BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 297

Conception : EDHEC

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES

8 mai 2018, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

1) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $a_n = \dfrac{1}{n\ln n}$.

   a) Montrer que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on a : $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t\ln t}\,dt \le \frac{1}{k\ln k}$.

   b) En déduire, par sommation, la nature de la série de terme général a_n.

Dans la suite, on considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{(1-x)\ln(1-x)} \text{ si } x \in \left]-\infty, 0\right[\cup \left]0, 1\right[\\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

2) a) Montrer que f est continue sur $]-\infty, 1[$.

   b) Montrer que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.

3) a) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$, puis calculer $f'(x)$ pour tout x de $]-\infty, 0[\cup]0, 1[$.

   b) Étudier le signe de la quantité $\ln(1-x)+x$, lorsque x appartient à $]-\infty, 1[$, puis en déduire les variations de f.

   c) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition, puis dresser son tableau de variation.

4) a) Établir que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, il existe un seul réel de $[0, 1[$, noté u_n, tel que $f(u_n) = n$ et donner la valeur de u_1.

b) Montrer que la suite (u_n) converge et que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

c) Pour tout entier naturel n non nul, calculer $f\left(1 - \dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ puis en déduire qu'il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à n_0, on a : $u_n \leq 1 - \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$.

d) En déduire, à l'aide de la première question, que la série de terme général $\dfrac{-1}{n\ln(1-u_n)}$ est divergente.

e) Conclure, en revenant à la définition de u_n, que la série de terme général $1 - u_n$ est divergente.

Exercice 2

On désigne par n et p deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 1.
On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^p$. Le produit scalaire canonique des vecteurs x et y de $\mathbb{R}^p$ est noté $\langle x, y \rangle$ et la norme du vecteur x est notée $\| x \|$.

1) Dans cette question, on considère n vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_n$ de $\mathbb{R}^p$, tous de norme égale à 1.

À tout n-uplet $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, on associe le vecteur $w_x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k u_k$.

On se propose de montrer qu'il existe des n-uplets $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, dont les coordonnées sont éléments de $\{-1, 1\}$, pour lesquels $\| w_x \| \leq \sqrt{n}$ et d'autres pour lesquels $\| w_x \| \geq \sqrt{n}$.

À cet effet, on considère n variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, et telles que pour tout k de $[\![1, n]\!]$, on ait :

$$P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}$$

On considère l'application X, qui, à tout ω de Ω, associe le réel $X(\omega) = \left\| \sum\limits_{k=1}^{n} X_k(\omega) u_k \right\|^2$.

On admet que X est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Calculer, pour tout couple (i, j) de $[\![1, n]\!]^2$, la valeur de $E(X_i X_j)$.

b) En déduire l'existence et la valeur de $E(X)$.

c) Conclure quant à l'objectif de cette question.

2) Dans cette question, on considère n réels $p_1, p_2, \ldots, p_n$, tous éléments de $]0, 1[$, ainsi que n vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_n$ de $\mathbb{R}^p$ vérifiant : $\forall k \in [\![1, n]\!], \| v_k \| \leq 1$.

On pose $z = \sum\limits_{k=1}^{n} p_k v_k$ et on se propose de montrer qu'il existe un n-uplet $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dont les coordonnées sont dans $\{0, 1\}$, tel que, en notant $y_x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k v_k$, on ait :

$$\| z - y_x \| \leq \frac{\sqrt{n}}{2}$$

À cet effet, on considère n variables aléatoires $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, et telles que, pour tout k de $[\![1, n]\!]$, Y_k suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p_k)$.

On considère l'application Y, qui, à tout ω de Ω, associe le réel $Y(\omega)=\left\|\sum_{k=1}^{n}(p_k - Y_k(\omega))v_k\right\|^2$ et on admet que Y est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Calculer, pour tout couple (i,j) de $[\![1, n]\!]^2$, la valeur de $E\big((p_i - Y_i)(p_j - Y_j)\big)$.

b) Justifier que Y possède une espérance et montrer que : $E(Y)\leq \dfrac{n}{4}$.

c) Conclure quant à l'objectif de cette question.

Exercice 3

Un mobile se déplace aléatoirement sur un axe dont l'origine est le point O d'abscisse 0.
Au départ (instant 0), le mobile est situé sur le point O.
Le mobile se déplace selon la règle suivante : à l'instant n ($n\in\mathbb{N}^*$), il se place de façon équiprobable, sur l'un des points d'abscisses $0, 1, \dots, n$.
Pour tout entier naturel n, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n (on a donc $X_0 = 0$).
On admet que, pour tout entier naturel n, X_n est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à déterminer. On admet aussi que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

1) a) Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, la loi de X_n.

b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, X_n possède une espérance et une variance, puis déterminer $E(X_n)$ et $V(X_n)$.

