BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CODE EPREUVE :

280

HEC_M1_S

Concepteur : H.E.C.

OPTION : SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

Mercredi 18 Mai 2005, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

On rappelle que :

- pour tout réel x strictement positif, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} e^{(x-1)\ln t}e^{-t}dt$ est convergente ;
- la fonction Γ est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$, et associe à tout réel x strictement positif, le réel strictement positif $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$;
- pour tout réel x strictement positif, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Pour tout entier naturel k non nul, et pour toute fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$, k fois dérivable, on note $f^{(k)}$ la dérivée k-ième de la fonction f. Les dérivées première et seconde sont également notées f' et f''.

Dans les parties II et III du problème, exp désigne la fonction exponentielle. Les parties III et IV sont indépendantes.

Le problème a pour objet la mise en évidence de certaines propriétés de la fonction Γ.

Partie I. Une expression de $\Gamma(x)$

1. Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

a) Pour tout réel u tel que $0 \leqslant u < 1$, montrer que $\ln(1-u) \leqslant -u$. En déduire, pour tout réel t de l'intervalle $[0, n]$, l'inégalité : $\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t}$.

b) Étudier les variations de la fonction φ définie sur $[0, \sqrt{n}[$ qui, à tout réel t de $[0, \sqrt{n}[$ associe :

$$\varphi(t) = \ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) - t - n\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)$$

Établir, pour tout réel t de $[\,0, \sqrt{n}\,]$, l'inégalité :

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)e^{-t} \leqslant \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$$

c) Justifier, pour tout réel t de $[0, n]$, les inégalités :

$$e^{-t} - \frac{t^2}{n}e^{-t} \leqslant \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t}$$

En déduire que, pour tout réel x strictement positif :

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt$$

2. a) Pour tout réel x strictement positif et pour tout entier naturel n non nul, montrer que les intégrales $\int_0^1 y^{x-1}dy$ et $\int_0^1 y^{x-1}(1-y)^n dy$ sont convergentes.

On pose alors $B_0(x) = \int_0^1 y^{x-1}dy$ et pour tout n supérieur ou égal à 1, $B_n(x) = \int_0^1 y^{x-1}(1-y)^n dy$.

b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'égalité :

$$B_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$, la formule :

$$B_n(x) = \frac{\Gamma(x)\times\Gamma(n+1)}{\Gamma(x+n+1)}$$

c) Montrer que, pour tout réel x strictement positif :

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $\Gamma(x+n)\sim n^x(n-1)!$, lorsque n tend vers $+\infty$.

d) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $\lambda_n = \dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$. Montrer que $\lambda_n \sim \sqrt{\dfrac{2}{n}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie II. Dérivabilité de la fonction Γ et conséquences

1. a) Montrer que, pour tout entier naturel k non nul, et pour tout réel x strictement positif, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{x-1}(\ln t)^k e^{-t}dt$ est absolument convergente. On note $g_k(x)$ la valeur de cette intégrale.

b) Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}^{+*}$. Soit x_0 et x deux éléments distincts de $]a,b[$. Établir l'inégalité :

$$|\Gamma(x)-\Gamma(x_0)-(x-x_0)g_1(x_0)| \leqslant \frac{(x-x_0)^2}{2}\int_0^{+\infty}(\ln t)^2(\sup_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1})e^{-t}dt$$

c) Montrer l'inégalité suivante :

$$\int_0^{+\infty}(\ln t)^2(\sup_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1})e^{-t}dt \leqslant \int_0^1(\ln t)^2 t^{a-1}e^{-t}dt + \int_1^{+\infty}(\ln t)^2 t^{b-1}e^{-t}dt$$

En déduire que la fonction Γ est dérivable en x_0 et que $\Gamma'(x_0) = g_1(x_0)$.

d) Établir que la fonction Γ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que $\Gamma' = g_1$.

On montrerait de même que la fonction Γ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, et que $\Gamma'' = g_2$. Ce résultat est admis dans toute la suite du problème.

2. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $\gamma_n = -\ln n + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

a) Établir, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la double inégalité suivante : $\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} < \ln n < \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$.

En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, on a $0 < \gamma_n \leqslant 1$.

b) Montrer que la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et convergente. On note γ sa limite.

3. a) Pour tout réel x strictement positif, et pour tout entier n strictement positif, montrer l'égalité :

$$\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)\exp\left(-\frac{x}{k}\right)\right] = \exp(-x\gamma_n)\times\frac{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}{n^x n!}$$

b) On pose $v_n(x) = \prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)\exp\left(-\frac{x}{k}\right)\right]$. Montrer que la suite $(v_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. On note $\ell(x)$ sa limite. Montrer la relation :

$$\ell(x) = \frac{\exp(-\gamma x)}{x\Gamma(x)}$$

4. a) Soit x un réel strictement positif fixé. Montrer que la série de terme général $\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$, $n \geqslant 1$, est convergente.

ifier, pour tout réel x strictement positif, l'égalité :

$$\ln(\ell(x)) = -\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right]$$

uire, pour tout réel x strictement positif, la relation :

$$\ln(\Gamma(x)) = -\gamma x - \ln x + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right]$$

ψ la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\psi(x) = \dfrac{d}{dx}\left[\ln(\Gamma(x))\right]$.

