Q1.. Soit $k \in [\![0,n]\!]$. $t \mapsto t^k e^t$ est continue donc localement intégrable sur $]-\infty, 0]$.

$\lim\limits_{t \to -\infty} (t^2 t^k e^t) = 0$; $\exists A \in \mathbb{R}^*_-$, $\forall t \in]-\infty, A]$, $|t^2 t^k e^t| \leq 1$

$\forall t \in]-\infty, A]$, $0 \leq |t^k e^t| \leq \frac{1}{t^2}$

Or $\int_{-\infty}^{A} \frac{dt}{t^2}$ converge ; par conséquent : $\int_{-\infty}^{A} |t^k e^t| dt$ converge (règles de comparaison pour les intégrales généralisées des fonctions positives).

Donc $\int_{-\infty}^{A} t^k e^t \, dt$ est absolument convergente donc convergente.

Par conséquent : $\int_{-\infty}^{0} t^k e^t \, dt$ existe pour tout $k \in [\![0,n]\!]$.

Q2.. Soit f un élément de $E = \mathbb{R}_n[X]$. $\exists (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $f = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k f_k$

f est continue sur $\mathbb{R}$. Donc $t \mapsto f(t)e^t$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent : $\int_0^x f(t)e^t \, dt$ existe pour tout réel x.

$\forall t \in]-\infty, 0]$, $f(t)e^t = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k (t^k e^t)$. Comme pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\int_{-\infty}^{0} t^k e^t \, dt$ existe : $\int_{-\infty}^{0} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k (t^k e^t)\right) dt$ aussi ! $\int_{-\infty}^{0} f(t)e^t \, dt$ converge.

Par conséquent pour tout réel x, $\int_{-\infty}^{x} f(t)e^t \, dt$ existe ; $x \mapsto e^{-x}\int_{-\infty}^{x} f(t)e^t \, dt$ est donc une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Q3 a) Soit $x \in \mathbb{R}$. $L(f_0)(x) = e^{-x}\int_{-\infty}^{x} e^t \, dt = e^{-x} \lim\limits_{A \to -\infty} \left(\int_A^x e^t \, dt\right) = e^{-x} \times \lim\limits_{A \to -\infty} (e^x - e^A) = e^{-x}e^{x} = 1$

$\hookrightarrow \int_{-\infty}^{x} e^t \, dt = e^x$

$L(f_0) = 1$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $\int_{-\infty}^{x} te^t \, dt = \lim\limits_{A \to -\infty} \left(\int_A^x te^t \, dt\right) = \lim\limits_{A \to -\infty} \left[[te^t]_A^x - \int_A^x e^t \, dt \right] = xe^x - e^x$

Donc $L(f_1)(x) = e^{-x}\int_{-\infty}^{x} te^t \, dt = x - 1$; $L(f_1) = -f_0 + f_1$

Soit $x \in \mathbb{R}$. $\int_{-\infty}^{x} t^2 e^t \, dt = \lim\limits_{A \to -\infty} \left(\int_A^x t^2 e^t \, dt\right) = \lim\limits_{A \to -\infty} \left([t^2 e^t]_A^x - 2\int_A^x te^t \, dt\right) = x^2 e^x - 2\int_{-\infty}^{x} te^t \, dt$

$\int_{-\infty}^{x} t^2 e^t \, dt = x^2 e^x - 2(xe^x - e^x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$

$L(f_2)(x) = e^{-x}\int_{-\infty}^{x} t^2 e^t dt = (x^2-2x+2)$. $\underline{L(f_2) = 2f_0 - 2f_1 + f_2}$

b) Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$ et soit $x \in \mathbb{R}$.

Soit $A \in]-\infty, 0]$. $\int_A^x t^{k+1}e^t dt = [t^{k+1}e^t]_A^x - \int_A^x (k+1)t^k e^t dt = x^{k+1}e^x - A^{k+1}e^A - (k+1)\int_A^x t^k e^t dt$

En faisant tendre A vers $-\infty$ on obtient : $\int_{-\infty}^x t^{k+1}e^t dt = x^{k+1}e^x - (k+1)\int_{-\infty}^x t^k e^t dt$ (les intégrales convergent)

En multipliant par e^{-x} il vient : $L(f_{k+1})(x) = x^{k+1} - (k+1)L(f_k)(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $L(f_{k+1})(x) = f_{k+1}(x) - (k+1)L(f_k)(x)$.

