

ECRI COME

Banque d'épreuves communes

aux concours des Ecoles

esc bordeaux / esc marseille / icn nancy / esc reims / esc rouen / esc toulouse

CONCOURS D'ADMISSION

option scientifique

MATHÉMATIQUES

Année 1997

Aucun instrument de calcul n'est autorisé.

Aucun document n'est autorisé.

L'énoncé comporte 5 pages

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

**Tournez la page
S.V.P**

Exercice 1

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à deux. E est un espace vectoriel euclidien de dimension n . On note id_E l'application identique de E dans lui-même. Lorsque x et y sont deux vecteurs de E , le produit scalaire de x par y s'écrit $\langle x, y \rangle$ et $\|x\|$ représente la norme de x . Quand u est un vecteur *non nul* de E , on définit l'application φ_u de E dans lui-même par

$$\forall x \in E \quad \varphi_u(x) = 2 \frac{\langle x, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u - x$$

1. Montrer que φ_u est un endomorphisme involutif de E (c'est-à-dire un endomorphisme de E tel que $\varphi_u \circ \varphi_u = id_E$).
2. Démontrer que u est un vecteur propre de φ_u associé à une valeur propre que l'on précisera.
3. Etablir que φ_u conserve le produit scalaire, c'est-à-dire que

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2 \quad \langle \varphi_u(x_1), \varphi_u(x_2) \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle$$

En déduire que φ_u conserve la norme, c'est-à-dire que

$$\forall x \in E \quad \|\varphi_u(x)\| = \|x\|$$

4. On désigne par $\mathcal{D}_u$ la droite vectorielle de base u , et par $\mathcal{H}_u$ l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à u (autrement dit, $\mathcal{H}_u = \mathcal{D}_u^\perp$, supplémentaire orthogonal de $\mathcal{D}_u$).
 - (a) Montrer que $\mathcal{H}_u$ est le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 pour φ_u .
 - (b) φ_u est-il diagonalisable ?
 - (c) t étant un réel non nul, comparer les applications φ_u et φ_{tu} .

5. *Etude d'une réciproque.* On suppose que ψ est un endomorphisme de E tel qu'il existe une droite vectorielle Δ de E vérifiant

$$\forall y \in \Delta \quad \psi(y) = y \text{ et } \forall z \in \Delta^\perp \quad \psi(z) = -z$$

- (a) Montrer que ψ est involutif et conserve le produit scalaire.
- (b) Etablir qu'il existe au moins un vecteur u non nul de Δ tel que l'on ait : $\psi = \varphi_u$.
- (c) Soit $\mathcal{M}$ la matrice de ψ dans une base orthonormale $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E . Soit $a_{i,j}$ (où i et j désignent des entiers compris entre 1 et n) le coefficient de la i -ième ligne et j -ième colonne de la matrice ${}^t\mathcal{M}\mathcal{M}$. Montrer que $a_{i,j} = \text{scal}v\psi(e_i)\psi(e_j)$. En déduire que : ${}^t\mathcal{M}\mathcal{M} = I_n$. où I_n désigne la matrice unité d'ordre n .

Exercice 2

1. On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}_+^\times$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\times \quad f(x) = x^x$$

et la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^\times}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^\times \quad u_n = \frac{(-1)^n}{n^n}$$

- (a) Montrer que l'intégrale : $I = \int_0^1 f(t)dt$ converge (ici, on ne demande pas de la calculer).
- (b) Etudier la nature de la série de terme général u_n .

2. Soit trois entiers naturels n, p et k ; on pose

$$J_n = \int_0^1 (x \ln x)^n x \text{ et } K_{p,k} = \int_0^1 x^p (\ln x)^k x$$

- (a) Montrer que J_n et $K_{p,k}$ existent (on distinguera les cas $p = 0$ et $p \neq 0$).
 - (b) Pour k différent de zéro, déterminer une relation entre $K_{p,k}$ et $K_{p,k-1}$.
 - (c) En déduire la valeur de J_n en fonction de n .
3. (a) Donner, sur $]0, 1]$, un majorant de la fonction qui à x associe $|x \ln x|$.
- (b) Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à deux

$$\left| I - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} J_k \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{e^{n+1}}$$

(On pourra utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction exponentielle)

- (c) En déduire que : $I = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}}$.
- (d) Calculer avec une précision d'au moins 2×10^{-7} une valeur approchée de I .

Problème

Le but de ce problème (dont les trois parties sont indépendantes) est l'étude du temps passé dans une mairie par un usager quand un ou plusieurs guichets sont à la disposition du public, et que plusieurs personnes se présentent en même temps. On rappelle que, si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de densités de probabilités respectives f et g , $X + Y$ admet pour densité de probabilité la fonction h définie par

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(t-x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-x)g(x)dx$$

A moins d'une mention explicite du contraire dans l'énoncé, X étant une variable aléatoire à densité, on désignera par F_X sa fonction de répartition, et par f_X une fonction densité de probabilité de X .

Partie I Etude de deux guichets

Dans cette partie, il y a deux guichets à la disposition du public. Trois personnes A_1, A_2 et A_3 entrent en même temps dans la salle. A l'instant $t = 0$, A_1 et A_2 s'adressent simultanément aux deux guichets. A_3 attend et s'adressera au premier guichet libéré, soit par A_1 , soit par A_2 .

