire de $\mathbb{R}[X]$ dans E.

Par conséquent : $\varphi' \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}[X])$ et $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X], E)$ donc $\psi = \varphi \circ \varphi' \in \mathcal{L}(E,E) = \mathcal{L}(E)$

ψ est un endomorphisme de E.

b) $\forall j \in [\![0,3]\!]$, $\psi(P_j) = \widehat{P_j S} = \sum_{i=0}^{3} P_j(i) S(i) P_i \underset{\uparrow}{=} S(j) P_j$

$P_j(i) = \begin{cases} 0 \text{ si } j \neq i \\ 1 \text{ si } j = i \end{cases}$

$\forall j \in [\![0,3]\!]$, $\psi(P_j) = S(j) P_j$.

$\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ est une base de E constituée de vecteurs propres de ψ donc ψ est diagonalisable.

$$M_{\mathcal{B}}(\psi) = \begin{bmatrix} S(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S(1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S(2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S(3) \end{bmatrix}$$

. Notons que $\operatorname{Spec} \psi = \{S(0), S(1), S(2), S(3)\}$

c) $S(0) = 1$, $S(1) = 1$, $S(2) = 15$, $S(3) = 55$. $\operatorname{Spec} \psi = \{1, 15, 55\}$

Posons $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $F_\lambda = \operatorname{Ker}(\psi - \lambda \operatorname{Id}_E)$.

$E = F_1 \oplus F_{15} \oplus F_{55}$ car ψ est diagonalisable.

En particulier $\dim F_1 + \dim F_{15} + \dim F_{55} = 4$

$P_0 \in F_1$ et $P_1 \in F_1$ donc $\operatorname{Vect}(P_0, P_1) \subset F_1$; $2 \leq \dim F_1$. Il est aussi clair que : $\dim F_{15} \geq 1$ et $\dim F_{55} \geq 1$. Notons enfin que $P_2 \in F_{15}$ et $P_3 \in F_{55}$

Si $\dim F_1 > 2$ ou $\dim F_{15} > 1$ ou $\dim F_{55} > 1$ alors $\dim F_1 + \dim F_{15} + \dim F_{55} > 4$

Donc $\dim F_1 = 2$, $\dim F_{15} = 1$, $\dim F_{55} = 1$

Alors $F_1 = \operatorname{Vect}(P_0, P_1)$, $F_{15} = \operatorname{Vect}(P_2)$ et $F_{55} = \operatorname{Vect}(P_3)$.

PARTIE I

Q1 a) Soit $n \in \mathbb{N}$. f_n est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme produit de deux fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}_+$.

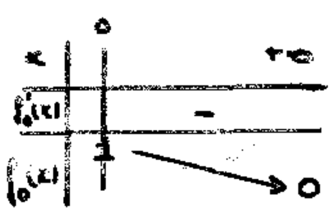
b) $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_0(x) = e^{-x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_0'(x) = -2x\, e^{-x^2} \leqslant 0$.

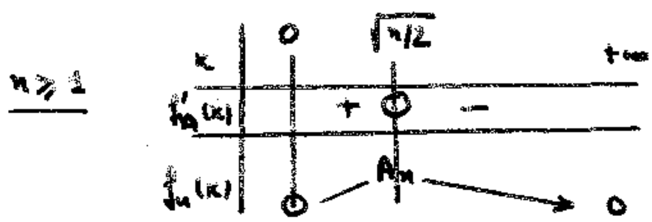
f_0 est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ (et même strictement décroissante)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n(x) = x^n e^{-x^2}$ et $f_n'(x) = n x^{n-1} e^{-x^2} + x^n(-2x)e^{-x^2}$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n'(x) = (n - 2x^2)\, x^{n-1} e^{-x^2} = 2\left(\sqrt{n/2} - x\right)\left(\sqrt{n/2} + x\right) x^{n-1} e^{-x^2}$.