Donc : $\underline{\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ L(f_{k+1}) = f_{k+1} - (k+1)L(f_k)}$.

Déduisons en que $L(f_k) = (-1)^k k! \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{j!} f_j$ (pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, comme à la conception !)

Si $k=0$ c'est clair ; supposons $k \in [\![1, n]\!]$.

$\forall j \in [\![0, k-1]\!]$, $L(f_{j+1}) = f_{j+1} - (j+1)L(f_j)$.

$\forall j \in [\![0, k-1]\!]$, $\frac{L(f_{j+1})}{(j+1)!} + \frac{L(f_j)}{j!} = \frac{f_{j+1}}{(j+1)!}$ (division par $(j+1)!$)

$\forall j \in [\![0, k-1]\!]$, $\frac{(-1)^{j+1}L(f_{j+1})}{(j+1)!} - \frac{(-1)^j L(f_j)}{j!} = \frac{(-1)^{j+1}f_{j+1}}{(j+1)!}$ (multiplication par $(-1)^{j+1}$)

Donc : $\sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{(-1)^{j+1}L(f_{j+1})}{(j+1)!} - \frac{(-1)^j L(f_j)}{j!}\right) = \sum_{j=0}^{k-1}\frac{(-1)^{j+1}f_{j+1}}{(j+1)!}$

ou : $\frac{(-1)^{k-1+1}L(f_k)}{k!} - \frac{(-1)^0 L(f_0)}{0!} = \sum_{j=0}^{k-1}\frac{(-1)^{j+1}f_{j+1}}{(j+1)!} = \sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^j f_j}{j!}$

Il vient alors $\frac{(-1)^k L(f_k)}{k!} = f_0 + \sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^j f_j}{j!} = \sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^j}{j!} f_j$

Donc $L(f_k) = \frac{k!}{(-1)^k}\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^j}{j!} f_j$

Et finalement $\underline{L(f_k) = (-1)^k k! \sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^j}{j!} f_j \text{ et ceci pour tout } k \in [\![0, n]\!]}$.

Remarque : s'obtient aussi à l'aide d'une petite récurrence.

c) Soit $f = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k \in E$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $L(f)(x) = e^{-x}\int_{-\infty}^{x} \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(t) e^t dt \overset{\text{les } n \text{ intégrales convergent.}}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k \, e^{-x}\int_{-\infty}^{x} \varphi_k(t) e^t dt = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k L(\varphi_k)\right)(x)$

$\forall k \in [\![0,n]\!]$, $L(\varphi_k) = (-1)^k k! \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{j!} \varphi_j \in E$

donc $L(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k L(\varphi_k) \in E$

$\forall f \in E$, $L(f) \in E$.

Q4.. a) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(f,g) \in E^2$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $[L(\lambda f + g)](x) = e^{-x}\int_{-\infty}^{x} (\lambda f + g)(t) e^t dt \overset{\text{les intégrales cvg}}{=} \lambda e^{-x}\int_{-\infty}^{x} f(t)e^t dt + e^{-x}\int_{-\infty}^{x} g(t) e^t dt$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $[L(\lambda f + g)](x) = \lambda L(f)(x) + L(g)(x) = (\lambda L(f) + L(g))(x)$.

donc $L(\lambda f + g) = \lambda L(f) + L(g)$

donc L est un endomorphisme de E

Soit $f \in \mathrm{Ker}\, L$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x}\int_{-\infty}^{x} f(t)e^t dt = 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{x} f(t) e^t dt = 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{0} f(t)e^t dt + \int_{0}^{x} f(t) e^t dt = 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_0^x f(t) e^t dt = -\int_{-\infty}^{0} f(t) e^t dt$; $x \mapsto \int_0^x f(t)e^t dt$ est donc constante sur $\mathbb{R}$ et est la

primitive de $t \mapsto f(t)e^t$ qui s'annule en 0, donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) e^x = 0$ (la dérivée d'une

fonction constante est nulle). Par conséquent : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$. $f = 0_E$.

Donc $\mathrm{Ker}\, L = \{0_E\}$.

L est alors injectif et donc bijectif car L est un endomorphisme de E et $\dim E = n+1 < +\infty$!

<u>Remarque</u>.. Arrêtons nous quelques instants pour stigmatiser
le côté artificiel et BIDON de cet exercice.

De quoi parle-t-on ? De pas grand chose ! En effet déterminons L^{-1}

Soit $g \in E$ et $f = L^{-1}(g)$.

