PROBLÈME 1 | PARTIE A

**Q1** - $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ est la base canonique. On pose $E=\mathbb{C}^4$

Soit $u$ un élément de $E$ de matrice $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$. Soit $\lambda\in\mathbb{C}$.

$$g(u)=\lambda u \Leftrightarrow JX=\lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} y=\lambda x\\ z=\lambda y\\ t=\lambda z\\ x=\lambda t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\lambda x\\ z=\lambda y=\lambda^2 x\\ t=\lambda z=\lambda^3 x\\ x=\lambda t=\lambda^4 x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda^4)x=0\\ y=\lambda x\\ z=\lambda^2 x\\ t=\lambda^3 x\end{cases}.$$

1er cas. $\lambda^4\neq 1$.

$$g(u)=\lambda u \Leftrightarrow \begin{cases} x=0\\ y=\lambda x=0\\ z=\lambda^2 x=0\\ t=\lambda^3 x=0\end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=t=0 \Leftrightarrow u=0_E$$
. $\lambda$ n'est pas valeur propre de $g$.

2ème cas. $\lambda^4=1$

$$g(u)=\lambda u \Leftrightarrow \begin{cases} 0=0\\ y=\lambda x\\ z=\lambda^2 x\\ t=\lambda^3 x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\lambda x\\ z=\lambda^2 x\\ t=\lambda^3 x\end{cases}$$
. Par conséquent 1°. $\lambda$ est valeur propre de $g$. 2°. Le sous-espace propre de $g$ associé à la valeur propre $\lambda$ est la droite vectorielle $F_\lambda$ engendrée par $(e_1+\lambda e_2+\lambda^2 e_3+\lambda^3 e_4)$.

Remarquons maintenant que : $\lambda^4=1 \Leftrightarrow \lambda\in\{1,-1,i,-i\}$ et concluons.

1°. $\operatorname{Spec} g=\{1,-1,i,-i\}$.

2°. $F_1=\operatorname{Vect}(e_1+e_2+e_3+e_4)$ ; $F_{-1}=\operatorname{Vect}(e_1-e_2+e_3-e_4)$ ; $F_i=\operatorname{Vect}(e_1+ie_2-e_3-ie_4)$ et $F_{-i}=\operatorname{Vect}(e_1-ie_2-e_3+ie_4)$.

3°. $g$ est diagonalisable car $g$ admet quatre valeurs propres distinctes et $\dim E=4$.

$\boxed{\text{Posons } u_1=e_1+e_2+e_3+e_4,\ u_2=e_1-e_2+e_3-e_4,\ u_3=e_1+ie_2-e_3-ie_4 \text{ et } u_4=e_1-ie_2-e_3+ie_4.}$

$\mathcal{B}'=(u_1,u_2,u_3,u_4)$ est une base de $E$ constituée de vecteurs propres de $g$.

Notons que : $M_{\mathcal{B}'}(g)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&i&0\\0&0&0&-i\end{pmatrix}$ ; la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est $P=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-1&i&-i\\1&1&-1&-1\\1&-1&-i&i\end{pmatrix}$, $P^{-1}=\frac14\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&-i&-1&i\\1&i&-1&-i\end{pmatrix}$.

**Q2** a) $J^2=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$, $J^3=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$

... $J^4=I$ !

$$M_A=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3&a_4\\a_4&a_1&a_2&a_3\\a_3&a_4&a_1&a_2\\a_2&a_3&a_4&a_1\end{pmatrix}=a_1\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}+a_3\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}+a_4\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

Donc $M_A=a_1 I+a_2 J+a_3 J^2+a_4 J^3$ donc $f_A=a_1\,\mathrm{id}+a_2 g+a_3 g^2+a_4 g^3$.

b) Rappelons que : $M_{B'}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$ où $B' = (u_1, u_2, u_3, u_4)$.

