

Q1 Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions du système. Soit $(x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5$.

$$(u, y, z, t, u) \in \mathcal{S}$$

$$\begin{cases} t = \lambda u \\ z = \lambda t \cdot u = (\lambda^2 - 1)u \\ y = \lambda z - t = \lambda(\lambda^2 - 1)u - \lambda u = (\lambda^3 - 2\lambda)u \\ x = \lambda y - z = \lambda(\lambda^3 - 2\lambda)u - (\lambda^2 - 1)u = (\lambda^4 - 3\lambda^2 + 1)u \\ 0 = \lambda x - y = \lambda(\lambda^4 - 3\lambda^2 + 1)u - (\lambda^3 - 2\lambda)u = (\lambda^5 - 4\lambda^3 + 3\lambda)u = \lambda(\lambda^4 - 4\lambda^2 + 3)u = 3(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 3)u \end{cases}$$

1^{er} cas... $\lambda \notin \{-\sqrt{3}, -1, 0, 1, \sqrt{3}\}$. Alors $\lambda(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 3) \neq 0$.

Par conséquent $(u, y, z, t, u) \in \mathcal{S} \Leftrightarrow x = y = z = t = u = 0$. $\mathcal{S} = \{(0, 0, 0, 0, 0)\} = \{0_{\mathbb{R}^5}\}$

2^{ème} cas... $\lambda \in \{-\sqrt{3}, -1, 0, 1, \sqrt{3}\}$. Alors $\lambda(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 3) = 0$.

$$\text{donc } (u, y, z, t, u) \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (\lambda^4 - 3\lambda^2 + 1)u \\ y = (\lambda^3 - 2\lambda)u \\ z = (\lambda^2 - 1)u \\ t = \lambda u \end{cases} \quad \mathcal{S} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} \lambda^4 - 3\lambda^2 + 1 \\ \lambda^3 - 2\lambda \\ \lambda^2 - 1 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

dans le détail : $\mathcal{S}_0 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. $\mathcal{S}_{\sqrt{3}} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 2 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.
 $\mathcal{S}_1 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. $\mathcal{S}_{-\sqrt{3}} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \\ 2 \\ -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.
 $\mathcal{S}_{-1} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Q2 Le système admet une solution autre que $0_{\mathbb{R}^5}$ si et seulement si $\lambda \in \{-\sqrt{3}, -1, 0, 1, \sqrt{3}\}$

Partie II

commençons par dire que Q1 est catastrophique !

- 1°. On ne peut pas ce qui est $(x_1, x_2, \dots, x_n)$
- 2°. λ étant fixé (c'est écrit dans la 1^{re} ligne de la partie II) on peut choisir $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ de bien des manières. Si (II) n'a qu'une solution : $0_{\mathbb{R}^n}$ on peut prendre $A_1 = \dots = A_{n-1} = 0_{\mathbb{R}^{n-1}}$
- 3°. $A_{p+1}(\lambda) = \lambda A_{p+1}(\lambda) - A_p(\lambda)$ pour tout $p \in \{1, \dots, n-1\}$ ne résulte pas de $x_{n-p} = A_p(\lambda)x_n$ pour tout $p \in \{1, \dots, n-1\}$

Essayons de concilier l'incarciliable.

Q3 Montrons à l'aide d'une récurrence d'ordre 2 que pour tout $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, il existe un élément A_p de $\mathbb{R}[X]$ tel que,
 pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et toute solution $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de (II) on ait : $x_{n-p} = A_p(\lambda)x_n$.

Remarque.. Soit $p \in \mathbb{R}$. Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$.
 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est solution de (II) si et seulement si :

$$\begin{cases} \bullet x_{n-1} = \Delta x_n \\ \bullet x_{n-2} = \Delta x_{n-1} - x_n \\ \bullet \forall p \in \llbracket 1, n-3 \rrbracket, x_{n-(p+2)} = \Delta x_{n-(p+1)} - x_{n-p} \\ \bullet -\Delta x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

Nous pouvons commencer la récurrence

- la propriété est vraie pour $p=1$ (prendre $A_1 = X$) et pour $p=2$ (prendre $A_2 = X^2 - 1$)
 En effet si $\Delta \in \mathbb{R}$ et si $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est solution de (II) : $x_{n-1} = \Delta x_n$ et $x_{n-2} = \Delta x_{n-1} - x_n = (\Delta^2 - 1)x_n$.

- Supposons la propriété vraie pour p et $p+1$, p étant un élément de $\llbracket 1, n-3 \rrbracket$, montrons la pour $p+2$.

Soient $p \in \mathbb{R}$ et $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une solution de (II). Nous savons que'il existe A_p et A_{p+1} dans $\mathbb{R}[X]$ tels que : $x_{n-p} = A_p(\Delta) x_n$ et $x_{n-(p+1)} = A_{p+1}(\Delta) x_n$.

Nous savons encore que : $x_{n-(p+2)} = \Delta x_{n-(p+1)} - x_{n-p}$; par conséquent :

$$x_{n-(p+2)} = (\Delta A_{p+1}(\Delta) - A_p(\Delta)) x_n$$

Posons $A_{p+2} = \Delta A_{p+1} - A_p$. A_{p+2} est un élément de $\mathbb{R}[X]$ et $x_{n-(p+2)} = A_{p+2}(\Delta) x_n$

(ceci pour tout $\Delta \in \mathbb{R}$ et tout $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ solution de (II)).