$g = L(f)$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = e^{-x}\int_{-\infty}^{x} f(t)e^t dt$; $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x g(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) e^t dt$

Résumons ; $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x g(x) + e^x g'(x) = f(x) e^x$

Il vient alors $f(x) = g(x) + g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc $\underline{\underline{\forall g \in E, L^{-1}(g) = g + g'}}$. En clair $L^{-1} = Id_E + D$ où D est l'opérateur de dérivation ! Indigestion ! mais le plus beau est à venir.

b) Rappelons que $\forall \ell \in [\![0,n]\!]$, $L(p_\ell) = (-1)^\ell \ell! \sum_{j=0}^{\ell} \frac{(-1)^j}{j!} p_j$

Donc si $\mathcal{B} = (p_0, p_1, \dots, p_n)$: $M = M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & \cdots & (-1)^\ell \ell! & \cdots & (-1)^n n! \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & (-1)^{\ell+1}\ell! & \cdots & (-1)^{n+1} n! \\ 0 & 0 & 1 & & (-1)^{\ell+2}\frac{\ell!}{2!} & \cdots & (-1)^{n+2}\frac{n!}{2!} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & & & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & & & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Notons bien que $M \in \mathcal{M}_{\underline{\underline{n+1}}}(\mathbb{R})$.

M est une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale est constituée de 1

Ceci donne donc de l'inversibilité à M ce qui était déjà clair car M est la matrice d'un automorphisme de E.

$M^{-1} = M_{\mathcal{B}}(L^{-1})$. $\underline{L^{-1}(p_0) = p_0}$ car $L(p_0) = p_0$

Soit $\ell \in [\![0, n-1]\!]$. $L(p_{\ell+1}) = p_{\ell+1} - (\ell+1) L(p_\ell)$ donc

$\forall \ell \in [\![0, n-1]\!]$, $p_{\ell+1} = L^{-1}(p_{\ell+1}) - (\ell+1) p_\ell$

$\forall \ell \in [\![0, n-1]\!]$, $L^{-1}(p_{\ell+1}) = p_{\ell+1} + (\ell+1) p_\ell = (\ell+1) p_\ell + p_{\ell+1}$

Ceci donne $\underline{\underline{\forall \ell \in [\![1, n]\!], \quad L^{-1}(p_\ell) = \ell p_{\ell-1} + p_\ell}}$.

Ceci confirme le $L^{-1} = Id_E + D$!

$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & (0) \\ & 1 & 2 & \\ & & \ddots & n \\ (0) & & & 1 \end{bmatrix}$ (matrice triangulaire à diagonale unité ... par surprise ... M ...)

<u>Exercice</u> .. Inverser M^{-1} en résolvant un système (réponse : on retrouve M !! mais la résolution du système est intéressante à mettre en forme).

Q5.. L'apothéose ! Camarade concepteur l'algèbre <u>LINEAIRE</u> n'est pas compatible avec l'usage immodéré de la boisson

En effet Q4 b) donne $Sp(M) = \{1\}$. Alors si M est diagonalisable,

Π est semblable à I_{n+1} donc égale à I_{n+1} ($PI_{n+1}P^{-1}=I_{n+1}$!!) ce qui n'est pas !
Donc Π n'est pas diagonalisable. L ne l'est pas davantage.
Plus résoudre une équation différentielle pour prouver cela est incroyable.
Mais... spéculons vous !

a) $\lambda \in \mathrm{Spec}\,L$ et f est un vecteur propre de L associé à λ.
$0 \notin \mathrm{Spec}\,L$ car L est injective ($\mathrm{Ker}\,(f-0.\mathrm{Id}_E)=\mathrm{Ker}\,f=\{0_E\}$).
$L(f)=\lambda f$. $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^{-x}\int_{-\infty}^{x} f(t)e^{t}\,dt=\lambda f(x)$
$\forall x\in\mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{x} f(t)e^{t}\,dt=\lambda e^{x} f(x)$. Par dérivation (déjà justifiée) :

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)e^{x}=\lambda e^{x}f(x)+\lambda e^{x}f'(x)$. $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\lambda f(x)+\lambda f'(x)$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $(1-\lambda)f(x)=\lambda f'(x)$.
$\forall x\in\mathbb{R}$, $\varphi(x)=e^{\frac{\lambda-1}{\lambda}x}f(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}$, $\varphi'(x)=\frac{\lambda-1}{\lambda}e^{\frac{\lambda-1}{\lambda}x}f(x)+e^{\frac{\lambda-1}{\lambda}x}f'(x)=-\frac{1}{\lambda}e^{\frac{\lambda-1}{\lambda}x}\underbrace{((1-\lambda)f(x)-\lambda f'(x))}_{=0}$