Si $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est croissante sur $[0, \sqrt{\tfrac{n}{2}}]$ et décroissante sur $[\sqrt{\tfrac{n}{2}}, +\infty[$.





$A_n = f\left(\sqrt{\tfrac{n}{2}}\right) = \left(\sqrt{\tfrac{n}{2}}\right)^n e^{-n/2}$.

(Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$ par croissance comparée)

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ (f_{n+1} - f_n)(x) = (x-1)x^n e^{-x^2}$

Par conséquent : $\forall x \in [0,1],\ f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$ et $\forall x \in [1, +\infty[,\ f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)$.

ce qui indique que $\mathcal{C}_{n+1}$ est en dessous de $\mathcal{C}_n$ " pour $x \in [0,1]$ " et au-dessus pour $x \in [1, +\infty[$.

d) Je vous laisse faire la figure...

Q2 a) Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$; posons : $\forall x \in [0,1],\ \varphi_n(x) = f_n(x) - 1 + x$

φ_n est dérivable sur $[0,1]$ et $\forall x \in [0,1],\ \varphi_n'(x) = f_n'(x) + 1 > 0$.

$\sqrt{n/2} \geqslant 1$ donc $f_n'(x) \geqslant 0$ pour $x \in [0,1]$

φ_n est continue et strictement croissante sur $[0,1]$.

φ_n réalise alors une bijection de $[0,1]$ sur $[\varphi_n(0), \varphi_n(1)] = [-1, 1/e]$.

$0 \in [-1, x]$ donc $\exists !\, x_n \in [0,1]$, $\varphi_n(x_n) = 0$

Finalement l'équation $x \in [0,1]$ et $f_n(x) = 1-x$ admet une solution et une seule x_n.

b] Notons d'abord que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est croissante. Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$.

Notons d'abord que φ_n est négative sur $[0, x_n]$ et positive sur $[x_n, 1]$.

$$\varphi_n(x_{n+1}) = f_n(x_{n+1}) + x_{n+1} - 1 \underset{\uparrow}{=} f_n(x_{n+1}) - f_{n+1}(x_{n+1}) \underset{\uparrow}{\geq} 0$$

$f_{n+1}(x_{n+1}) = 1 - x_{n+1}$ d'après Q1 c) car $x_{n+1} \in [0,1]$

$\varphi_n(x_{n+1}) \geq 0$ montre alors que : $x_{n+1} \in [x_n, 1]$; $x_{n+1} \geq x_n$.

Finalement $(x_n)_{n\geq 2}$ est croissante et majorée par 1 donc convergente.

Notons ℓ la limite de cette suite ; $\ell \in [0,1]$.

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $x_n^n e^{-x_n^2} = 1 - x_n$; $\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $x_n \overset{(*)}{=} \left[(1-x_n)e^{x_n^2}\right]^{1/n}$

Supposons $\ell < 1$. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[(1-x_n)e^{x_n^2}\right] = (1-\ell)e^{\ell^2}$, par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} \left[(1-x_n)e^{x_n^2}\right]^{1/n} = 1 \quad \left(\text{écrire } e^{\frac{1}{n}\ln\left((1-x_n)e^{x_n^2}\right)}\right).$$

Mais $1 = \lim\limits_{n\to+\infty} \left[(1-x_n)e^{x_n^2}\right]^{1/n} \overset{(*)}{=} \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell$!!

Donc $\ell \not< 1$ donc $\ell = 1$!

Finalement $(x_n)_{n\geq 2}$ converge vers 1.

Q3 a] Soit $n \in \mathbb{N}$. f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc localement intégrable. Notons encore que f_n est positive sur $\mathbb{R}_+$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} [x^2 f_n(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty} (x^{n+2} f_n(x)) = 0$; il existe donc A dans $\mathbb{R}_+$ tel que :

$\forall x \in [A, +\infty[$, $0 \leq x^2 f_n(x) \leq 1$. $\forall x \in [A,+\infty[$, $0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{x^2}$.