Donc $M_{B'}(f_A) = M_{B'}(a_1 id + a_2 g + a_3 g^2 + a_4 g^3) = a_1 M_{B'}(id) + a_2 M_{B'}(g) + a_3 M_{B'}(g^2) + a_4 M_{B'}(g^3)$.

$M_{B'}(f_A) = a_1 I + a_2 M_{B'}(g) + a_3 M_{B'}(g^2) + a_4 M_{B'}(g^3)$.

$M_{B'}(f_A) = a_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + a_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}$

$$M_{B'}(f_A) = \begin{pmatrix} a_1+a_2+a_3+a_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1-a_2+a_3-a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1+ia_2-a_3-ia_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1-ia_2-a_3+ia_4 \end{pmatrix}$$

$Spec(f_A) = Spec(M_{B'}(f_A)) = \{a_1+a_2+a_3+a_4, a_1-a_2+a_3-a_4, a_1+ia_2-a_3-ia_4, a_1-ia_2-a_3+ia_4\}$.
↑ la matrice est diagonale !

<u>$Spec(f_A) = \{a_1+a_2+a_3+a_4, a_1-a_2+a_3-a_4, a_1+ia_2-a_3-ia_4, a_1-ia_2-a_3+ia_4\}$.</u>

<u>Remarque</u> : $f_A$ est diagonalisable car $M_{B'}(f_A)$ est une matrice diagonale.

<u>c)</u> $Spec(f_A) = \{4, 4, -2+4i, -2-4i\} = \{4, -2+4i, -2-4i\}$.

Notons aussi que : $M_{B'}(f_A) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2+4i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2-4i \end{pmatrix}$ $(B' = (u_1, u_2, u_3, u_4))$.

$u_1$ et $u_2$ sont deux vecteurs propres de $f_A$ associés à la valeur propre 4.
$u_3$ (resp. $u_4$) est un vecteur propre de $f_A$ associé à la valeur propre $-2+4i$ (resp. $-2-4i$).

Notons $H_4$, $H_{-2+4i}$, $H_{-2-4i}$ les sous-espaces propres de $f_A$ associés aux valeurs propres $4$, $-2+4i$ et $-2-4i$.

$Vect(u_1, u_2) \subset H_4$ donc $\dim H_4 \geq 2$ car $(u_1, u_2)$ est libre puisque $(u_1, u_2, u_3, u_4)$ est une base de E.

$Vect(u_3) \subset H_{-2+4i}$ et $Vect(u_4) \subset H_{-2-4i}$ ; $\dim H_{-2+4i} \geq 1$ (!) et $\dim H_{-2-4i} \geq 1$ (!!)

Comme $\dim H_4 + \dim H_{-2+4i} + \dim H_{-2-4i} = 4$ car $f_A$ est diagonalisable, nécessairement :

$\dim H_4 = 2$ et $\dim H_{-2+4i} = \dim H_{-2-4i} = 1$. Finalement : $H_4 = Vect(u_1, u_2)$, $H_{-2+4i} = Vect(u_3)$, $H_{-2-4i} = Vect(u_4)$.

$\operatorname{Spec} f_A = \{4, -2+4i, -2-4i\}$. $\underline{\underline{H_4 = \operatorname{Ker}(f_A - 4\,id) = \operatorname{Vect}(e_1+e_2+e_3+e_4,\ e_1-e_2+e_3-e_4)}}$. $\dim H_4 = 2$

$\underline{\underline{H_{-2+4i} = \operatorname{Ker}(f_A - (-2+4i)\,id) = \operatorname{Vect}(e_1+ie_2-e_3-ie_4)}}$.

$\underline{\underline{H_{-2-4i} = \operatorname{Ker}(f_A - (-2-4i)\,id) = \operatorname{Vect}(e_1-ie_2-e_3+ie_4)}}$.

| PROBLÈME | PARTIE B |
|---|---|

Q1 $\exists X \in \mathbb{C}^4,\ f_A(X) = 0_{\mathbb{C}^4}$ et $X \neq 0_{\mathbb{C}^4} \Leftrightarrow \operatorname{Ker} f_A \neq \{0_{\mathbb{C}^4}\} \Leftrightarrow \underline{\underline{0 \in \operatorname{Spec} f_A}}$.