Donc $\forall x\in\mathbb{R}$, $\varphi'(x)=0$. φ est donc constante. $\exists c\in\mathbb{R}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $\varphi(x)=c$

b) Ceci donne alors $\forall x\in\mathbb{R}$, $\underline{f(x)=c\,e^{\frac{1-\lambda}{\lambda}x}}$. c n'est pas nul car $f\neq 0_E$.

Si $\frac{1-\lambda}{\lambda}>0$, f admet une limite nulle en $-\infty$ et infinie en $+\infty$, ceci est incompatible avec le caractère polynômiale de f (si $P\in\mathbb{R}[X]$ ou P admet une limite finie en $+\infty$ ET $-\infty$ ou P admet une limite infinie en $+\infty$ ET $-\infty$; OK?!)

Si $\frac{1-\lambda}{\lambda}<0$, f admet une limite infinie en $-\infty$ et nulle en $+\infty$, ceci est impossible car $f\in E$.

Donc $\frac{1-\lambda}{\lambda}=0$! $\lambda=1$ ... et $f\in\mathrm{Vect}(1)=\mathrm{Vect}(f_0)$

Ceci prouve que 1°.. $\mathrm{Spec}\,(L)\subset\{1\}$
2°.. $F_1=\mathrm{Ker}\,(f-\mathrm{Id}_E)\subset\mathrm{Vect}(f_0)$.

Or $f(f_0)=f_0$ et $f_0\neq 0_E$ donc $1\in\mathrm{Spec}(L)$ et $f_0\in F_1$ (ou $\mathrm{Vect}(f_0)\subset F_1$).
"Articulation fondamentale"

Conclusion.. $\mathrm{Spec}\ L=\{1\}$ et $F_1=\mathrm{Ker}\,(f-\mathrm{Id}_E)=\mathrm{Vect}(f_0)$.
L n'est pas diagonalisable car $\dim F_1=1<n+1=\dim E$.

Remarque.. Vous souvenez-vous qu'en S1 à LYON on diagonalisait un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ dont la matrice dans la base canonique était diagonale !! Guignol n'est toujours pas mort.

PROBLÈME 2

PARTIE A

(Q1) $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ v_n = u_{n+1}-u_n = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{1/n}{1+1/n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$

$\frac{1}{1+x} = 1-x+o(x)$ au voisinage de 0 ; $\frac{x}{1+x} = x-x^2+o(x^2)$.

$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$. Alors $\frac{x}{1+x} - \ln(1+x) = x-x^2-x+\frac{x^2}{2}+o(x^2) = -\frac{x^2}{2}+o(x^2)$.

Ainsi $\frac{x}{1+x} - \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$.

Alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$.

(Q2) $-v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} +\frac{1}{2n^2}$; $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{1}{2n^2}\geq 0$ et la série de terme général $\frac{1}{2n^2}$ converge ; les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent alors que la série de terme général $-v_n$ converge.

La série de terme général v_n converge.

(Q3) Posons $V=\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$.

$\forall n\in[\![2,+\infty[\![,\ u_n-u_1 = \sum_{k=1}^{n-1}(u_{k+1}-u_k) = \sum_{k=1}^{n-1} v_k$; $\forall n\in[\![2,+\infty[\![,\ u_n = u_1+\sum_{k=1}^{n-1} v_k$

$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n-1} v_k = V$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = u_1+V$.

Ainsi la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge. On pose désormais $\gamma = \lim_{n\to+\infty} u_n$

Pour les amateurs : $\gamma \simeq 0,577\ 215\ 664\ 901\ 532\ 860\ 606\ 512\ 090$
$082\ 402\ 431\ 042\ 159\ 335\ 939\ 923\ 598$
$805\ 767\ 234\ 884\ 867\ 726\ 777\ 664\ 670$
$936\ 947\ 063\ 291\ 746\ 749\ 514\ 631\ 447$
$249\ \delta\ (\pm 10^{-112})$.

PARTIE B

(Q1) $i : x \mapsto \frac{1-e^{-x}}{x}$ est continue sur $]0,1]$ et $i(x) \underset{0}{\sim} \frac{x}{x} = 1$.