La positivité de f_n et la convergence de $\int_A^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ donne la convergence de $\int_A^{+\infty} f_n(t)\,dt$ donc de $\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$ converge.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

intégration par parties

$$\forall A \in \mathbb{R}_+,\ \int_0^A f_n(t)\,dt = \int_0^A \underset{u'}{t^n}\,\underset{v}{e^{-t^2}}\,dt = \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1} e^{-t^2}\right]_0^A - \int_0^A \frac{1}{n+1} t^{n+1}(-2t)e^{-t^2}\,dt$$

$$\forall A \in \mathbb{R}_+,\ \int_0^A f_n(t)\,dt = \frac{1}{n+1} A^{n+1} e^{-A^2} + \frac{2}{n+1}\int_0^A f_{n+2}(t)\,dt$$

$\lim_{A\to+\infty}(A^{n+1}e^{-A^2}) = 0$ donc directement (en faisant tendre A vers $+\infty$) il vient :

$$I_n = \frac{2}{n+1} I_{n+2}$$

Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n$.

Posons pour tout p dans $\mathbb{N}$, $v_p = I_{2p}$ et $w_p = I_{2p+1}$ et amusons-nous.

$$\forall p \in \mathbb{N},\ v_{p+1} = I_{2p+2} = \frac{2p+1}{2} I_{2p} = \frac{2p+1}{2} v_p$$

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \frac{v_{p+1}}{(2p+2)!} = \frac{2p+1}{2(2p+2)!} v_p = \frac{1}{2(2p+2)(2p)!} v_p = \frac{1}{4(p+1)(2p)!} v_p$$

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \frac{v_{p+1}}{(2p+2)!} = \frac{4^p\, p!}{4^{p+1}\,(p+1)!}\frac{v_p}{(2p)!}\ ;\ \forall p \in \mathbb{N},\ \frac{4^{p+1}(p+1)!}{(2p+2)!} v_{p+1} = \frac{4^p\, p!}{(2p)!} v_p$$

La suite $\left(\frac{4^p\, p!}{(2p)!} v_p\right)_{p \geq 0}$ est donc constante !!

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \frac{4^p\, p!}{(2p)!} v_p = \frac{4^0\, 0!}{(2\times 0)!} v_0 = v_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}/2$$

Pour finir : $\forall p \in \mathbb{N}, \quad I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{4^p \, p!} \, \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Soit $p \in \mathbb{N}$.

$\omega_{p+1} = I_{2p+3} = \dfrac{2p+2}{2} I_{2p+1} = (p+1)\,\omega_p \,; \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad \dfrac{\omega_{p+1}}{(p+1)!} = \dfrac{\omega_p}{p!}$.

$\left(\dfrac{\omega_p}{p!}\right)_{p\geq 0}$ est constante donc : $\forall p \in \mathbb{N}, \quad \dfrac{\omega_p}{p!} = \dfrac{\omega_0}{0!} = I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} t e^{-t^2} dt$

$I_1 = \lim\limits_{A \to +\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-t^2}\right]_0^A = \frac{1}{2}$. Donc $\forall p \in \mathbb{N}, \quad \omega_p = I_1 \, p! = \frac{1}{2} p!$

$\forall p \in \mathbb{N}, \quad I_{2p+1} = \dfrac{p!}{2}$.

Q4 .. Soit $n \in \mathbb{N}$. $g_n : t \mapsto t^n e^{-t^2} \cos(at)$ est continue donc localement intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

De plus : $\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leq |g_n(t)| \leq t^n e^{-t^2} = f_n(t)$.

La positivité de $|g_n|$ et la convergence de $\int_0^{+\infty} f_n(t)dt$ donne la convergence de $\int_0^{+\infty} |g_n(t)| dt$.

Finalement : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2} \cos(at) dt$ est convergente car absolument convergente.

On montre de la même manière que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2} \sin(at) dt$ converge.