Ceci achève donc la récurrence qui nous a permis l'existence d'une suite $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant, en fait, deux propriétés :

- (1) Pour tout réel Δ et toute solution $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de (II) : $\forall p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, x_{n-p} = A_p(\Delta) x_n$
- (2) $\forall p \in \llbracket 1, n-3 \rrbracket, A_{p+2}(\Delta) = \Delta A_{p+1}(\Delta) - A_p(\Delta)$ pour tout réel Δ ($\dots A_{p+2} = \Delta A_{p+1} - A_p$)

(Q2) dans la suite : $A_1 = X, A_2 = X^2 - 1$ et $\forall p \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket, A_{p+2} = \Delta A_{p+1} - A_p$

(Remarquez aussi comme les polynômes de "Tcheby".)

Soit $p \in \mathbb{R}$ et soit $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ solution de (II)

$$\Downarrow \begin{cases} x_{n-1} = \Delta x_n \\ x_{n-2} = \Delta x_{n-1} - x_n = (\Delta^2 - 1)x_n \\ \forall p \in \llbracket 1, n-3 \rrbracket, x_{n-(p+2)} = \Delta x_{n-(p+1)} - x_{n-p} \\ -\Delta x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \quad (a)$$

$$\Downarrow \begin{cases} \forall p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, x_{n-p} = A_p(\Delta) x_n \\ -\Delta x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \quad (b)$$

Montrons maintenant que (b) donne (a). Supposons (b). Nous avons déjà $-\Delta x_1 + x_2 = 0$!

$x_{n-1} = A_1(\Delta) x_n = \Delta x_n$. $x_{n-2} = A_2(\Delta) x_n = (\Delta^2 - 1)x_n$. Rappelons la 3^{ème} ligne de (a).

$\forall p \in \llbracket 1, n-3 \rrbracket, x_{n-(p+2)} = A_{p+2}(\Delta) x_n = \Delta A_{p+1}(\Delta) x_n - A_p(\Delta) x_n = \Delta x_{n-(p+1)} - x_{n-p}$. Ceci achève de prouver (a)

Finalement

$$\begin{aligned} & (u_2, u_3, \dots, u_n) \text{ est solution de (II)} \\ & \Downarrow \\ & \begin{cases} \forall p \in \llbracket 3, n-1 \rrbracket, \kappa_{n-p} = A_p(\lambda) \kappa_n \\ 0 = -\lambda \kappa_3 + \kappa_2 = (-\lambda A_{n-1}(\lambda) + A_{n-2}(\lambda)) \kappa_n = -A_n(\lambda) \kappa_n \end{cases} \\ & \Downarrow \\ & \begin{cases} \forall p \in \llbracket 3, n-1 \rrbracket, \kappa_{n-p} = A_p(\lambda) \kappa_n \\ \text{et} \\ A_n(\lambda) \kappa_n = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

1^{re} cas... $A_n(\lambda) \neq 0$. (II) admet une solution et une seule : $0_{\mathbb{R}^n}$.

2^{ème} cas... $A_n(0) = 0$. $(u_2, u_3, \dots, u_n)$ solution de (II)

$$\begin{aligned} & \Downarrow \\ & \forall p \in \llbracket 3, n-1 \rrbracket, \kappa_{n-p} = A_p(0) \kappa_n \\ & \Downarrow \\ & \forall p \in \llbracket 3, n-1 \rrbracket, \kappa_p = A_{n-p}(0) \kappa_n \end{aligned}$$

l'ensemble des solutions est la droite vectorielle de $\mathbb{R}^n$ engendrée par :
 $(A_{n-1}(0), A_{n-2}(0), \dots, A_3(0), 1)$.

Q3) $A_3 = X, A_2 = X^2 - 1$ et $\forall p \in \llbracket 3, n-2 \rrbracket, A_{p+2} = X A_{p+1} - A_p$.

En particulier $A_3 = X^3 - 2X, A_4 = X^4 - 3X^2 + 1, A_5 = X^5 - 4X^3 + 3X$

Montrons par récurrence que, pour tout $p \in \llbracket 3, n \rrbracket$:

- 1^o. $\deg A_p = p$
- 2^o. Le coeff. de X^p dans A_p est 1
- 3^o. $A_p(-X) = (-1)^p A_p(X)$

- c'est vrai pour $p=3$ et 4 ($A_3 = X$ et $A_4 = X^2 - 1$)

- Supposons 1^o, 2^o et 3^o vraies pour p et $p+1$, p étant élément de $\llbracket 3, n-2 \rrbracket$.

Montrons que le tout reste vrai pour $p+2$.

$A_{p+2} = X A_{p+1} - A_p$. $\deg X A_{p+1} = p+2$ et $\deg A_p = p$ donc $\deg A_{p+2} = p+2$.