$\lim_{x \to 0} i(x) = 1$. i est prolongeable par continuité en 0, $I = \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}\,dx$ converge.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $i_n : x \mapsto \frac{1}{x}\left(1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right)$ est continue sur $]0,1]$.

$\lim_{x\to 0} \frac{x}{n} = 0$ donc $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n - 1 \underset{0}{\sim} n \times \left(-\frac{x}{n}\right) = -x$; $i_n(x) \underset{0}{\sim} \frac{-(-x)}{x} = 1$, $\lim_{x \to 0} i_n(x) = 1$.

i_n est prolongeable par continuité en 0. $I_n = \int_0^1 \frac{1}{x}\left(1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right) dx$ converge.

(Q2) a) $\ln$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$. Sa courbe est en-dessous de toutes ses tangentes, en particulier de celle au point d'abscisse 1 qui a pour équation $y = \ln'1\,(x-1) + \ln 1$ ou $y = x-1$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln x \leq x - 1$ ou $\forall t \in]-1,+\infty[$, $\ln(1+t) \leq t$.

b) Soit $x \in [0,n[$; $-\frac{x}{n} > -1$; $\ln\left(1-\frac{x}{n}\right) \leq -\frac{x}{n}$; $n \ln\left(1-\frac{x}{n}\right) \leq -x$;

$\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \leq -x$. La croissance de la fonction exp donne $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x}$.

Notons que cette inégalité vaut encore pour $x = n$ $(0 \leq e^{-n}\,!)$

Ainsi $\forall x \in [0,n]$, $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x}$.

c) $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall x \in [0,\sqrt{n}[$, $1-\frac{x}{n} > 0$ et $1 - \frac{x^2}{n} > 0$.

Ainsi φ_n est définie et dérivable sur $[0,\sqrt{n}[$.

$$\forall x \in [0,\sqrt{n}[,\ \varphi_n'(x) = 1 + n\frac{(-1/n)}{1-\frac{x}{n}} - \frac{(-2x/n)}{1-x^2/n} = 1 - \frac{n}{n-x} + \frac{2x}{n-x^2}.$$

$$\forall x \in [0,\sqrt{n}[,\ \varphi_n'(x) = \frac{1}{(n-x)(n-x^2)}\left((n-x)(n-x^2) - n(n-x^2) + 2x(n-x)\right)$$

$$\forall x \in [0,\sqrt{n}[,\ \varphi_n'(x) = \frac{1}{(n-x)(n-x^2)}\left(n^2 - nx^2 - nx + x^3 - n^2 + nx^2 + 2xn - 2x^2\right)$$

$\forall x \in [0,\sqrt{n}[,\ \varphi_n'(x) = \dfrac{x}{(n-x)(n-x^2)}(x^2-2x+n) = \dfrac{x}{(n-x)(n-x^2)}\left[(x-1)^2+n-1\right] \geqslant 0.$

φ_n est croissante sur $[0,\sqrt{n}[$.

Ainsi $\forall x \in [0,\sqrt{n}]$, $0=\varphi_n(0) \leq \varphi_n(x) = x + n\ln(1-\frac{x}{n}) - \ln(1-\frac{x^2}{n})$.

$\forall x \in [0,\sqrt{n}[$, $\ln(1-\frac{x}{n})^n \geqslant \ln(1-\frac{x^2}{n}) - x = \ln((1-\frac{x^2}{n})e^{-x})$.

Alors $\forall x \in [0,\sqrt{n}[$, $(1-\frac{x}{n})^n \geqslant (1-\frac{x^2}{n})e^{-x}$.

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,n]$.

1er cas. $x \in [0,\sqrt{n}[$. c) donne alors $(1-\frac{x^2}{n})e^{-x} \leq (1-\frac{x}{n})^n$

2e cas. $x \in [\sqrt{n},n]$.

Alors $(1-\frac{x^2}{n})e^{-x} \leq 0$ et $(1-\frac{x}{n})^n \geqslant 0$ donc $(1-\frac{x^2}{n})e^{-x} \leq (1-\frac{x}{n})^n$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,n]$, $(1-\frac{x^2}{n})e^{-x} \leq (1-\frac{x}{n})^n$.

(Q3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$\forall x \in]0,1]$, $\frac{1}{x} > 0$ et $1-(1-\frac{x}{n})^n \overset{\text{Q2 d)}}{\leq} 1-(1-\frac{x^2}{n})e^{-x} = 1-e^{-x}+\frac{x^2}{n}e^{-x}$.

