

ECRI COME

Banque d'épreuves communes

aux concours des Ecoles

EDHEC / esc marseille / icn nancy / esc reims / esc rouen

CONCOURS D'ADMISSION

option générale

MATHÉMATIQUES

Année 1990

Aucun document n'est autorisé.

L'énoncé comporte 5 pages

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

**Tournez la page
S.V.P**

EXERCICE n° 1

On note E_2 l'espace vectoriel de dimension 3 sur le corps des réels, constitué de la fonction nulle et des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à 2.

1. (a) Déterminer les réels $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ tels que, pour tout fonction $P \in E_2$

$$\int_0^1 P(t).e^t dt = \lambda_0 P(0) + \lambda_1 P\left(\frac{1}{2}\right) + \lambda_2 P(1).$$

- (b) On note Θ la fonction numérique définie par $\theta : \begin{matrix} [0, 1] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \ln(1+t) \end{matrix}$.

Montrer qu'il existe une unique fonction, à déterminer, $P_\theta \in E_2$ telle que $P_\theta(x) = \theta(x)$ pour $x = 0, \frac{1}{2}$ et 1.

- (c) On pose

$$I = \int_0^1 \ln(1+t).e^t dt, \quad I^* = \int_0^1 P_\theta(t).e^t dt.$$

Calculer I^* considérer comme valeur approchée de I .

2. Soit $\alpha \in]0, 1[\setminus \{\frac{1}{2}\}$. On considère la fonction définie sur $[0, 1]$ par

$$\delta_\alpha(t) = \ln(1+t) - P_\theta(t) - \frac{t(t - \frac{1}{2})(t-1)}{\alpha(\alpha - \frac{1}{2})(\alpha-1)} [\ln(1+\alpha) - P_\theta(\alpha)].$$

Constater que δ_α s'annule en quatre points distincts de $[0, 1]$.

En déduire, par application du théorème de Rolle, qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $\delta_\alpha^{(3)}(c) = 0$ où $\delta_\alpha^{(3)}$ désigne la dérivée 3^{ième} de δ_α , puis que

$$\ln(1+\alpha) - P_\theta(\alpha) = \frac{\alpha(\alpha - \frac{1}{2})(\alpha-1)}{6} \cdot \frac{2}{(1+c)^3}.$$

Montrer alors, après avoir étudié les variations de la fonction $\Delta : t \mapsto t(t - \frac{1}{2})(t-1)$ sur $[0, 1]$, que

$$\forall t \in [0, 1], \quad |\ln(1+t) - P_\theta(t)| \leq \frac{1}{36.\sqrt{3}}.$$

En déduire que : $|1 - I^*| < 3.10^{-2}$.

EXERCICE n° 2

Les ventes de mini-ordinateurs de jeux, réalisées au cours des fêtes de fin d'année, ont été observées dans un magasin X et ont donné les relevés suivants

Année t_j	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988
Unités vendues n_j (arrondies)	275	400	450	525	550	525	500

On pose :

$$x_i = t_i - 1985 \quad \text{et} \quad y_i = \frac{n_i - 400}{25} \quad \text{avec } i \text{ variant de } -3 \text{ à } +3.$$

- I-. (1) Déterminer la droite de régression de y en x .
 (2) Représenter sur un même graphe le nuage de points (x_i, y_i) , et la droite déterminée en I-1.
- II-. (1) Soit p un entier naturel non nul. On considère les fonctions polynômiales définies par

$$P_0(x) = 1 \quad ; \quad P_1(x) = x \quad ; \quad P_2(x) = x^2 - \frac{p^2 + p}{3}.$$

Montrer que pour tout couple $(k, l) \in \{(0, 1), (0, 2), (1, 2)\}$, on a : $\sum_{i=-p}^p P_k(i) \cdot P_l(i) = 0$.

- (2) On se propose de rechercher une fonction polynômiale de degré 2 ajustant au mieux le relevé statistique (x_i, y_i) obtenu en introduction.
 Reprenant les notations de II-1, avec $p = 3$, on note cette fonction sous la forme :

$$P(x) = \alpha P_0(x) + \beta P_1(x) + \gamma P_2(x)$$

et on choisit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ de façon à rendre minimale la quantité : $A = \sum_{i=-3}^3 [y_i - P(x_i)]^2$.

