

ECRI COME

Banque d'épreuves communes

aux concours des Ecoles

esc bordeaux / esc marseille / icn nancy / esc reims / esc rouen / esc toulouse

CONCOURS D'ADMISSION

option générale

MATHÉMATIQUES

Année 1993

Aucun document n'est autorisé.

L'énoncé comporte 5 pages

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

**Tournez la page
S.V.P**

EXERCICE1

n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

1. Soit $f :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$, continue et décroissante, et telle que $\int_0^1 f(x)dx$ soit convergente.

On pose pour tout entier $n \geq 1$: $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$

- (a) i. Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, montrer que $\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(x)dx$.

- ii. Pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, montrer que $\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(x)dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

- iii. En déduire que : $\frac{f(1)}{n} + \int_{1/n}^1 f(x)dx \leq S_n \leq \int_0^1 f(x)dx$.

- (b) En déduire la limite de S_n quand $n \rightarrow +\infty$.

2. (a) Justifier l'existence et calculer la valeur de $I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(u)}{u^{3/2}} du$.

- (b) A l'aide d'un changement de variable, montrer que $I = -\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$.

3. Soit $P_n = \prod_{k=1}^n \left(\frac{n}{k}\right)^{1/\sqrt{kn}}$.

- (a) Ecrire un algorithme qui, pour n donné, calcule et affiche P_n .

- (b) Donner les valeurs de P_n pour $n \in \{20, 50, 100\}$.

- (c) A l'aide du 1, déterminer la limite de P_n quand $n \rightarrow +\infty$.
La convergence est-elle rapide ?

EXERCICE 2

N.B. On pourra utiliser le fait qu'une matrice $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Si $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, on note $\phi(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$

1. (a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que λ est valeur propre de $\phi(A)$ si et seulement si

$$(a - \lambda^2)(d - \lambda^2) - bc = 0.$$

- (b) En déduire l'équivalence suivante :

$$\lambda \text{ est valeur propre de } \phi(A) \Leftrightarrow \lambda^2 \text{ est valeur propre de } A.$$

- (c) Exemple : si $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, quelles sont les valeurs propres de $\phi(A)$?
 $\phi(A)$ est-elle diagonalisable ?

2. On suppose maintenant que $a = 1$ et $b = 0$.

(a) Pour λ fixé dans $\mathbb{R}$, on note $V(\lambda)$ l'ensemble des vecteurs (x, y, z, t) de $\mathbb{R}^4$ tels que

$$\phi(A) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}.$$

i. Déterminer $V(1)$ et $V(-1)$, ainsi que leurs dimensions, dans le cas où $d \neq 1$ ou $c \neq 0$.

ii. Même question si $d = 1$ et $c = 0$.

(b) Etablir l'équivalence suivante : $\phi(A)$ est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_4(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} (d = 1 \text{ et } c = 0) \\ \text{ou} \\ (d > 0 \text{ et } d \neq 1) \end{cases}$

(c) Déterminer la probabilité pour que $\phi(A)$ ait quatre valeurs propres réelles distinctes dans chacun des deux cas suivants :

i. c et d sont des *entiers* choisis au hasard et indépendamment l'un de l'autre dans $[-5, 3]$.

ii. c et d sont des réels choisis au hasard et indépendamment l'un de l'autre dans $[-5, 3]$.

(d) Déterminer la probabilité pour que $\phi(A)$ soit diagonalisable dans $\mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$ dans chacun des cas 2(c)i et 2(c)ii.

PROBLEME

Un jeu réunit une infinité de joueurs $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$

- D'abord A_1, A_2, A_3 disputent ensemble un tournoi qui les classe (sans ex-aequo), les différents classements possibles étant équiprobables.
Le joueur classé dernier est éliminé.
- Les deux autres et A_4 disputent un deuxième tournoi analogue (indépendamment du premier) qui classe ces trois joueurs. Le joueur classé dernier est éliminé.
- Il peut se faire qu'un même joueur arrive premier à ces deux tournois : dans ce cas, il est déclaré gagnant du jeu, et le jeu s'arrête.
- Sinon, les joueurs restant après le deuxième tournoi disputent avec A_5 un troisième tournoi analogue (indépendant des deux premiers) etc...
- A chaque tournoi, le joueur classé dernier est éliminé, et les deux autres rencontrent le suivant.
- Est décrété gagnant du jeu le premier joueur qui se trouve classé premier à deux tournois successifs (et alors le jeu s'arrête).
- Pour n entier supérieur ou égal à 2, on note G_n l'évènement :

" A_1 est gagnant du jeu au $n^{\text{ième}}$ tournoi".

- Enfin, soit X la variable aléatoire égale au nombre de tournois disputés (pour déterminer le gagnant).
L'objet du problème est d'étudier la variable aléatoire X et calculer la probabilité pour que le joueur A_1 gagne.

Le problème est composé de deux parties largement indépendantes

Première partie : loi de X et probabilité de G_n pour $n \in \{2, 3, 4, 7\}$

A)

1. Calculer $P(G_2)$, c'est-à-dire la probabilité pour que le joueur A_1 remporte les deux premiers tournois (et gagne alors le jeu). Que vaut $P(X = 2)$?
2. Pour tout entier $k \geq 4$, on note J_k l'évènement : " A_k joue".
 - (a) Montrer que $P(J_5) = \frac{2}{3}$. Pour $i \geq 4$, que vaut $P(J_{i+1}/J_i)$?
 - (b) En déduire que $P(J_k) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-4}$.
3.
 - (a) Pour tout entier $n \geq 2$, comparer les évènements $(X \geq n)$ et J_{n+2} .
 - (b) En déduire la valeur de $P(X = n)$.
 - (c) Vérifier que l'on a bien : $\sum_{n=2}^{+\infty} P(X = n) = 1$.
4. Quelle est la loi suivie par $X - 1$? En déduire l'espérance et la variance de X .