$\forall x \in]0,1]$, $\frac{1}{x}\left(1-(1-\frac{x}{n})^n\right) \leq \dfrac{1-e^{-x}}{x} + \dfrac{x^2}{n}e^{-x}$.

En intégrant il vient : $I_n \leq I + \int_0^1 \frac{x^2}{n}e^{-x}\,dx$ (les trois intégrales existent ... !)

Q2 b) permet de dire que : $\forall x \in]0,\ ]$, $\frac{1}{x} > 0$ et $1-(1-\frac{x}{n})^n \geqslant 1-e^{-x}$

Alors $\forall x \in]0,1]$, $\frac{1}{x}(1-(1-\frac{x}{n})^n) \geqslant \frac{1-e^{-x}}{x}$. En intégrant il vient $I_n \geqslant I$.

Finalement : $I \le I_n \le I + \frac{1}{n}\int_0^1 x^2 e^{-x}\,dx$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\int_0^1 x^2 e^{-x}\,dx\right)=0$; par encadrement on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = I$.

Q4 $f : x \mapsto \frac{1}{x}e^{-1/x}$ est continue sur $]0,1]$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}e^{-1/x}\right) = 0$ donc

car $\lim\limits_{X\to+\infty}(Xe^{-X}) = \lim\limits_{X\to+\infty}\frac{X}{e^X} = 0$.

$\int_0^1 \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}\,dx$ existe.

$y \mapsto \frac{e^{-y}}{y}$ est continue sur $[1,+\infty[$, $\forall A\in[1,+\infty[$, $\int_1^A \frac{e^{-y}}{y}\,dy = \int_1^{1/A} x e^{-\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx$.

$y=\frac{1}{x}$
$x=1/y$

$\forall A\in[1,+\infty[$, $\int_1^A \frac{e^{-y}}{y}\,dy = \int_{1/A}^1 \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}\,dx$.

Or $\lim\limits_{A\to+\infty}\frac{1}{A}=0$ et $\int_0^1 \frac{1}{x}e^{-1/x}\,dx$ converge. Ainsi $\int_1^{+\infty}\frac{e^{-y}}{y}\,dy$ converge et vaut $\int_0^1 \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}\,dx$.

$\int_0^1 \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}\,dx$ et $\int_1^{+\infty}\frac{e^{-y}}{y}\,dy$ existent et sont égales.

Q5 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Q2 a) et b) donnent :

$\forall x\in[0,n]$, $\left(1-\frac{x^2}{n}\right)e^{-x} \le \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \le e^{-x}$.

$\forall x\in[1,n]$, $\frac{1}{x}e^{-x} - \frac{1}{n}xe^{-x} \le \frac{1}{x}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \le \frac{1}{x}e^{-x}$.

En intégrant il vient : $\int_1^n \frac{1}{x}e^{-x}\,dx - \frac{1}{n}\int_1^n xe^{-x}\,dx \le J_n \le \int_1^n \frac{1}{x}e^{-x}\,dx$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_1^n \frac{1}{x}e^{-x}\,dx = J$.

$\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx$ existe ($\Gamma(2)$) ; $\int_1^{+\infty} xe^{-x}\,dx$ existe également ; ainsi la suite de terme général $\int_1^n xe^{-x}\,dx$ converge. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\int_1^n xe^{-x}\,dx\right) = 0$.

Finalement $\lim_{n\to+\infty}\left(\int_1^n \frac{1}{x}e^{-x}dx - \frac{1}{n}\int_1^n x e^{-x}dx\right) = \lim_{n\to+\infty}\int_1^n \frac{1}{x}e^{-x}dx = J.$

Par conséquent on obtient : $\lim_{n\to+\infty} J_n = J$.

Q6 a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $h_n : x\mapsto \frac{1-(1-x)^n}{x}$ est continue sur $]0,1]$.

$(1+(-x))^n - 1 \underset{x\to 0}{\sim} n(-x)$; $1-(1-x)^n \underset{0}{\sim} nx$; $h_n(x)\underset{0}{\sim} n$.

$\lim_{x\to 0} h_n(x) = n$; h_n est prolongeable par continuité en 0. $K_n = \int_0^1 \frac{1-(1-x)^n}{x}dx$ converge.

b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\forall x\in]0,1]$, $\frac{1-(1-x)^n}{x} = \frac{1-(1-x)^n}{1-(1-x)} = \sum_{k=0}^{n-1}(1-x)^k$.