- a). On suppose β et γ fixés arbitrairement : A peut alors être considérée comme une fonction de α .
 Montrer que la valeur de α rendant minimale A est

$$\alpha_0 = \frac{\sum_{i=-3}^3 P_0(i) \cdot y_i}{\sum_{i=-3}^3 (P_0(i))^2}.$$

- b). On suppose désormais $\alpha = \alpha_0$ et γ fixé, quelle valeur β_0 de β rend A minimale ?
 c). Enfin, pour $\alpha = \alpha_0$ et $\beta = \beta_0$, quelle valeur γ_0 de γ rend A minimale ?
 d). Préciser les valeurs numériques de $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ et représenter sur le graphique du I-2 la fonction d'ajustement :

$$P = \alpha_0 P_0 + \beta_0 P_1 + \gamma_0 P_2$$

PROBLEME

Un article A est commercialisé sous trois présentations différentes. Le problème étudie une suite aléatoire d'achat de cet article et la probabilité que, pour l'une des trois présentations, qui sera, par la suite, appelée présentation P, la fréquence des choix s'étant portés sur elle soit exactement $\frac{1}{3}$.

Première partie -A

On considérera qu'un acheteur de l'article A ne se porte acquéreur que d'un seul article, que les achats sont indépendants entre eux et que le choix d'un client se porte sur la présentation P avec une probabilité p .

- On observe une suite de $3n$ achats, n désignant un entier naturel non nul.
 Quelle est la probabilité p_n pour que la fréquence observée de choix de la présentation P soit égale à $\frac{1}{3}$?
- On observe une succession d'achats de l'article A et on note q_n la probabilité pour que, avec le $(3n)^{ième}$ achat, on obtienne pour la première fois la fréquence $\frac{1}{3}$ attendue.
 - Montrer que
$$\begin{aligned} p_1 &= q_1 \\ p_2 &= q_1 p_1 + q_2 \end{aligned}$$

(b) Etablir que, pour tout entier $n \geq 2$: $p_n = \sum_{k=1}^{n-1} q_k p_{n-k} + q_n$.

(c) Montrer que, pour tout $n \geq 2$: $\sum_{k=1}^n (p_k - q_k) = \sum_{(i,j) \in E_n} p_i q_j$

la dernière somme étant étendue à tous les couples (i, j) de l'ensemble

$$E_n = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } i \geq 1, \quad j \geq 1, \quad 2 \leq i + j \leq n\}.$$

Justifier que, pour tout $n \geq 2$: $\sum_{(i,j) \in E_n} p_i q_j \leq \left(\sum_{i=1}^n p_i\right) \left(\sum_{j=1}^n q_j\right)$.

En déduire : $\sum_{k=1}^n (p_k - q_k) \leq \left(\sum_{i=1}^n p_i\right) \left(\sum_{j=1}^n q_j\right) \leq \sum_{k=1}^{2n} (p_k - q_k)$.

3. (a) De quel événement le réel

$$Q_n = q_1 + q_2 + \cdots + q_n, \text{ où } n \geq 1$$

est-il la probabilité ?

(b) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} q_n$ est convergente.

(c) Etablir, à l'aide du 2c, que lorsque la série $\sum_{n \geq 1} p_n$ est convergente de somme S , on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n = \frac{S}{S+1}$.

Deuxième partie -B

1. On considère la série de terme général p_n défini pour $n \geq 1$ par :

$$p_n = C_{3n}^n [x(1-x)^2]^n$$

où x désigne un paramètre réel, élément du segment $[0, 1]$ et où C_{3n}^n représente le nombre binomial $\frac{(3n)!}{n!(2n)!}$.

(a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$: $0 \leq \frac{C_{3n+3}^{n+1}}{C_{3n}^n} \leq \frac{3^3}{2^2}$.

(b) En déduire que pour tout $n \geq 1$: $0 \leq p_n \leq \left[\frac{3^3}{2^2} x(1-x)^2\right]^{n-1} p_1$.

(c) Etudier les variations de la fonction

$$\begin{aligned} \varphi : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{3^3}{2^2} x(1-x)^2 \end{aligned}$$

et justifier la convergence de la série $\sum p_n$ lorsque $x \neq \frac{1}{3}$.

(d) On suppose dans cette question $x = \frac{1}{10}$. Déterminer un majorant de : $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} p_k$.

Choissant comme valeur approchée de $S = \sum_{k=1}^{+\infty} p_k$, une somme partielle : $s_n = \sum_{k=1}^n p_k$, quelle valeur de n peut-on choisir pour que l'erreur commise soit inférieure à 10^{-2} ?

Calculer cette valeur approchée.

En déduire une valeur approchée de $l = \frac{S}{S+1}$.

2. On suppose $x = \frac{1}{3}$ dans cette question où l'on étudie la nature de la série $\sum p_n$.

- (a) Déterminer un développement limité quand n tend vers $+\infty$ de $\frac{p_{n+1}}{p_n}$ de la forme

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = 1 + \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

- (b) On pose, pour $n \geq 1$, $v_n = \frac{1}{n}$.

Après avoir déterminé un développement limité de $\frac{v_{n+1}}{v_n}$, quand n tend vers $+\infty$, analogue au précédent, montrer qu'il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$: $\frac{p_{n+1}}{p_n} \geq \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

- (c) Quelle est la nature de la série $\sum p_n$?