2) On note Y le rang du premier retour à l'origine du mobile et on admet que Y est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Pour tout entier naturel n non nul, exprimer l'événement $(Y=n)$ à l'aide des variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$.

b) En déduire que la loi de Y est définie par : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $P(Y=n)=\dfrac{1}{n(n+1)}$.

c) Vérifier par le calcul que l'on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} P(Y=n)=1$.

d) La variable Y admet-elle une espérance ?

3) a) Montrer que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $\dfrac{1}{k+1}\leq \ln(k+1)-\ln k\leq \dfrac{1}{k}$.

b) En déduire que : $\forall j\geq 2$, $\ln j\leq \sum_{k=1}^{j-1}\dfrac{1}{k}\leq \ln j+1-\dfrac{1}{j}$.

c) Conclure alors que : $\sum_{k=1}^{j-1}\dfrac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \ln j$.

4) On note Z le rang du deuxième retour à l'origine du mobile et on admet que Z est une variable aléatoire, définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Déterminer pour tout $i\geq j$, la probabilité $P_{(Y=i)}(Z=j)$.

b) Établir que :

$$\forall i\leq j-1,\ P_{(Y=i)}(Z=j)=\frac{i+1}{j(j+1)}$$

c) Écrire, pour tout entier naturel j supérieur ou égal à 2, la probabilité $P(Z=j)$ comme une somme finie.

d) La variable aléatoire Z possède-t-elle une espérance ?

5) Informatique

On rappelle qu'en `Scilab`, l'instruction `grand(1,1,'uin',a,b)` permet de simuler une variable aléatoire suivant la loi uniforme à valeurs dans $[\![a,b]\!]$.

a) Écrire des commandes `Scilab` calculant et affichant la valeur de l'abscisse du mobile après son n^e déplacement lorsque la valeur de n est entrée au clavier par l'utilisateur.

b) Compléter le script `Scilab` suivant pour qu'il permette d'afficher dans cet ordre les valeurs prises par les variables aléatoires Y et Z.

```
n=0
a=0
while a<2
n=n+1
 if grand(1,1,'uin',0,n)==0 then
a=a+1
     if a==1 then y=n, end
 end
end
disp(---,'y=')
disp(---,'z=')
```

Problème

Partie 1

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n \, dt$.

1) a) Calculer u_0 et u_1.

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

2) a) Montrer, grâce à une intégration par parties, que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+2)u_{n+2} = (n+1)u_n$.

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = \dfrac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$.

c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)u_{n+1}u_n = \dfrac{\pi}{2}$.

d) En déduire la valeur de u_{2n+1}.

3) a) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+2}}{u_n}$.

b) En déduire, par encadrement, que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

c) Montrer enfin que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

4) Utiliser la question 2c) pour compléter les commandes `Scilab` suivantes afin qu'elles permettent de calculer u_n lorsque n est entré par l'utilisateur.

```
n=input('entrez la valeur de n : '),
u=%pi/2
for ------
end
disp(u)
```

Partie 2

On note f la fonction définie pour tout réel x par : $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

5) Vérifier que f est une densité de probabilité. Dans la suite, on considère une variable aléatoire réelle X définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et ayant f pour densité.

6) Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire X.

7) a) Montrer que X possède une espérance et la calculer.
   b) Montrer que X possède également une variance et la calculer.

8) On considère maintenant une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires toutes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et qui suivent toutes la même loi que X.
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $I_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et on admet que I_n est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
   a) Déterminer la fonction de répartition, notée F_n, de la variable aléatoire I_n.
   b) La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle en loi ?
   c) Déterminer une densité de I_n, puis montrer que I_n possède un moment d'ordre 2 :

$$E\left(I_n^2\right) = 2\int_0^{\pi/2} x(\cos x)^n \, dx$$

   d) Établir que : $E\left(I_n^2\right) \leq \pi u_n$.
   e) En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

9) Soit h la restriction de la fonction cosinus à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
   a) Montrer que h réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0,1]$.
   b) Justifier que l'on peut poser $Y = h(X)$. On admet alors que Y est une variable aléatoire, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Déterminer la fonction de répartition G de Y, puis vérifier que Y suit une loi uniforme.
   c) On rappelle que la commande `grand(1,1,'unf',a,b)` renvoie une simulation `Scilab` d'une variable aléatoire à densité suivant une loi uniforme sur $[a,b]$ et on admet que la fonction h^{-1} s'obtient par l'instruction `acos`. Compléter les commandes `Scilab` suivantes afin qu'elles permettent de simuler la variable aléatoire X.

```
Y=grand(1,1,'unf',---,---)
X=---
```