Alors $K_n = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1}(1-x)^k dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 (1-x)^k dx = \sum_{k=0}^{n-1}\left[-\frac{(1-x)^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

Intégrales "propres" !

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $K_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

⚠ En toute rigueur, pour la 1ère, $\int_\varepsilon^1 \dots$ OK ?!

Q7 a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $I_n - J_n = \int_0^1 \frac{1}{x}\left(1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right)dx - \int_1^n \frac{1}{x}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx$

$I_n - J_n \underset{u=\frac{x}{n}}{\overset{⚠}{=}} \int_0^{1/n}\frac{1}{nu}\left(1-(1-u)^n\right) n\,du - \int_{1/n}^1 \frac{1}{nu}(1-u)^n n\,du$

$I_n - J_n = \int_0^1 \frac{1}{u}\left(1-(1-u)^n\right)du - \int_{1/n}^1 \frac{1}{u}\left(1-(1-u)^n\right)du - \int_{1/n}^1 \frac{1}{u}(1-u)^n du$

$I_n - J_n = K_n - \int_{1/n}^1 \frac{1}{u}du + \int_{1/n}^1 \frac{1}{u}(1-u)^n du - \int_{1/n}^1 \frac{1}{u}(1-u)^n du = K_n - [\ln|u|]_{1/n}^1.$

les intégrales ici (3) sont convergentes.

Alors $I_n - J_n = K_n + \ln(1/n)$. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $I_n - J_n = K_n - \ln n$.

b) $\lim_{n\to+\infty} (I_n - J_n) = I - J$ (Q3 et Q5). $\lim_{n\to+\infty}(K_n - \ln n) = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right) = \gamma$.

Alors $I - J = \gamma$. Ce qui s'écrit $\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}dx - \int_0^1 \frac{1}{x} e^{-x} dx = \gamma$.

Par conséquent : $\int_0^1 \frac{1-e^{-x}-e^{-1/x}}{x} dx = \gamma$.

PARTIE C Q1 a) $\varphi : x \mapsto e^{-x}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $\varphi^{(\ell)} = (-1)^\ell \varphi$.

La formule de Taylor avec reste intégral permet alors d'écrire que :

$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \sum_{\ell=0}^{p} \frac{x^\ell}{\ell!}(-1)^\ell \varphi(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^p}{p!}(-1)^{p+1}\varphi(t)\,dt$.

$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} = \sum_{\ell=0}^{p} \frac{(-x)^\ell}{\ell!} + (-1)^{p+1}\int_0^x \frac{(x-t)^p}{p!} e^{-t} dt$ ok ?

Soit p dans $\mathbb{N}$ et x dans $[0,1]$. $\forall t \in [0,x]$, $\frac{(x-t)^p}{p!}e^{-t} \geqslant 0$ et $x \geqslant 0$!

Ainsi $\int_0^x \frac{(x-t)^p}{p!} e^{-t} dt \geqslant 0$.

Or alors $(-1)^{p+1}\int_0^x \frac{(x-t)^p}{p!} e^{-t} dt$ est positif si p est impair et négatif si p est pair.

Par conséquent : $e^{-x} \geqslant \sum_{\ell=0}^{p} \frac{(-x)^\ell}{\ell!}$ si p est impair et $e^{-x} \leqslant \sum_{\ell=0}^{p} \frac{(-x)^\ell}{\ell!}$ si p est pair.

Plus exactement : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1],\ \sum_{\ell=0}^{2n-1} \frac{(-x)^\ell}{\ell!} \leqslant e^{-x} \leqslant \sum_{\ell=0}^{2n} \frac{(-x)^\ell}{\ell!}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et x dans $]0,1]$. Ce qui précède donne :

$$\frac{1}{x}\left(1 - \sum_{\ell=0}^{2n} (-1)^\ell \frac{x^\ell}{\ell!}\right) \leqslant \frac{1-e^{-x}}{x} \leqslant \frac{1}{x}\left(1 - \sum_{\ell=0}^{2n-1} (-1)^\ell \frac{x^\ell}{\ell!}\right)$$

Ainsi $\frac{1}{x}\sum_{\ell=1}^{2n} (-1)^{\ell+1}\frac{x^\ell}{\ell!} \leqslant \frac{1-e^{-x}}{x} \leqslant \frac{1}{x}\sum_{\ell=1}^{2n-1} (-1)^{\ell+1}\frac{x^\ell}{\ell!}$ ou : $\sum_{\ell=1}^{2n}(-1)^{\ell+1}\frac{x^{\ell-1}}{\ell!} \leqslant \frac{1-e^{-x}}{x} \leqslant \sum_{\ell=1}^{2n-1}(-1)^{\ell+1}\frac{x^{\ell-1}}{\ell!}$.