On suppose que :

- la durée de passage au guichet de A_i ($i = 1, 2$ ou 3) est une variable aléatoire X_i qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$;
- les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 sont mutuellement indépendantes;
- la durée du changement de personne à chaque guichet peut être considérée comme nulle.

1. Etude d'un évènement.

On se propose de calculer la probabilité de l'évènement E : “ A_3 quitte la mairie en dernier”.

- (a) Montrer que la variable X'_2 définie par $X'_2 = -X_2$ suit la loi uniforme sur l'intervalle $[-1, 0]$.
- (b) On admet l'indépendance de X_1 et X'_2 .

Calculer une densité de probabilité φ_1 de la variable Y_1 , définie par : $Y_1 = X_1 - X_2$.

On précisera cette fonction sur chacun des intervalles suivants : $] -\infty, -1[$, $] -1, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.

En déduire Φ_1 , fonction de répartition de Y_1 .

- (c) Calculer la fonction de répartition, Φ_2 , de la variable Z_1 , définie par $Z_1 = |Y_1|$. En déduire une densité de probabilité, φ_2 , de Z_1 .
- (d) On admet l'indépendance de Z_1 et $-X_3$.
- Calculer une densité de probabilité, φ_3 , de la variable $Z_1 - X_3$. On précisera cette fonction sur chacun des intervalles suivants : $] -\infty, -1[$, $] -1, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.
 - En déduire la probabilité de l'événement $(Z_1 - X_3 \leq 0)$. Quelle est la probabilité de E ?

2. Etude d'une variable aléatoire.

On pose : $T_3 = \inf(X_1, X_2) + X_3$.

- (a) Que représente T_3 pour A_3 ?
- (b) Calculer la fonction de répartition, F , de $\inf(X_1, X_2)$.
En déduire une densité de probabilité, f , de cette variable aléatoire. Que remarque-t-on ?
- (c) Montrer que la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 2t - t^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ (t-2)^2 & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$$

est une densité de probabilité de T_3 . En déduire l'espérance mathématique et la variance de T_3 .

Partie 2 Etude de n guichets

Dans cette partie, n guichets sont ouverts au public. n personnes $A_1, A_2, \dots, A_n$ se présentent à la mairie à l'instant $t = 0$ et s'adressent à l'un des guichets (les n guichets sont donc tous occupés à l'instant $t = 0$).

On suppose que :

- la durée de passage au guichet de A_i ($1 \leq i \leq n$) est une variable aléatoire X_i qui suit la loi exponentielle de paramètre λ strictement positif donné ;
- les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.

- On désigne par U_n la variable aléatoire égale au temps passé au guichet par la personne qui a, *la première*, terminé sa démarche administrative.
- Déterminer la loi de U_n . Quelle loi reconnaît-on ? Donner son espérance mathématique et sa variance.
On note V_n la variable aléatoire égale au temps passé au guichet par la personne qui a, *la dernière*, terminé sa démarche administrative.
Déterminer la fonction de répartition de V_n . En déduire une de ses densités de probabilité, et montrer que son espérance mathématique est donnée par

$$E(V_n) = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} C_n^{k+1}$$

- Soit t un réel strictement positif. On désigne par W_t la variable aléatoire égale au nombre de personnes ayant terminé leur démarche administrative à l'instant t . Donner la loi de W_t ainsi que son espérance mathématique.

Partie 3 Etude d'un guichet

Dans cette partie, un seul guichet est ouvert au public. Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, on se donne une suite $N, X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes. On suppose que les variables X_i ($i \in \mathbb{N}^\times$) suivent toutes la loi exponentielle de paramètre λ strictement positif donné, et que N suit la loi géométrique de paramètre p (où p désigne un élément de l'intervalle $]0, 1[$).

N personnes $A_1, A_2, \dots, A_N$ se présentent à la mairie à l'instant $t = 0$, et font donc la queue, dans cet ordre, devant ce guichet.

On suppose que, pour tout entier naturel i non nul, la durée de passage au guichet de A_i est donnée par la variable aléatoire X_i . On pose :

$$S = \sum_{i=1}^N X_i$$

ce qui signifie que

$$\forall \omega \in \Omega \quad S(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega)$$

Par exemple

- Si $N(\omega) = 2$ alors $S(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega)$
- Si $N(\omega) = 4$ alors $S(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) + X_3(\omega) + X_4(\omega)$

Ainsi, S , qui est la somme d'un nombre aléatoire de variables X_i , apparaît comme étant le temps total passé à la mairie par la personne qui termine en dernier sa démarche administrative.

1. Soit n un entier naturel non nul fixé. Rappeler la formule donnant une densité de probabilité de la variable aléatoire $\sum_{i=1}^n X_i$.
2. Soit x un réel strictement positif.
 - (a) Exprimer, à l'aide d'une intégrale dont le calcul explicite (bien que possible) n'est pas demandé, la probabilité que l'événement $(S \leq x)$ soit réalisé sachant que l'événement $(N = n)$ l'est.
 - (b) En déduire la fonction de répartition de S (on admettra qu'il est possible de permuter les deux symboles $\sum_{n=1}^{+\infty}$ et $\int_0^x$ que l'on rencontrera au cours du calcul).
Donner une densité de probabilité de S .
Reconnaître la loi de S .
 - (c) Montrer que $E(S) = E(X_i)E(N)$.