Le coeff. de X^{p+2} dans A_{p+2} est celui de X^{p+2} dans $X A_{p+1}$; c'est donc 1 car le coefficient de X^{p+1} dans A_{p+1} est 1.

$$A_{p+2}(-X) = (-X) A_{p+1}(-X) - A_p(-X) = -(-1)^{p+1} X A_{p+1}(X) - (-1)^p A_p(X) = (-1)^{p+2} X A_{p+1}(X) - (-1)^{p+2} A_p(X)$$

$$A_{p+2}(-X) = (-1)^{p+2} A_{p+2}(X). \text{ Ceci achève la récurrence.}$$

1^o, 2^o et 3^o sont vrais en particulier pour n . Par conséquent

$\deg A_n = n$. Le coefficient de X^n dans A_n est 1. A_n a même parité que n ($A_n(-X) = (-1)^n A_n(X)$)

$$\forall p \in \llbracket 3, n-2 \rrbracket, A_{p+2}(0) = 0 \quad A_{p+1}(0) - A_p(0) = -A_p(0)$$

$(A_{2p}(0))_{1 \leq p \leq n}$ et $(A_{2p+1}(0))_{0 \leq p+1 \leq n}$ sont des suites géométriques de raison -1

$A_3(0) = 0$ et $A_2(0) = -1$. Par conséquent si $p \in \mathbb{N}$ et $0 \leq 2p+1 \leq n$: $A_{2p+1}(0) = 0$ et

$$\text{si } p \in \mathbb{N} \text{ et } 3 \leq 2p \leq n : A_{2p}(0) = (-1)^p$$

si n est pair : $A_n(0) = (-1)^{\frac{n}{2}}$ et si n est impair : $A_n(0) = 0$

ce qui en lycéen n'est dit :

- si n est pair le terme de degré 0 de A_n est $(-1)^{n/2}$
- si n est impair le terme de degré 0 de A_n est 0 (???) (si il est nul il n'est plus de degré 0!)

Pour tout $p \in \llbracket 2, n \rrbracket$ notons α_p le coefficient de x^{p-2} dans $A_p(x)$.

$\forall p \in \llbracket 2, n-2 \rrbracket, A_{p+2} = X A_{p+1} - A_p$; donc $\forall p \in \llbracket 2, n-2 \rrbracket, \alpha_{p+2} = \alpha_{p+1} - 1$

(le coefficient de x^p dans A_{p+2} s'obtient en retirant le coefficient de x^p dans A_p au coefficient de x^{p-1} dans $X A_{p+1}$)

$$\alpha_n - \alpha_2 = \sum_{p=2}^{n-2} (\alpha_{p+2} - \alpha_{p+1}) = \sum_{p=2}^{n-2} (-1) = [(n-2)-1](-1) = -(n-3)$$

$$\alpha_n = -(n-3) + \alpha_3 = -(n-3) - 2 = -(n-5)$$

$\uparrow$
 $A_3 = x^2 - 2x$

Enfin le coefficient de x^{n-2} dans A_n est : $-(n-5)$.

DEUXIEME PROBLEME

PARTIE I

Q1) Pour éviter les répétitions nous allons commencer par b) ... mais que ...

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons que : $\forall x \in [0, n], P_n(x) = (1 - \frac{x}{n})^n$ et que $\forall x \in [n, +\infty[, P_n(x) = 0$
En effet $P_n(n) = (1 - \frac{n}{n})^n = 0$.

Rappel.. Soit f une fonction numérique d'une variable réelle et soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et
 f est continue sur I si la restriction de f à I est continue en tout point de I non isolé à un point
 f est continue sur I si :
 - f est continue en tout point de I
 - f est continue à gauche au plus grand élément de I si il existe
 - f est continue à droite au plus petit élément de I si il existe
 même chose pour la dérivabilité.

montrons par récurrence que pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, P_n$ est de classe C^k sur $\mathbb{R}^+$ et que $\forall x \in [0, n], P_n^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{n^k} (1 - \frac{x}{n})^{n-k}$ et $\forall x \in [n, +\infty[, P_n^{(k)}(x) = 0$

P_n est continue sur $[0, n]$ ($\forall x \in [0, n], P_n(x) = (1 - \frac{x}{n})^n$) et sur $[n, +\infty[$ ($\forall x \in [n, +\infty[, P_n(x) = 0$)
 donc P_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ (voir rappel); P_n est donc de classe C^0 sur $\mathbb{R}^+$
 Reprenons $\forall k \in [0, n], P_n^{(0)}(x) = P_n(x) = (1 - \frac{x}{n})^n = (-1)^0 \frac{n!}{(n-0)!} \frac{1}{n^0} (1 - \frac{x}{n})^{n-0}$ et $\forall x \in [n, +\infty[, P_n^{(0)}(x) = 0$
 la propriété est donc vraie pour $k=0$.

Supposons la propriété vraie pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et montrons la pour $k+1$.

L'hypothèse de récurrence indique que :
 P_n est de classe C^k sur $\mathbb{R}^+$, $\forall k \in [0, n]$, $P_n^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{n^k} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-k}$ et $\forall x \in [n, +\infty[$, $P_n^{(k)}(x) = 0$. (5)

$x \mapsto \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-k}$ et $x \mapsto 0$ sont dérivables sur $\mathbb{R}^+$ donc $P_n^{(k)}$ est dérivable sur $[0, n]$ et $[n, +\infty[$.
 $P_n^{(k)}$ est donc dérivable : en tout point de $\mathbb{R}_+ - \{n\}$, dérivable à droite et à gauche en n
 la dérivée de $x \mapsto \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-k}$ est $x \mapsto -\frac{n-k}{n} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-(k+1)}$ et celle de $x \mapsto 0$ est $x \mapsto 0$.