PARTIE II

Q1 Soit $a \in \mathbb{R}$.

$\forall A \in \mathbb{R}_+, \quad \displaystyle\int_0^A \underbrace{t e^{-t^2}}_{u'} \underbrace{\sin(at)}_{v} dt \overset{\text{Intégration par parties}}{=} \left[-\frac{1}{2} e^{-t^2} \sin(at)\right]_0^A - \int_0^A \left(-\frac{1}{2} e^{-t^2}\right)(a\cos(at))\, dt$

$\forall A \in \mathbb{R}_+, \quad \displaystyle\int_0^A t e^{-t^2} \sin(at) dt = -\frac{1}{2} e^{-A^2} \sin(aA) + \frac{1}{2} a \int_0^A e^{-t^2} \cos(at) dt$.

$\forall A \in \mathbb{R}_+$, $|e^{-A^2}\sin(aA)| \leq e^{-A^2}$

Par conséquent : $\lim\limits_{A\to+\infty} (e^{-A^2}\sin(aA)) = 0$ ... par encadrement.

En faisant tendre A vers $+\infty$ dans la dernière égalité de p4 il vient :

$$\underline{G(a) = \frac{1}{2} a F(a).}$$

(Q2) Il s'agit ici de dériver sous le signe somme c'est à dire de faire :

$$\text{"}\; F'(a) = \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos(ax)\,dx\right)' = \int_0^{+\infty} \left(e^{-x^2}\cos(ax)\right)' dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}(-x\sin(ax))\,dx = -G(a) \;\text{"}$$

on dérive par rapport à a

a) Fixons x dans $\mathbb{R}$.

Considérons la fonction $\varphi : u \to \cos(xu)$. $(\varphi : u \mapsto \cos(xu))$

φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall u \in \mathbb{R}$, $\varphi'(u) = -x\sin(xu)$

φ' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall u \in \mathbb{R}$, $\varphi''(u) = -x^2\cos(xu)$.

φ'' étant continue sur $\mathbb{R}$, φ est alors de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $h \in \mathbb{R}$.

Taylor-Lagrange, avec reste intégral, appliquée à φ à l'ordre 1 sur l'intervalle défini par $a+h$ et a donne :

$$\varphi(a+h) = \varphi(a) + (a+h-a)\varphi'(a) + \int_a^{a+h} (a+h-u)\varphi''(u)\,du \text{, c'est à dire :}$$

- $\cos((a+h)x) = \cos(ax) - hx\sin(ax) - x^2\int_a^{a+h}(a+h-u)\cos(xu)\,du$

1er cas.. $h \geq 0$. $\left|\int_a^{a+h}(a+h-u)\cos(xu)\,du\right| \leq \int_a^{a+h}(a+h-u)\,|\cos(xu)|\,du \leq \int_a^{a+h}(a+h-u)\,du$

$$\left|\int_a^{a+h}(a+h-u)\cos(xu)\,du\right| \leq \left[-\frac{(a+h-u)^2}{2}\right]_a^{a+h} = \frac{h^2}{2}.$$

2ème cas.. $h < 0$

$$\left|\int_a^{a+h}(a+h-u)\cos(xu)\,du\right| = \left|\int_{a+h}^{a}(a+h-u)\cos(xu)\,du\right| \leq \int_{a+h}^{a}|a+h-u|\,|\cos(xu)|\,du \leq \int_{a+h}^{a}(u-a-h)\,du = \left[\frac{1}{2}(u-a-h)^2\right]_{a+h}^{a} = \frac{h^2}{2}.$$

b.. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^*$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $|\cos((a+h)x) - \cos(ax) + hx\sin(ax)| = x^2 \left|\int_a^{a+h} (a+h-u)\cos(xu)\,du\right| \leq \frac{x^2h^2}{2}$.

Par conséquent :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $|e^{-x^2}\cos((a+h)x) - e^{-x^2}\cos(ax) + hxe^{-x^2}\sin(ax)| \leq \frac{h^2}{2} x^2 e^{-x^2}$.

