

ECRI COME

Banque d'épreuves communes

aux concours des Ecoles

esc bordeaux / esc marseille / icn nancy / esc reims / esc rouen / esc toulouse

CONCOURS D'ADMISSION

option scientifique

MATHÉMATIQUES

Année 1992

Aucun instrument de calcul n'est autorisé.

Aucun document n'est autorisé.

L'énoncé comporte 5 pages

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

**Tournez la page
S.V.P**

Exercice 1

Notations:

♣ a est un réel fixé.

♣ $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

♣ On note ϕ l'application qui, à tout élément f de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, fait correspondre la fonction g définie par

$$\begin{cases} g(x) = \frac{1}{x-a} \int_x^{2x-a} f(t)dt & \forall x \in \mathbb{R} - \{a\} \\ g(a) = f(a) \end{cases}$$

- 1 -**
- Vérifier que ϕ définit un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.
 - Justifier la dérivabilité de g sur $\mathbb{R} - \{a\}$ et calculer $g'(x)$ pour x, a .
 - On prend $f : t \mapsto |t - a|$; l'application g correspondante est-elle dérivable en a ?
 - ϕ est-il un endomorphisme surjectif?
- 2 -**
- Soit $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ vérifiant: $\forall x \in \mathbb{R}, u(x) = 2u(2x - a)$.
 - Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u\left(\frac{(2^n - 1)a + x}{2^n}\right) = 2^n u(x)$.
 - En déduire que u est l'application nulle.
 - Déterminer le noyau de ϕ .
- 3 -** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n .
Pour tout k entier compris entre 0 et n , on définit d_k par
- $$\forall x \in \mathbb{R}, d_k = (x - a)^k \quad (d_0(x) = 1).$$
- Déterminer $\phi(d_k)$.
 - On note ϕ_n la restriction de ϕ à $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que ϕ_n est un automorphisme diagonalisable.
- 4 -** Soit $n \in \mathbb{N}$.
- c_n désigne l'application $x \mapsto x^n$. Ecrire c_n comme combinaison linéaire de $d_0, d_1, \dots, d_n$.
 - Déterminer les applications f de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ vérifiant:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_x^{2x-a} f(t)dt = (x - a)x^n$$

Exercice 2

a désigne un réel de $]0, 1[$.

Un signal lumineux se déplace entre trois points A , B et C .

S'il est en A , la probabilité qu'il se déplace en B est égale à a et celle qu'il se déplace en C est $1 - a$.

S'il est en B , la probabilité qu'il aille en A est égale à a et celle qu'il aille en C est $1 - a$.

Enfin S'il est en C , la probabilité qu'il aille en A est égale à a et celle qu'il aille en B est $1 - a$.

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n (respectivement B_n et C_n) l'événement: "le signal est en A (respectivement en B et en C) après le $n^{\text{ième}}$ déplacement".

Si $n = 0$, on note A_0 (respectivement B_0 et C_0) l'événement: "le signal est en A (respectivement en B et en C) avant le premier déplacement".

Enfin pour tout entier n , on note $X_n = \begin{bmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \end{bmatrix}$.

1 - Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, : X_{n+1} = MX_n$ où $M = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & 1-a \\ 1-a & 1-a & 0 \end{pmatrix}$.

On pose $N = {}^tM$.

- 2 -**
- Vérifier que le vecteur $u = (1, 1, 1)$ est un vecteur propre de N .
A quelle valeur propre est-il associé?
 - Déterminer les autres valeurs propres de N , et suivant les valeurs de a les sous-espaces propres associés.
 - N est-elle diagonalisable?

3 - Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a-1 \\ 1 & -a & a-1 \\ 1 & -a & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1} . (on fera apparaître les calculs.)

Dans la suite de l'exercice, on fixe $a = \frac{1}{4}$.

- 4 -**
- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, N^n = PD^nP^{-1}$ où D est une matrice diagonale à préciser.
 - Calculer alors N^n pour tout entier n .
 - Endéduire la valeur de M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

5 - On suppose qu'avant le premier déplacement, le signal est en A .

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $P(A_n)$, $P(B_n)$, $P(C_n)$ en fonction de n .
- Déterminer alors les limites de ces suites lorsque n tend vers $+\infty$.

Problème

Dans tout ce problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et β un réel strictement positif.

Dans un rayon de magasin, il y a n articles $a_1, a_2, \dots, a_n$, valant respectivement $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ francs.

Un client se présente et achète un nombre aléatoire A d'articles distincts de ce rayon ($0 \leq A \leq n$).

On suppose que, lorsqu'un client s'est décidé pour l'achat de A articles, les différents choix possibles des ces A articles sont équiprobables.