Or $\operatorname{Spec} f_A = \{a_1+a_2+a_3+a_4,\ a_1-a_2+a_3-a_4,\ a_1+ia_2-a_3-ia_4,\ a_1-ia_2-a_3+ia_4\}$

avec $a_1 = \alpha$, $a_2 = \alpha+\beta$, $a_3 = \alpha+2\beta$ et $a_4 = \alpha+3\beta$.

$a_1+a_2+a_3+a_4 = 4\alpha+6\beta$ ; $a_1-a_2+a_3-a_4 = -2\beta$ ; $a_1+ia_2-a_3-ia_4 = -2\beta-2\beta i = 2\beta(-1-i)$

et $a_1-ia_2-a_3+ia_4 = -2\beta+2\beta i = 2\beta(-1+i)$

Rappelons que $\beta$ n'est pas nul, donc $-2\beta \neq 0$, $-2\beta-2\beta i \neq 0$ et $-2\beta+2\beta i \neq 0$.

Donc $0 \in \operatorname{Spec} f_A \Leftrightarrow 4\alpha+6\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{3}{2}\beta$.

$\underline{\underline{\exists X \in \mathbb{C}^4,\ f_A(X) = 0_{\mathbb{C}^4} \text{ et } X \neq 0_{\mathbb{C}^4} \Leftrightarrow \alpha = -\frac{3}{2}\beta}}$. Notons que pour $\alpha = -\frac{3}{2}\beta$ : $A = \frac{1}{2}(-3\beta, -\beta, \beta, 3\beta)$

$A = \frac{\beta}{2}(-3, -1, 1, 3)$.

Q2 Remarquons que $M_A M_B = 0_{M_4(\mathbb{C})}$ signifie que $f_A \circ f_B = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^4)}$ ce qui

signifie encore $M_{B'}(f_A) M_{B'}(f_B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Rappelons que si $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ alors $M_{B'}(f_A) = \begin{pmatrix} a_1+a_2+a_3+a_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1-a_2+a_3-a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1+ia_2-a_3-ia_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1-ia_2-a_3+ia_4 \end{pmatrix}$

Donc $M_A M_B = 0_{M_4} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4\alpha+6\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\beta(1+i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\beta(1-i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4u+6v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2v(1+i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2v(1-i) \end{pmatrix} = 0_{M_4(\mathbb{C})}$

Donc $M_A M_B = 0_{M_4(\mathbb{C})} \overset{\text{ok?}}{\Leftrightarrow} (4\alpha+6\beta)(4u+6v) = (-2\beta)(-2v) = (-2\beta)(1+i)(-2v)(1+i) = (-2\beta)(1-i)(-2v)(1-i) = 0$

$M_A M_B = 0_{M_4(\mathbb{C})} \Leftrightarrow (2\alpha+3\beta)(2u+3v) = \beta v = 0$.

Donc $\underline{\underline{\beta \neq 0 \text{ et } u \neq 0 \text{ et } M_A M_B = 0_{M_4(\mathbb{C})} \Leftrightarrow \beta \neq 0 \text{ et } u \neq 0 \text{ et } v = 0 \text{ et } 2\alpha+3\beta = 0}}$.

On peut donc prendre : $\alpha = 3$, $\beta = -2$, $u = 37$ et $v = 0$.

## I Calcul de $I_1$.

Q1.. Posons $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{1+x^3}$. $\varphi$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc localement intégrable sur cet intervalle.

De plus $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi(x) > 0$ et $\varphi(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^3}$. Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$ converge, il en est de même de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$ et donc de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$.

Q2.. Soit $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$, $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{x-2}{x^2-x+1}\right) = \dfrac{1}{3} \dfrac{x^2-x+1-x^2+2x-x+2}{(x+1)(x^2-x+1)} = \dfrac{1}{3} \dfrac{3}{x^3+1} = \dfrac{1}{x^3+1}$

Donc $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$, $\dfrac{1}{1+x^3} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{x-2}{x^2-x+1}\right)$.