Par conséquent : 1°. $\forall x \in [0, n[$, $(P_n^{(k)})'(x) = (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{n^k} \left(-\frac{n-k}{n}\right) \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-(k+1)} = (-1)^{k+1} \frac{n!}{(n-(k+1))!} \frac{1}{n^{k+1}} x$

2°. $\forall x \in [n, +\infty[$, $(P_n^{(k)})'(x) = 0$ $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-(k+1)}$

3°. $(P_n^{(k)})'_g(n) = (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{n^k} \left(-\frac{n-k}{n}\right) \left(1 - \frac{n}{n}\right)^{n-(k+1)} = 0$
 $n-(k+1) > 0$ car $k \leq n-1$

4°. $(P_n^{(k)})'_d(n) = 0$

$(P_n^{(k)})'_g(n) = (P_n^{(k)})'_d(n) = 0$; $P_n^{(k)}$ est donc en plus dérivable au point n et $(P_n^{(k)})'(n) = 0$

Par conséquent $P_n^{(k)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$; P_n est $k+1$ fois dérivable sur $\mathbb{R}^+$

et plus $\forall x \in [0, n]$, $P_n^{(k+1)}(x) = (-1)^{k+1} \frac{n!}{(n-(k+1))!} \frac{1}{n^{k+1}} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-(k+1)}$ et

$\forall x \in [n, +\infty[$, $P_n^{(k+1)}(x) = 0$. (En effet $P_n^{(k+1)} = (P_n^{(k)})'$).

$P_n^{(k+1)}$ est continue sur $[0, n]$ (restriction d'une fonction polynôme) et sur $[n, +\infty[$ (idem!); donc $P_n^{(k+1)}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

Par conséquent P_n est de classe C^{k+1} sur $\mathbb{R}_+$. Ceci achève la récurrence.

Conclusion.. P_n est de classe C^n sur $\mathbb{R}_+$, $\forall x \in [0, n]$, $P_n^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{n^{n+1}} \left(1 - \frac{x}{n}\right)$
 et $\forall x \in [n, +\infty[$, $P_n^{(n)}(x) = 0$.

Un raisonnement analogue à celui utilisé dans la récurrence précédente montre que

1°. P_n est n fois dérivable en tout point de $\mathbb{R}_+ - \{n\}$;

2°. $P_n^{(n-1)}$ est dérivable à droite et à gauche en n ;

3°. $\forall x \in [0, n[$, $P_n^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{n^{n+1}}$ et $\forall x \in]n, +\infty[$, $P_n^{(n)}(x) = 0$;

4°. $(P_n^{(n-1)})'_g(n) = \frac{(-1)^n n!}{n^{n+1}}$ et $(P_n^{(n-1)})'_d(n) = 0$.

$P_n^{(n-1)}$ n'est donc pas dérivable en n ; P_n n'est donc pas n fois dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et encore moins de classe C^n sur $\mathbb{R}_+$.

^{aussi}
 Remarque.. On pourrait dans cette question poser "le problème $x=n$ " en utilisant le théorème concernant le prolongement de la dérivée.

Remarque... une récurrence simple et brève montre que Φ_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$ et que:
 $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, \Phi_n^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k}{n^k} \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n-k}$

Revenons à a)

a) $\bullet \forall x \in [0, 1], P_1(x) = 1 - x$ et $\forall x \in [1, +\infty[, P_1(x) = 0$.

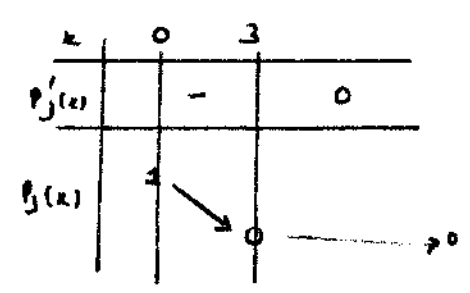
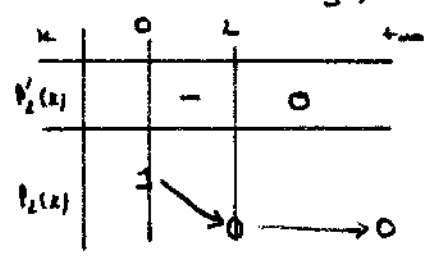
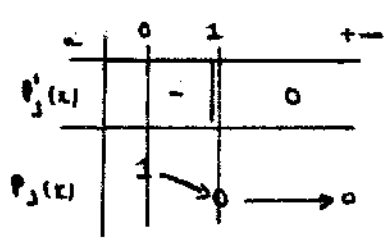
P_1 est continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable en tout point de $\mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ dérivable à droite et à gauche en 1
 $\forall x \in [0, 1[, P_1'(x) = -1, \forall x \in]1, +\infty[, P_1'(x) = 0. P_1'(1) = -1$ et $P_1'(1) = 0$.

$\bullet \forall x \in [0, 2], P_2(x) = \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2$ et $\forall x \in [2, +\infty[, P_2(x) = 0$.