♣ On note S la somme payée par le client pour l'achat des ces A articles et pour $1 \leq i \leq n$, X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le client achète l'article a_i et 0 si non.

♣ L'objet de ce problème est principalement d'évaluer l'espérance et la variance de S , suivant deux hypothèses différentes sur A .

♣ Les deux parties du problème sont largement indépendantes; seuls les résultats des questions A et E1 de la première partie sont utilisées dans la deuxième.

Partie I

- A -**
1. Pour $0 \leq k \leq n$, calculer la probabilité conditionnelle $P((X_i = 1)/(A = k))$.
 2. i et j désignant deux entiers distincts compris entre 1 et n , calculer $P(((X_i = 1) \cap (X_j = 1))/(A = k))$.
 3. Comment s'exprime S en fonction des variables aléatoires X_i et des réels α_i ?

♣ On fait dans cette première partie l'hypothèse suivante:

$$(H') \quad A \text{ suit la loi uniforme sur } \{0, \dots, n\}$$

B - Calculer $P(X_i = 1)$ à l'aide de la formule des probabilités totales.

C - Calculer l'espérance $E(S)$ de S en fonction des réels α_i .

D - i et j désignent deux entiers distincts compris entre 1 et n .

1. Calculer $P((X_i = 1) \cap (X_j = 1))$.
2. Calculer la covariance et le coefficient de corrélation linéaire du couple (X_i, X_j) .
Les variables aléatoires X_i et X_j sont-elles indépendantes?
3. Exprimer la variance $V(S)$ de S en fonction de $(\sum_{i=1}^n \alpha_i)^2$ et $\sum_{i=1}^n (\alpha_i)^2$.
4. On suppose dans cette question uniquement, que $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \alpha_i = i$.
Vérifier que $V(S) = \frac{n(n+1)}{144}(3n^2 + 11n + 4)$.

E - On suppose maintenant plus généralement, que $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \alpha_i = i^\beta$.

1. Déterminer la limite, quand n tend vers $+\infty$ de $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^\beta$.
En déduire un équivalent, quand n tend vers $+\infty$ de $\sum_{i=1}^n (i)^\beta$, puis de $E(S)$.
2. Donner un équivalent, de la forme γn^δ , de la variance $V(S)$ quand n tend vers $+\infty$. (γ et δ sont des constantes réelles que l'on déterminera.)

Partie II

a désigne un réel appartenant à $]0, 1[$. On fait dans cette deuxième partie, l'hypothèse suivante:

(H'') **La loi de A est définie par:**
$$\begin{cases} P(A = 0) = a \\ \text{il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que : } \forall k \in \{1, \dots, n\} \quad P(A = k) = \frac{\lambda}{k} \end{cases}$$

A - Déterminer λ .

B - Etude du cas particulier: $n = 3$, $a = \frac{1}{12}$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$ et $\alpha_3 = 3$.
Déterminer les lois de A et de S , et calculer $E(S)$ et $V(S)$.



On reprend maintenant l'étude du cas général

C - Calculer $P(X_i = 1)$.

D - i et j désignent encore deux entiers distincts compris entre 1 et n .

1. calculer $P((X_i = 1) \cap (X_j = 1))$.
2. Quelle relation doit-il exister entre a et n pour que les variables aléatoires X_i et X_j soient indépendantes?
3. Calculer la covariance du couple (X_i, X_j) .

E - Exprimer $E(S)$ et $V(S)$ en fonction de λ , $\sum_{i=1}^n \alpha_i$ et $\sum_{i=1}^n (\alpha_i)^2$.

F - On suppose dans cette question que $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\alpha_i = i^\beta$.

1. Ecrire un algorithme qui à partir de n , a , β calcule $E(S)$ et $V(S)$.
Donner les résultats numériques pour:
 - a. $n = 10$; $a = 0, 1$; $\beta = 1, 5$
 - b. $n = 20$; $a = 0, 5$; $\beta = 1, 2$
2. On pose: $u_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln(n)$ et $v_n = u_n - u_{n-1}$.
 - a. Déterminer un équivalent de v_n quand n tend vers $+\infty$; quelle est la nature de la série de terme général v_n ?
 - b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
Montrer alors que $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.
3. Donner un équivalent de $E(S)$ quand n tend vers $+\infty$.
4. Donner un équivalent de $V(S)$ quand n tend vers $+\infty$.

G - Comparaison des hypothèses (H') et (H'') .

1. Quelle est l'hypothèse la plus vraisemblable?
2. Quelle est l'hypothèse la plus avantageuse en moyenne pour le vendeur? (On discutera suivant les valeurs de n et de a)