Q3.. Cette question est humiliante (dans sa 1ère partie) !

Notons que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x+1} - 2\sqrt{3} \times \dfrac{2}{\sqrt{3}} \times \dfrac{1}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \dfrac{2x-1}{x^2-x+1} - \dfrac{4}{\frac{3+4x^2-4x+1}{3}}$

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x+1} - \dfrac{3 \times 4}{4(x^2-x+1)} = \dfrac{2x-1-3}{x^2-x+1}$

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = \dfrac{2(x-2)}{x^2-x+1}$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\dfrac{1}{1+x^3} = \dfrac{1}{3} \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{6} f'(x)$

$\forall A \in \mathbb{R}_+$, $\displaystyle\int_0^A \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{6}\Big[2\ln|x+1| - f(x)\Big]_0^A = \frac{1}{6}\Big[2\ln|A+1| - \ln|A^2-A+1| + 2\sqrt{3}\,\mathrm{Arctan}\frac{2A-1}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{3}\,\mathrm{Arctan}\frac{-1}{\sqrt{3}}$

$\forall A \in \mathbb{R}_+$, $\displaystyle\int_0^A \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{6}\left[\ln\left[\frac{(A+1)^2}{A^2-A+1}\right] + 2\sqrt{3}\,\mathrm{Arctan}\frac{2A-1}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{3}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \ln\left[\frac{(A+1)^2}{A^2-A+1}\right] = 0$ ; $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \mathrm{Arctan}\frac{2A-1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2}$. Donc $I_1 = \dfrac{1}{6}\left[2\sqrt{3}\dfrac{\pi}{2} + 2\sqrt{3}\dfrac{\pi}{6}\right] = \dfrac{2\sqrt{3}}{6}\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{6}\right)$

$I_1 = \dfrac{2\sqrt{3}\pi}{9}$

## II Etude de la suite $(I_n)_{n \geq 1}$

Q1.. Voir I Q1 !!

(Q2). Soit $A \in \mathbb{R}_+$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\int_0^A \frac{dx}{(1+x^3)^n} = \int_0^A (1+x^3)^{-n} dx = \left[x(1+x^3)^{-n}\right]_0^A - \int_0^A x(-n)(3x^2)(1+x^3)^{-n-1} dx$$

$$\int_0^A \frac{dx}{(1+x^3)^n} = \frac{A}{(1+A^3)^n} + 3n\int_0^A \frac{x^3}{(1+x^3)^{n+1}} dx = \frac{A}{(1+A^3)^n} + 3n\int_0^A \frac{1+x^3-1}{(1+x^3)^{n+1}} dx$$

$$\int_0^A \frac{dx}{(1+x^3)^n} = \frac{A}{(1+A^3)^n} + 3n\int_0^A \frac{dx}{(1+x^3)^n} - 3n\int_0^A \frac{dx}{(1+x^3)^{n+1}}.$$

Par passage à la limite on obtient $I_n = 0 + 3n I_n - 3n I_{n+1}$

Par conséquent : $\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 3n I_{n+1} = (3n-1) I_n}$

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{(1+x^3)^n} \geq 0$ ; donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \geq 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} - I_n = \left(\frac{3n-1}{3n} - 1\right) I_n = -\frac{1}{3n} I_n \leq 0$.

La suite $(I_n)_{n\geq 1}$ est donc décroissante et minorée par 0 ; elle converge.

(Q3). Soit $a \in ]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$\forall x \in [0,a]$, $(1+x^3)^n \geq 1$. $\forall x \in [0,a]$, $\frac{1}{(1+x^3)^n} \leq 1$ ; $\int_0^a \frac{dx}{(1+x^3)^n} \leq \int_0^a dx = a$.