B) Pour tout couple (i, j) d'entiers naturels non nuls, on considère les évènements P_i et S_j suivants

P_i : " A_1 est classé premier au $i^{\text{ième}}$ tournoi"

S_j : " A_1 est classé second au $j^{\text{ième}}$ tournoi et le jeu continue"

1. Exprimer G_3 et G_4 à l'aide de ces évènements.
2.
 - (a) Calculer $P(G_3)$.
 - (b) Montrer que $P(S_2/S_1) = \frac{1}{6}$ et que $P(S_2/P_1) = \frac{1}{3}$.
Prouver que $P(G_4) = \frac{1}{54}$.
3.
 - (a) Ecrire les suites des classements de A_1 (au cours des 7 premiers tournois) favorables à l'évènement G_7 . (on vérifiera qu'il y en a huit).
 - (b) Calculer $P(G_7)$

Deuxième partie : probabilité pour que le joueur A_1 gagne

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, soit $\mathcal{U}_n^k$ l'ensemble des n -listes de $\{1, 2\}$ qui vérifient les trois conditions suivantes :

- a) elles finissent par 2; ù
- b) elles ne contiennent jamais deux "1" consécutifs;
- c) k fois (exactement) un "2" est suivi d'un autre "2"

Exemples : la suite $(1, 2, 2, 1, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 2)$ appartient à $\mathcal{U}_{11}^3$;

$(1, 2, 2, 2) \in \mathcal{U}_4^3$; $(2, 1, 2, 2) \in \mathcal{U}_4^1$; $(2, 2, 1, 2, 2) \in \mathcal{U}_5^3$; $(1, 2, 2, 2, 2) \in \mathcal{U}_5^3$

On pose $u_n^k = \text{card} \mathcal{U}_n^k$, avec la convention : $u_0^0 = 1$.

1. **Calcul de u_n^k**
 - (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$, déterminer $\mathcal{U}_n^0$, $\mathcal{U}_n^n$, $\mathcal{U}_{n+1}^n$, $\mathcal{U}_{n+2}^n$.
En déduire que $u_n^0 = 1$, $u_n^n = 0$, $u_{n+1}^n = 1$, $u_{n+2}^n = 1$.
 - (b) En classant les n -listes de $\mathcal{U}_n^k$ suivant la valeur de leur $(n-1)^{\text{ième}}$ élément, montrer que, pour $n \geq 3$ et $k \geq 1$: $\underline{u_n^k = u_{n-2}^k + u_{n-1}^{k-1}}$.

- (c) Pour $i \in \mathbb{N}$ et $j \in \llbracket 0, i \rrbracket$, on pose $\gamma_i^j = u_{2i+1-j}^i$ et $\delta_i^j = u_{2i+2-j}^j$.
- Calculer γ_i^0 et γ_i^i ; pour $i \geq 2$ et $j \in \llbracket 1, i-1 \rrbracket$, exprimer $\gamma_{i-1}^{j-1} + \gamma_{i-1}^j$ en fonction de γ_i^j .
En déduire la valeur de γ_i^j .
 - Procéder de la même façon qu'au 1(c)i pour obtenir δ_i^j .
 - En déduire que : $\forall (k, p) \in \mathbb{N}^2, \quad u_{k+2p+1}^k = u_{k+2p+2}^k = C_{k+p}^p$.

2. Deux séries

Soient $k \in \mathbb{N}$, $x \in]0, \frac{1}{2}[$ et $f : \begin{array}{ccc} [0, x] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \frac{1}{(1-u)^{k+1}} \end{array}$

- Pour tout $p \in \mathbb{N}$, calculer $f^{(p)}(u)$.
- A l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^\times, \quad \left| \frac{1}{(1-x)^{k+1}} - \sum_{p=0}^{n-1} C_{k+p}^k x^p \right| \leq \frac{1}{(1-x)^{k+1}} C_{k+n}^k \left(\frac{x}{1-x} \right)^n.$$

- En déduire que : $\sum_{p=0}^{+\infty} C_{k+p}^k x^p = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$.

- Calculer $\alpha_k = \sum_{p=0}^{+\infty} u_{k+2p+1}^k \left(\frac{1}{3} \right)^{k+2p+3}$ et $\alpha'_k = \sum_{p=0}^{+\infty} u_{k+2p+2}^k \left(\frac{1}{3} \right)^{k+2p+4}$.

3. Probabilité pour que A_1 gagne : on note p_1 cette probabilité

- Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $P(G_n) = \sum_{k=0}^{n-2} u_{n-2}^k \left(\frac{1}{6} \right)^k \left(\frac{1}{3} \right)^{n-k}$ (il est conseillé, pour traiter cette question, d'avoir auparavant compris le calcul de $P(G_7)$ effectué à la fin de la première partie).
- A l'aide d'une "permutation de $\sum$ " (dont on admettra la validité), montrer que :

$$p_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^k \beta_k \text{ avec } \beta_k = \sum_{n=k+2}^{+\infty} u_{n-2}^k \left(\frac{1}{3} \right)^n.$$

- Calculer β_0 .
- Pour $k \geq 1$, montrer que $\beta_k = \frac{4}{27} \left(\frac{3}{8} \right)^{k+1}$.
- En déduire enfin la valeur de p_1 .