A SUIVRE

En intégrant il vient : $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}\int_0^1 x^{k-1}dx \leq I \leq \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{k!}\int_0^1 x^{k-1}dx$ car toutes les intégrales existent.

$\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\int_0^1 x^{k-1}dx = \frac{1}{k}$, donc $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k\,k!} \leq I \leq \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{k\,k!}$

En posant $i=k-1$ et en remarquant que $(-1)^{i+2}=(-1)^i$ il vient :

$\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i}{(i+1)!\,(i+1)} \leq I \leq \sum_{i=0}^{n-2}\frac{(-1)^i}{(i+1)!\,(i+1)}$ et ceci pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

En retranchant le dernier terme de l'inégalité il vient :

$$-\frac{1}{(n)!\,n} \leq I - \sum_{i=0}^{n-2}\frac{(-1)^i}{(i+1)!\,(i+1)} \leq 0 \text{ , pour tout } n\in\mathbb{N}^*.$$

---

c) $\sum_{i=0}^{n-2}\frac{(-1)^i}{(i+1)!\,(i+1)}$ est une valeur approchée de I à $0{,}5\times10^{-3}$ dès que

$\frac{1}{(n)!\,n} \leq 0{,}5\times10^{-3}$. Ceci a lieu dès que n est supérieur ou égal à 3.

Alors $\sum_{i=0}^{4}\frac{(-1)^i}{(i+1)!\,(i+1)}$ est une valeur approchée de I à $0{,}5\times10^{-3}$.

$$\sum_{i=0}^{4}\frac{(-1)^i}{(i+1)!\,(i+1)} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{18} - \frac{1}{96} + \frac{1}{600} = \frac{5737}{7200}.$$

$\frac{5737}{7200}$ est une valeur approchée de I à $0{,}5\times10^{-3}$; $\frac{5737}{7200} \simeq 0{,}7968$.

Q2) a) Soit $x\in[1,+\infty[$. $\forall y\in[x,+\infty[$, $0 \leq \frac{e^{-y}}{y} \leq \frac{e^{-y}}{x}$

$\forall A\in[x,+\infty[$, $0 \leq \int_x^A \frac{e^{-y}}{y}dy \leq \frac{1}{x}\int_x^A e^{-y}dy = \frac{1}{x}\left(e^{-x}-e^{-A}\right)$.

En faisant tendre A vers $+\infty$ il vient : $0 \leq \int_x^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y}\,dy \leq \frac{e^{-x}}{x}$

$\forall x \in [1, +\infty[$, $0 \leq \int_x^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y}\,dy \leq \frac{e^{-x}}{x}$.

b) Si $x_0 = 7$: $\frac{e^{-x_0}}{x_0} = 1,302 \times 10^{-4}$; Si $x_0 = 7$: $\frac{e^{-x_0}}{x_0} < 0,25 \times 10^{-3}$.

c) $J = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y}\,dy = \int_1^{7} \frac{e^{-y}}{y}\,dy + \int_7^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y}\,dy$

Alors $\int_1^{7} \frac{e^{-y}}{y}\,dy \leq \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y}\,dy}_{J} \leq \int_1^{7} \frac{e^{-y}}{y}\,dy + \int_7^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y}\,dy$

Ainsi $\int_1^{7} \frac{e^{-y}}{y}\,dy$ est une valeur approchée de J à $\int_7^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y}\,dy$.

Or $\int_7^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y}\,dy \leq \frac{e^{-7}}{7} < 0,25 \times 10^{-3}$ et $0,2193$ est une valeur approchée de $\int_1^{7} \frac{e^{-y}}{y}\,dy$ à $0,25 \times 10^{-3}$

Alors $0,2193$ est une valeur approchée de J à $0,25 \times 10^{-3}$ près.

d) $\gamma = I - J$

Il résulte de ce qui précède que $\frac{5737}{7200} - 0,2193$ est une valeur approchée de γ à 10^{-3}.

Nous retiendrons que : $0,577$ est une valeur approchée de γ à 10^{-3}.