$\forall x \in [a,1]$, $(1+x^3)^n \geq (1+a^3)^n$. $\forall x \in [a,1]$, $\frac{1}{(1+x^3)^n} \leq \frac{1}{(1+a^3)^n}$ ; $\int_a^1 \frac{dx}{(1+x^3)^n} \leq \int_a^1 \frac{dx}{(1+a^3)^n} = \frac{1-a}{(1+a^3)^n}$

$\forall x \in [1,+\infty[$, $\frac{1}{(1+x^3)^n} \leq \frac{1}{x^{3n}}$ ;

de plus les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^n}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3n}}$ sont convergentes ; par conséquent :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^n} \leq \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3n}} = \left[\frac{x^{-3n+1}}{-3n+1}\right]_1^{+\infty} = -\frac{1}{-3n+1} = \frac{1}{3n-1}.$$

Finalement $\underline{\underline{\forall a \in ]0,1[,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^a \frac{1}{(1+x^3)^n} dx \leq a,\ \int_a^1 \frac{1}{(1+x^3)^n} dx \leq \frac{1-a}{(1+a^3)^n},\ \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^3} \leq \frac{1}{3n-1}.}}$

(Q4). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall a \in ]0,1[$, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n} dx = \int_0^a \frac{1}{(1+x^3)^n} dx + \int_a^1 \frac{1}{(1+x^3)^n} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n} dx$

Donc $0 \leq I_n \leq a + \frac{1-a}{(1+a^3)^n} + \frac{1}{3n-1}$ pour tout $a \in ]0,1[$.

Donc $0 \leq \lim_{n\to+\infty} I_n \leq a$ pour tout $a \in ]0,1[$ car $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(1+a^3)^n} \overset{1+a>1}{=} 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3n-1} = 0$.

$\forall a \in ]0,1[$, $0 \leq \lim_{n\to+\infty} I_n \leq a$ ; en faisant tendre $a$ vers 0 on obtient : $\underline{\underline{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}}$.

Remarque.. Se souvenir de cette méthode.

III (Q1) a] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $w_n = v_{n+1} - v_n = \ln u_{n+1} - \ln u_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\frac{(n+1)^{1/3} I_{n+1}}{n^{1/3} I_n}\right)$ p3

$w_n = \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/3} \times \frac{3n-1}{3n}\right) = \frac{1}{3}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{3n}\right)$.

Rappel.. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

$$\frac{1}{3}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{3n}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2\right) - \frac{1}{3n} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Donc $w_n = -\frac{1}{6n^2} - \frac{1}{18n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ; $w_n = -\frac{2}{9} \times \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

En particulier $w_n \sim -\frac{2}{9} \times \frac{1}{n^2}$

$-w_n \sim \frac{2}{9} \times \frac{1}{n^2}$ et la série de terme général $\frac{2}{9} \times \frac{1}{n^2}$ est à termes positifs et convergente ; par conséquent la série de terme général $-w_n$ est convergente. Celle de terme général $w_n$ aussi.

b] La suite de terme général $v_n$ étant de même nature que la série de terme général $v_{n+1} - v_n = w_n$, elle est convergente. Posons $\ell = \lim_{n\to+\infty} v_n$.

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} e^{\ln u_n} = \lim_{n\to+\infty} e^{v_n} = e^{\ell}$. Posons $k = e^{\ell}$

$k > 0$ et $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers $k$. C'est ce qu'il fallait prouver.

c] $\lim_{n\to+\infty} u_n = k > 0$ ; $u_n \sim k$ ; $n^{1/3} I_n \sim k$ ; $I_n \sim \frac{k}{n^{1/3}}$.

La série de terme général $I_n$ est donc divergente ($1/3 \leq 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n > 0$ !).