P_2 est dérivable sur $\mathbb{R}_+$. $\forall x \in [0, 2], P_2'(x) = -\left(1 - \frac{x}{2}\right)$ et $\forall x \in [2, +\infty[, P_2'(x) = 0$

$\bullet \forall x \in [0, 3], P_3(x) = \left(1 - \frac{x}{3}\right)^3$ et $\forall x \in [3, +\infty[, P_3(x) = 0$.

P_3 est dérivable sur $\mathbb{R}_+$. $\forall x \in [0, 3], P_3'(x) = -\left(1 - \frac{x}{3}\right)^2$ et $\forall x \in [3, +\infty[, P_3'(x) = 0$



$\bullet \forall x \in \mathbb{R}_+, \Phi_1(x) = \frac{1}{1+x}$. Φ_1 est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+, \Phi_1'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} < 0$

$\bullet \forall x \in \mathbb{R}_+, \Phi_2(x) = \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{-2}$. Φ_2 est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+, \Phi_2'(x) = -\left(1 + \frac{x}{2}\right)^{-3} < 0$

$\bullet \forall x \in \mathbb{R}_+, \Phi_3(x) = \left(1 + \frac{x}{3}\right)^{-3}$. Φ_3 est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+, \Phi_3'(x) = -\left(1 + \frac{x}{3}\right)^{-4} < 0$

Q2 "On pourra..." mais 1°. On peut se par vouloir ;
 2°. On peut se par prouver !

Alors...

← c'est du programme !

$\ln$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ (sa dérivée seconde est négative) donc sa courbe représentative est en dessous de toutes ses tangentes ; par conséquent : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln x \leq x - 1$ (la courbe représentative de $\ln$ est en dessous de sa tangente au point d'abscisse 1)

Ceci donne encore : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x} - 1$ c'est à dire $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$.

Pour finir : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln x - 1 + \frac{1}{x} \geq 0$.

Donc : $\forall t \in]0, 1[, 0 \leq \ln(1-t) - 1 + \frac{1}{1-t} = \ln(1-t) + \frac{t}{1-t} = \varphi_1(t)$

et $\forall t \in \mathbb{R}_+, 0 \leq \ln(1+t) - 1 + \frac{1}{1+t} = \ln(1+t) - \frac{t}{1+t} = \varphi_2(t)$;

Conclusion... $\forall t \in]0, 1[, \varphi_1(t) \geq 0$ et $\forall t \in \mathbb{R}_+, \varphi_2(t) \geq 0$... On y avait donc pu d'établir la fonction à faire.

ψ_2 est dérivable sur $]0,1[$ et $\forall t \in]0,1[, \psi_2'(t) = -\frac{1}{t^2} \ln(1-t) + \frac{1}{t} \cdot \frac{-1}{1-t} = -\frac{1}{t^2} \psi_2(t) \leq 0$
 ψ_2 est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \psi_2'(t) = \frac{1}{t^2} \ln(1+t) - \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{1+t} = \frac{1}{t^2} \psi_2(t) \geq 0$
 conclusion... ψ_1 est décroissante sur $]0,1[$. ψ_2 est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Q3) Fixons x dans $\mathbb{R}_+$ et n dans $\mathbb{N}^*$.

→ montrons que : $P_n(x) \leq P_{n+1}(x)$.

1° cas... $x \in [n+1, +\infty[$. $P_n(x) = 0 \leq 0 = P_{n+1}(x)$

2° cas... $x \in [n, n+1[$. $P_n(x) = 0$ et $P_{n+1}(x) = (1 - \frac{x}{n+1})^{n+1} \geq 0$; $P_n(x) \leq P_{n+1}(x)$.

3° cas... $x \in [0, n[$.

$P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \Leftrightarrow n \ln(1 - \frac{x}{n}) \leq (n+1) \ln(1 - \frac{x}{n+1})$. si $x=0$: $P_n(x) = 1 = P_{n+1}(x)$... Supposons $x > 0$.

$P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \Leftrightarrow \frac{n}{x} \ln(1 - \frac{x}{n}) \leq \frac{n+1}{x} \ln(1 - \frac{x}{n+1}) \Leftrightarrow \frac{1}{n} \ln(1 - \frac{x}{n}) \leq \frac{1}{n+1} \ln(1 - \frac{x}{n+1})$

$P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \Leftrightarrow \psi_1(\frac{x}{n}) \leq \psi_1(\frac{x}{n+1})$.
 $\frac{x}{n} \in]0,1[$ et $\frac{x}{n+1} \in]0,1[$

cette dernière inégalité est vraie car : $\frac{x}{n} \in]0,1[, \frac{x}{n+1} \in]0,1[, \frac{x}{n+1} \leq \frac{x}{n}$ et ψ_1 est décroissante sur $]0,1[$.

→ montrons que : $P_{n+1}(x) \leq e^{-x}$

1° cas... $x \in [n+1, +\infty[$. $P_{n+1}(x) = 0 \leq e^{-x}$

2° cas... $x \in [0, n+1[$. $P_{n+1}(x) \leq e^{-x} \Leftrightarrow (n+1) \ln(1 - \frac{x}{n+1}) \leq -x \Leftrightarrow \ln(1 - \frac{x}{n+1}) \leq -\frac{x}{n+1}$

$P_{n+1}(x) \leq e^{-x} \Leftrightarrow \ln(1 - \frac{x}{n+1}) \leq (1 - \frac{x}{n+1}) - 1$

cette dernière inégalité est vraie... voir le début de Q4.