, pour tout réel x strictement positif l'égalité : $\psi(x+1) = \psi(x) + \dfrac{1}{x}$.

iner un équivalent simple de $\psi(x)$ lorsque x tend vers 0^+. Justifier, pour tout entier n supérieur ou égal formule :

$$\psi(n) = \psi(1) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$$

tout entier n supérieur ou égal à 1, on considère la fonction U_n définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$U_n(x) = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}$$

gne par $A(x)$ la somme de la série de terme général $U_n(x)$.

trer que A est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. En particulier, exprimer pour tout réel x strictement positif, $A''(x)$ en fonction de $\Gamma(x), \Gamma'(x)$ et $\Gamma''(x)$.

x un réel strictement positif fixé. Montrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 1, la série de terme $U_n^{(k)}(x)$ est absolument convergente.

ute la suite du problème, **on admet** les deux résultats suivants : pour tout réel x strictement positif

$$A'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n'(x) \text{ et } A''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n''(x)$$

ller $\psi(1)$ en fonction de γ. En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty}(\ln n - \psi(n))$.

ut établir dans cette question que pour tout réel y strictement positif, on a $\psi'(y) > \dfrac{1}{y}$.

n réel strictement positif fixé. On considère la fonction G définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ qui, à tout réel t strictement associe $G(t) = \dfrac{1}{(t+x)^2}$.

rer que sur $\mathbb{R}^{+*}$, G est positive, strictement décroissante, et que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} G(t)dt$ est convergente.

éduire la double inégalité : $0 < \displaystyle\int_1^{+\infty} G(t)dt < \sum_{k=1}^{\infty} G(k)$.

ir l'inégalité : $\psi'(x) > \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x^2}$. Conclure.

II. Estimation des paramètres d'une loi $\Gamma(\theta, r)$

idère une variable aléatoire X, qui suit une loi $\Gamma(\theta, r)$, les deux paramètres inconnus θ et r étant des ctement positifs. Une densité f de X est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(r)\theta^r} \times x^{r-1}\exp\left(-\dfrac{x}{\theta}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

entier supérieur ou égal à 2. On considère un p-échantillon *i.i.d.* $(X_1, X_2, \ldots, X_p)$ de la loi de X : les aléatoires $X_1, \ldots, X_p$ sont mutuellement indépendantes et de même loi que X.

ne par $x_1, x_2, \ldots, x_p$, un p-échantillon de réalisations des variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_p$, respec- ; les réels $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sont fixés, strictement positifs et non tous égaux

Soit L la fonction (appelée *fonction de vraisemblance*) définie sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ qui, à tout couple (θ, r) de réels strictement positifs, associe :

$$L(\theta, r) = \prod_{i=1}^{p} f(x_i)$$

On pose $F(\theta, r) = \ln(L(\theta, r))$.

1. Montrer que la recherche du maximum de L sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$ est équivalente à la recherche du maximum de F sur ce même ensemble.

2. a) Établir l'existence sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$, des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de la fonction F. Les calculer.

b) Montrer que les éventuels points critiques $(\theta^\star, r^\star)$ vérifient le système (S) d'équations suivant :

$$(S) \qquad \begin{cases} \theta^\star r^\star = \overline{x} & (1) \\ \ln r^\star - \dfrac{\Gamma'(r^\star)}{\Gamma(r^\star)} = \ln \overline{x} - \dfrac{1}{p} \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \ln x_i & (2) \end{cases}$$

dans lequel $\overline{x} = \dfrac{1}{p} \displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i$.

3. On pose $K_p = \ln \overline{x} - \dfrac{1}{p} \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \ln x_i$.

a) Justifier, pour tout réel $x > 0$ et différent de 1, l'inégalité : $\ln x < x - 1$. En déduire que $K_p > 0$.

b) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$h(y) = \ln y - \frac{\Gamma'(y)}{\Gamma(y)} - K_p$$

Étudier les variations de h et dresser son tableau de variations.

c) Montrer que l'équation (2) admet sur $\mathbb{R}^{+*}$ une unique solution $r^\star$. En déduire que le système d'équations (S) admet une unique solution $(\theta^\star, r^\star)$.

4. Écrire la hessienne $\nabla^2 F$ de F au point $(\theta^\star, r^\star)$.
En déduire qu'au point $(\theta^\star, r^\star)$, la fonction L admet un maximum local.

On peut démontrer qu'en ce point, on obtient en fait un maximum global de L. On dit que le couple $(\theta^\star, r^\star)$ est une estimation du couple inconnu (θ, r) obtenue par la méthode du maximum de vraisemblance.

Partie IV. Estimateur sans biais de l'écart-type σ d'une loi normale centrée

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée et d'écart-type σ ; le paramètre réel inconnu σ est strictement positif.

1. Montrer que la variable aléatoire $T = \dfrac{X^2}{2\sigma^2}$ suit une loi γ de paramètre 1/2. En déduire la valeur de $\Gamma(1/2)$.

2. Pour n entier naturel non nul, on considère un n-échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ *i.i.d.* (indépendant, identiquement distribué) de la loi de X.

a) On désigne par S_n la variable aléatoire $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i^2}{2\sigma^2}$. Quelle est la loi de probabilité de S_n ?

b) En déduire que la variable aléatoire Y_n définie par $Y_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2$, est un estimateur sans biais de σ^2.

3. a) Montrer que l'espérance de $\sqrt{Y_n}$, notée $E(\sqrt{Y_n})$, vérifie : $E(\sqrt{Y_n}) < \sigma$.

b) Donner l'expression de $E(\sqrt{Y_n})$ en fonction de n et σ.

c) Montrer que la variable aléatoire $\widehat{\sigma_n}$ définie par :

$$\widehat{\sigma_n} = \frac{\lambda_n}{\sqrt{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \right)^{1/2}$$

où λ_n a été défini dans la question I.2.d, est un estimateur sans biais du paramètre σ.

4. a) Calculer la variance $V(\widehat{\sigma_n})$ de l'estimateur $\widehat{\sigma_n}$ en fonction de n et σ.

b) La suite $(\widehat{\sigma_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'estimateurs de σ converge-t-elle en probabilité vers σ ?