(Q2) a] Non ! $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|a_n| = |(-1)^{n-1} I_n| = I_n$. La série de terme général $|a_n|$ est donc divergente. La série de terme général $a_n$ n'est donc pas absolument convergente.

b] Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^k} = \int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{(1+x^3)^k}\, dx.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{(1+x^3)^k} = -\sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{1}{1+x^3}\right)^k \underset{-\frac{1}{1+x^3} \neq 1}{=} -\left[\frac{1 - \left(-\frac{1}{1+x^3}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{1+x^3}\right)}\right] \times \left(-\frac{1}{1+x^3}\right) = \frac{1 - \frac{(-1)^n}{(1+x^3)^n}}{1 + \frac{1}{1+x^3}}\ \frac{1}{1+x^3}$$

Donc $$A_n = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \frac{(-1)^n}{(1+x^3)^n}}{1 + \frac{1}{1+x^3}} \times \frac{1}{1+x^3}\, dx$$

c] Montrer que la série de terme général $a_n$ converge c'est montrer que la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ A_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\frac{(-1)^n}{(1+x^3)^n}}{1+\frac{1}{1+x^3}} \times \frac{1}{1+x^3}\,dx = \int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{2+x^3} - \frac{(-1)^n}{(1+x^3)^n}\times\frac{1}{2+x^3}\right]dx$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$

$\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad \left|\dfrac{(-1)^n}{(1+x^3)^n}\times\dfrac{1}{2+x^3}\right| = \dfrac{1}{(1+x^3)^n}\times\dfrac{1}{2+x^3} \leq \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{(1+x^3)^n}$

ceci montre que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(1+x^3)^n}\times\frac{1}{2+x^3}\,dx$ est absolument convergente ; elle est donc

convergente et $\displaystyle\left|\int_0^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(1+x^3)^n}\times\frac{1}{2+x^3}\,dx\right| \leq \int_0^{+\infty}\left|\frac{(-1)^n}{(1+x^3)^n}\times\frac{1}{2+x^3}\right|dx \leq \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^3)^n} = \frac{1}{2}I_n$

Par conséquent : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left[\int_0^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(1+x^3)^n}\times\frac{1}{2+x^3}\,dx\right] = 0$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \displaystyle A_n = \int_0^{+\infty}\frac{1}{2+x^3}\,dx - \int_0^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(1+x^3)^n}\times\frac{1}{2+x^3}\,dx$ (les deux intégrales convergent).

Donc $\displaystyle\underline{\lim_{n\to+\infty}A_n = \int_0^{+\infty}\frac{1}{2+x^3}\,dx}$

Par conséquent $(A_n)_{n\geq1}$ converge. Finalement la série de terme général $a_n$ converge.

Mieux $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}a_k = \int_0^{+\infty}\frac{1}{2+x^3}\,dx.$

d. Soit $A\in\mathbb{R}_+^*$

$$\int_0^{A}\frac{1}{t^3+x^3}\,dx = \frac{1}{t^3}\int_0^{A}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{t}\right)^3}\,dx \underset{\substack{\uparrow\\ u=\frac{x}{t}\quad du=\frac{1}{t}dx}}{=} \frac{1}{t^3}\int_0^{A/t}\frac{1}{1+u^3}\,t\,du = \frac{1}{t^2}\int_0^{A/t}\frac{1}{1+u^3}\,du$$

$\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_0^{A/t}\frac{du}{1+u^3} = \int_0^{+\infty}\frac{du}{1+u^3} = I_1$

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^3+x^3}\,dx$ converge et vaut $\dfrac{1}{t^2}I_1$.

$\forall t\in\mathbb{R}_+^*,\quad \displaystyle\underline{\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^3+x^3}\,dx = \frac{1}{t^2}\,\frac{2\sqrt{3}\,\pi}{9}}.$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n = \int_0^{+\infty}\frac{1}{2+x^3}\,dx = \int_0^{+\infty}\frac{1}{(\sqrt[3]{2})^3+x^3}\,dx = \frac{1}{(\sqrt[3]{2})^2}\,\frac{2\sqrt{3}\,\pi}{9} = \frac{\sqrt[3]{2}\,\sqrt{3}\,\pi}{9}.$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}a_n = \frac{\sqrt[3]{2}\,\sqrt{3}\,\pi}{9}}$$