→ montrons que : $e^{-x} \leq Q_{n+1}(x)$.

$e^{-x} \leq Q_{n+1}(x) \Leftrightarrow -x \leq -(n+1) \ln(1 + \frac{x}{n+1}) \Leftrightarrow \ln(1 + \frac{x}{n+1}) \leq \frac{x}{n+1} = (1 + \frac{x}{n+1}) - 1$... OK!

→ montrons que : $Q_{n+1}(x) \leq Q_n(x)$.

$Q_{n+1}(x) \leq Q_n(x) \Leftrightarrow -(n+1) \ln(1 + \frac{x}{n+1}) \leq -n \ln(1 + \frac{x}{n}) \Leftrightarrow -\frac{1}{n+1} \ln(1 + \frac{x}{n+1}) \leq -\frac{1}{n} \ln(1 + \frac{x}{n})$

$Q_{n+1}(x) \leq Q_n(x)$ est évident si $x=0$; supposons $x > 0$.

$Q_{n+1}(x) \leq Q_n(x) \Leftrightarrow -\frac{1}{\frac{x}{n+1}} \ln(1 + \frac{x}{n+1}) \leq -\frac{1}{\frac{x}{n}} \ln(1 + \frac{x}{n}) \Leftrightarrow \psi_2(\frac{x}{n+1}) \leq \psi_2(\frac{x}{n})$.

$\frac{x}{n} \in \mathbb{R}_+^*, \frac{x}{n+1} \in \mathbb{R}_+^*, \frac{x}{n} \geq \frac{x}{n+1}$ et ψ_2 est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$; par conséquent

$\psi_2(\frac{x}{n}) \geq \psi_2(\frac{x}{n+1})$ et : $Q_{n+1}(x) \leq Q_n(x)$.

ceci achève Q3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \leq e^{-x} \leq Q_{n+1}(x) \leq Q_n(x)$.

Q4 a) Fixons x dans $\mathbb{R}^+$. On sait que $(P_n(x))_{n \geq 1}$ est croissante et majorée par e^{-x} , elle converge. On sait aussi que $(Q_n(x))_{n \geq 1}$ est décroissante et minorée par e^{-x} , elle converge.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $n \geq x$. $P_n(x) = (1 - \frac{x}{n})^n = e^{n \ln(1 - \frac{x}{n})}$. $n \ln(1 - \frac{x}{n}) \sim n(-\frac{x}{n}) = -x$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n \ln(1 - \frac{x}{n})) = -x$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) = e^{-x}$. $(P_n(x))_{n \geq 1}$ converge vers e^{-x} .

Remarque... cela suffirait pour obtenir la convergence et la limite de la suite $(P_n(x))_{n \geq 1}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $Q_n(x) = e^{-n \ln(1 + \frac{x}{n})}$. $-n \ln(1 + \frac{x}{n}) \sim -n(\frac{x}{n}) = -x$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n(x) = e^{-x}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. P_n et Q_n sont localement intégrables sur $\mathbb{R}^+$ (car elles sont continues sur $\mathbb{R}^+$)

$\forall A \in [x, +\infty[$, $\int_0^A P_n(x) dx = \int_0^A P_n(x) dx$. Par conséquent: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^A P_n(x) dx = \int_0^A P_n(x) dx$

On prouve que $\int_0^{+\infty} P_n(x) dx$ existe et vaut $I_n = \int_0^{+\infty} P_n(x) dx$.

$I_n = \int_0^{+\infty} P_n(x) dx = \int_0^{+\infty} (1 - \frac{x}{n})^n dx = \left[-\frac{n}{n+1} (1 - \frac{x}{n})^{n+1} \right]_0^{+\infty} = \frac{n}{n+1}$. $I_n = \int_0^{+\infty} P_n(x) dx = \frac{n}{n+1}$.

Notons que: $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 1$.

Notons aussi que: $1 = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx$. Nous avons donc ici $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} P_n(x) dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) dx$.

Ne peut pas faire de cela une généralité!

$\forall x \in \mathbb{R}^+$, $0 \leq Q_n(x)$ et $Q_n(x) \sim \left(\frac{x}{n}\right)^{-n} = n^n \frac{1}{x^n}$.

$\int_0^{+\infty} Q_n(x) dx$ est de même nature que $\int_1^{+\infty} Q_n(x) dx$ qui est de même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n} dx$

Par conséquent: $\int_0^{+\infty} Q_n(x) dx$ existe si et seulement si $n > 1$ ($n \geq 2$).

Supposons $n \geq 2$. $J_n = \int_0^{+\infty} Q_n(x) dx = \int_0^{+\infty} (1 + \frac{x}{n})^{-n} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\frac{n}{n-1} (1 + \frac{x}{n})^{-n+1} \right]_0^A$

$J_n = -\frac{n}{n-1} \left(\lim_{A \rightarrow +\infty} (1 + \frac{A}{n})^{-n+1} = 0 \right)$. $J_n = \frac{n}{n-1}$. $J_n = \int_0^{+\infty} Q_n(x) dx = \frac{n}{n-1}$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 1$ (même conclusion que pour I_n).