Soit $A \in \mathbb{R}_+$.

$\left|\int_0^A [e^{-x^2}\cos((a+h)x) - e^{-x^2}\cos(ax) + hxe^{-x^2}\sin(ax)]dx\right| \leq \int_0^A |e^{-x^2}\cos((a+h)x) - e^{-x^2}\cos(ax) + hxe^{-x^2}\sin(ax)|dx$

Donc :

$\left|\int_0^A e^{-x^2}\cos((a+h)x)dx - \int_0^A e^{-x^2}\cos(ax)dx + h\int_0^A xe^{-x^2}\sin(ax)dx\right| \leq \frac{h^2}{2}\int_0^A x^2e^{-x^2}dx$.

Or $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos((a+h)x)dx$ converge et vaut $F(a+h)$, $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos(ax)dx$ converge et vaut $F(a)$, $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\sin(ax)dx$ converge et vaut $G(a)$ et enfin $\int_0^{+\infty} x^2e^{-x^2}dx$ converge et vaut I_2 ! Par conséquent en faisant tendre A vers $+\infty$ dans la dernière inégalité on obtient : $|F(a+h) - F(a) + hG(a)| \leq \frac{h^2}{2}\int_0^{+\infty} x^2e^{-x^2}dx$.

En divisant par $|h|$ on obtient :

$$\left|\frac{F(a+h)-F(a)}{h} + G(a)\right| \leq \frac{|h|}{2}\int_0^{+\infty} x^2e^{-x^2}dx$$

c) Soit $a \in \mathbb{R}$. $\forall h \in \mathbb{R}^*$, $\left|\frac{F(a+h)-F(a)}{h} + G(a)\right| \leq \frac{|h|}{2}\int_0^{+\infty} x^2e^{-x^2}dx$ et

$\lim_{h\to 0} \frac{|h|}{2}\int_0^{+\infty} x^2e^{-x^2}dx$.

Il vient alors : $\lim_{h\to 0} \frac{F(a+h)-F(a)}{h} + G(a) = 0$ ou $\lim_{h\to 0} \frac{F(a+h)-F(a)}{h} = -G(a)$.

Ce qui signifie que : <u>F est dérivable en a et que $F'(a) = -G(a)$.</u>

<u>Remarque</u>.. Tout cela est classique et à savoir faire par ♡

(Q3). Rappelons que : $\forall a \in \mathbb{R}$, $G(a) = \frac{a}{2} F(a)$ et $F'(a) = -G(a)$

Donc : $\forall a \in \mathbb{R}$, $F'(a) = \frac{-a}{2} F(a)$

Remarque : F est solution de l'équation différentielle $y' = -\frac{x}{2} y$.

Posons : $\forall a \in \mathbb{R}$, $H(a) = e^{a^2/4} F(a)$.

H est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall a \in \mathbb{R}$, $H'(a) = \frac{a}{2} e^{a^2/4} F(a) + e^{a^2/4} \times \left(-\frac{a}{2} F(a)\right) = 0$

H' est nulle sur $\mathbb{R}$ donc H est constante sur $\mathbb{R}$.

$\exists C \in \mathbb{R}$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $H(a) = C$.

Donc $\forall a \in \mathbb{R}$, $F(a) = C e^{-a^2/4}$.

Or : $F(0) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(0x)\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Par conséquent : $\frac{\sqrt{\pi}}{2} = F(0) = C e^{-0^2/4} = C$.

Finalement : $\boxed{\forall a \in \mathbb{R}, \quad F(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-a^2/4}}$.

Exercices pour finir la page.

1. Sachant que $I_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $I_1 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n$, écrire un programme en TP4 calculant I_n (l'utilisateur donne n et la machine rend I_n).

2. De quelle manière retrouve-t-on $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ avec le programme de HEC ?

3. Etudier les points d'inflexion de f_n.