PARTIE II

Q1) g est dérivable sur $[0, 4[$ et $\forall x \in [0, 4[$, $g'(x) = 1 + 3 \frac{-3/4}{1 - x/4} = 1 + \frac{3}{x-4} = \frac{x-1}{x-4}$.
 g est strictement décroissante sur $[0, 4[$ et strictement croissante sur $[0, 3]$.

Q2) g est continue et strictement décroissante sur $[3, 4[$. g définit une bijection de $[3, 4[$ sur $g([3, 4[) =]_{\lim_{x \rightarrow 4^-} g(x)}, g(3)] =]-\infty, 1 + 3 \ln \frac{3}{4}]$. $1 + 3 \ln \frac{3}{4} \approx 0,136953183$
 $0 \in]-\infty, 1 + 3 \ln \frac{3}{4}]$ donc $\exists ! x \in [3, 4[$, $g(x) = 0$.

Remarque... $\forall x \in]0, x[, g(x) > 0 ; \forall x \in]x, 4[, g(x) < 0 ; g(0) = g(4) = 0$.

f est dérivable sur $[0, 4]$. $\forall x \in [0, 4]$, $f'(x) = -e^{-x} + (3 - \frac{x}{4})^3$

$$\forall x \in [0, 4[\quad f'(x) = -e^{-x} + e^{3 \ln(3 - \frac{x}{4})} = e^{-x} (e^{x + 3 \ln(3 - \frac{x}{4})} - 1) = e^{-x} (e^{g(x)} - 1)$$

Donc $\forall x \in [0, 4[, f'(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) > 0 ;$

et $\forall x \in [0, 4[\quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$

Finalement $f'(0) = f'(4) = 0 ; \forall x \in]0, x[, f'(x) > 0 ; \forall x \in]x, 4[, f'(x) < 0 ; f'(4) = -e^{-4} < 0$

Donc $f'(0) = f'(4) = 0 ; \forall x \in]0, x[, f'(x) > 0 ; \forall x \in]x, 4[, f'(x) < 0$.

f est strictement croissante sur $[0, x]$ et strictement décroissante sur $[x, 4]$.

Q4 a.- $g(3,8) \approx 0,0065 ; g(3,8) > 0 \quad \cdot \quad g(3,9) \approx -0,0333 ; g(3,9) < 0$.

La remarque du début de page donne : $3,8 < x < 3,9$.

b.- f' est continue sur $[3,8; 3,9]$. Posons $\pi = \max_{x \in [3,8; 3,9]} |f'(x)|$.

Les accroissements finis donnent : $\forall x \in [3,8; 3,9]$, $|f(x) - f(x)| \leq \pi |x - x| \leq (0,1) \pi$

$\forall x \in [3,8; 3,9]$, $f'(x) = -e^{-x} + (3 - \frac{x}{4})^3$. f' est dérivable sur $[3,8; 3,9]$ et

$$\forall x \in [3,8; 3,9], f''(x) = e^{-x} + 3(-\frac{1}{4})(3 - \frac{x}{4})^2 = e^{-x} - \frac{3}{4} (3 - \frac{x}{4})^2$$

$$\forall x \in [3,8; 3,9], f''(x) \leq e^{-3,8} - \frac{3}{4} (3 - \frac{3,9}{4})^2 < 0 \quad (e^{-3,8} - \frac{3}{4} (3 - \frac{3,9}{4})^2 \approx -0,04142)$$

$x \mapsto e^{-x}$ est décroissante sur $[3,8; 3,9]$ et $x \mapsto -\frac{3}{4} (3 - \frac{x}{4})^2$ croissante

Donc f' est décroissante sur $[3,8; 3,9]$.

$$\pi = \max_{x \in [3,8; 3,9]} |f'(x)| = \max(|f'(3,8)|, |f'(3,9)|) = |f'(3,9)| \leq 0,005$$

$$|f'(3,8)| \approx 0,0010 \text{ et } |f'(3,9)| \approx 0,0049$$

Donc $\forall x \in [3,8; 3,9]$, $|f(x) - f(x)| \leq 0,1 |f'(3,9)| \leq 0,0005$. Par conséquent :

x	0	x	4
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		$\nearrow$	$\searrow$

$f(3,8)$ (resp. $f(3,9)$) sont des valeurs approchées par défaut de $f(x)$ à 10^{-4} .

$$f(3,8) \approx 0,073792638 \text{ et } f(3,9) \approx 0,073599479$$

Donc $f(x) \approx 0,074$ (...valeur approchée à 10^{-4} !)

Remarque 1.- Par dichotomie la machine donne $x \approx 3,817579934$; en utilisant alors $f(x) \approx 0,073802078$

$$f(3,81) \approx 0,073791638$$

$$2.- \forall x \in [3,8; 3,9], f(x) \leq f(x) + 0,0005. \quad f(x) \leq f(3,8) + 0,0005 \leq 0,074 + 0,0005$$

$$f(x) \leq 0,0745 \leq 0,08.$$

(Q1) $\int_0^{+\infty} e^{-x^4} dx$ et de même nature que $\int_1^{+\infty} e^{-x^4} dx$ ($x \mapsto e^{-x^4}$ est loc. intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car continue sur $\mathbb{R}^+$...)

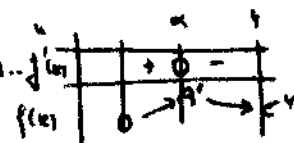
$$\forall x \in [1, +\infty[, x \leq x^4; \forall x \in [1, +\infty[, 0 \leq e^{-x^4} \leq e^{-x}.$$

$\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ converge (... au connu... intégral...) donc $\int_1^{+\infty} e^{-x^4} dx$ aussi. Finalement

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^4} dx \text{ existe.}$$

$\int_0^{r_2} e^{-x^4} dx$ et $\int_{r_2}^{+\infty} e^{-x^4} dx$ étant convergents on ne s'oppose à l'écriture suivante :

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^4} dx = \int_0^{r_2} e^{-x^4} dx + \int_{r_2}^{+\infty} e^{-x^4} dx.$$

(Q2) a.  $A = \int_0^4 f(x) dx$. Donc $\forall x \in [0, 4], 0 \leq f(x) \leq f(1)$

$$\forall x \in [0, 4], 0 \leq e^{-x^4} = p_4(x) \leq f(1) \leq 0,08 \text{ (voir ci-dessus)}$$

Remarquons que $\forall x \in [0, \sqrt{2}], x^4 \in [0, 4]$, par conséquent : $\forall x \in [0, \sqrt{2}], 0 \leq e^{-x^4} = p_4(x^4) \leq 0,08$.

$$b. \int_0^{\sqrt{2}} p_4(x^4) dx = \int_0^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{x^4}{4}\right)^4 dx = \int_0^1 \sqrt{2} (1 - u^4)^4 du = \sqrt{2} \int_0^1 [1 - 4u^4 + 6u^8 - 4u^{12} + u^{16}] du$$

$$u = \frac{x}{\sqrt{2}}; du = \frac{dx}{\sqrt{2}}$$

$$\int_0^{\sqrt{2}} p_4(x^4) dx = \sqrt{2} \left[1 - \frac{4}{5} + \frac{6}{9} - \frac{4}{13} + \frac{1}{17}\right] = \sqrt{2} \left[1 - \frac{4}{5} + \frac{2}{3} - \frac{4}{13} + \frac{1}{17}\right] = \frac{\sqrt{2} \times 211}{3315} !$$

$$\int_0^{\sqrt{2}} p_4(x^4) dx \approx 0,87 \quad (= 0,873698153)$$

$$c. \quad 0 \leq \int_0^{\sqrt{2}} e^{-x^4} dx = \int_0^{\sqrt{2}} p_4(x^4) dx \leq 0,08 \times \sqrt{2}; \int_0^{\sqrt{2}} p_4(x^4) dx \leq \int_0^{\sqrt{2}} e^{-x^4} dx \leq \int_0^{\sqrt{2}} p_4(x^4) dx + 0,08 \sqrt{2}$$

$$\int_0^{\sqrt{2}} e^{-x^4} dx \in \left[\frac{\sqrt{2} \times 211}{3315}, \frac{\sqrt{2} \times 211}{3315} + 0,08 \sqrt{2}\right] \subset [0,87; 1] \text{ donc : } 0,87 \leq \int_0^{+\infty} e^{-x^4} dx \leq 1.$$

(Q3) a) Soit $A \in [\sqrt{2}, +\infty[$. $\int_{r_2}^A e^{-x^4} dx = \int_4^{A^4} e^{-y} \frac{1}{4} y^{-3/4} dy \leq \frac{1}{4} (4)^{-3/4} \int_4^{A^4} e^{-y} dy$

$$\left[\begin{array}{l} y = x^4 \\ x = y^{1/4}; dx = \frac{1}{4} y^{-3/4} dy \end{array} \right. \quad y \mapsto y^{-3/4} \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_+^*$$

comme $\int_{r_2}^{+\infty} e^{-x^4} dx$ et $\int_4^{+\infty} e^{-y} dy$ convergent :

$$\int_{r_2}^{+\infty} e^{-x^4} dx \leq \frac{1}{4^{3/4}} \int_4^{+\infty} e^{-y} dy$$

$$b) \quad 0 \leq \int_{r_2}^{+\infty} e^{-x^4} dx \leq \frac{1}{4^{3/4}} \int_4^{+\infty} e^{-y} dy = \frac{e^{-4}}{4^{3/4}} < 10^{-2} \quad (e^{-4}/4^{3/4} \approx 0,001618789)$$

donc 0 est une valeur approchée à 10^{-2} près de $\int_{r_2}^{+\infty} e^{-x^4} dx$!!

(Q4) $0,87 + 0 \leq I = \int_0^{\sqrt{2}} e^{-x^4} dx + \int_{r_2}^{+\infty} e^{-x^4} dx \leq 1 + 10^{-2}$

donc $0,87 \leq \int_0^{+\infty} e^{-x^4} dx \leq 1,01$. Remarquable, n'est-ce pas !!

Notons encore que :

$$\frac{\sqrt{2} \times 211}{3315} \leq I \leq \frac{\sqrt{2} \times 211}{3315} + \sqrt{2} \times 0,08 + \frac{e^{-4}}{4^{3/4}}$$

$$0,8736 \leq I \leq 0,9885 !!$$

