

CONCOURS D'ADMISSION DE 2003

Option scientifique

MATHEMATIQUES I

Lundi 19 Mai 2003 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Dans tout le problème, on désigne par n un entier naturel et par :

- $\mathbf{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des fonctions-polynômes de degré inférieur ou égal à n .
 - $\mathbf{C}^n(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles de classe $\mathbf{C}^n$ sur $\mathbf{R}$.
- En particulier, $\mathbf{C}^0(\mathbf{R})$ est l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $\mathbf{R}$.

A toute fonction f appartenant à $\mathbf{C}^0(\mathbf{R})$, on associe l'application notée ϕf définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\phi f(x) = \int_{x-1}^x f(t) dt.$$

On définit ainsi un endomorphisme ϕ de l'espace vectoriel $\mathbf{C}^0(\mathbf{R})$ dont on se propose dans la suite d'étudier quelques propriétés au travers de parties qui sont largement indépendantes.

PARTIE I : Généralités

1°) Dans cette question, on étudie quelques propriétés de ϕf en fonction de celles de f .

a) Prouver l'égalité suivante, pour toute fonction continue f et tout nombre réel x :

$$\phi f(x) = \int_0^1 f(x+u-1) du.$$

b) On suppose la fonction f paire (resp. impaire). Exprimer $\phi f(-x)$ en fonction de $\phi f(x+1)$.

c) On suppose la fonction f croissante (resp. décroissante). Est-ce le cas de ϕf ?

d) On suppose la fonction f convexe (resp. concave). Est-ce le cas de ϕf ?

e) On suppose que la fonction f a une limite L en $\pm\infty$. Est-ce le cas de ϕf ?

2°) Dans cette question, on étudie l'endomorphisme induit par ϕ sur $\mathbf{R}_n[x]$.

- Montrer que $\mathbf{R}_n[x]$ est stable par ϕ . On note alors ϕ_n l'endomorphisme induit par ϕ sur $\mathbf{R}_n[x]$.
- Déterminer la matrice de ϕ_n dans la base canonique de $\mathbf{R}_n[x]$.
- Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de ϕ_n .

3°) Dans cette question, on étudie l'injectivité et la surjectivité de ϕ .

- Montrer, pour toute fonction f de $C^0(\mathbf{R})$, que ϕf est de classe C^1 et préciser sa dérivée.
Pour quelles valeurs du nombre entier j l'espace vectoriel $\phi(C^j(\mathbf{R}))$ est-il inclus dans $C^j(\mathbf{R})$?
- Montrer que $\text{Ker}(\phi)$ est formé des fonctions 1-périodiques et d'intégrale nulle sur une période.
- L'endomorphisme ϕ est-il surjectif ? injectif ?

4°) Dans cette question, on étudie les éléments propres de ϕ .

- On considère une valeur propre λ de l'endomorphisme ϕ , autrement dit un nombre réel λ tel qu'il existe une fonction non nulle f appartenant à $C^0(\mathbf{R})$ vérifiant $\phi f = \lambda f$.
Montrer que toute fonction propre f associée à une valeur propre $\lambda \neq 0$, c'est à dire toute fonction continue non nulle f telle que $\phi f = \lambda f$, est nécessairement de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$.
- Quelles sont les fonctions-polynômes f qui sont fonctions propres de ϕ ?
- Montrer, pour tout nombre réel $\lambda > 0$, qu'il existe une et une seule fonction exponentielle f définie par $f(x) = e^{ax}$ ($a \in \mathbf{R}$) telle que $\phi f = \lambda f$.
En déduire que tout nombre réel $\lambda > 0$ est valeur propre de ϕ .
- Montrer, pour tout nombre réel $\lambda > 1$, que la seule fonction bornée f appartenant au sous-espace propre associé à λ est la fonction nulle.

Dans la suite du problème, on étudie le sous-espace propre $E_1(\phi)$ associé à la valeur propre 1, c'est à dire l'ensemble des fonctions continues f vérifiant $\phi f(x) = f(x)$ pour tout nombre réel x , ou :

$$\int_{x-1}^x f(t)dt = f(x).$$

PARTIE II : Existence d'une fonction non constante dans $E_1(\phi)$

1°) On considère la fonction f_0 définie de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}$ par $f_0(0) = f_0(1) = 0$ et pour $0 < x < 1$ par :

$$f_0(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) \exp\left(\frac{1}{x(x-1)}\right).$$

- Montrer que la courbe représentative de f_0 admet pour centre de symétrie le point $(1/2, 0)$.
- Montrer que f_0 est de classe C^1 sur $[0, 1]$ et que $\int_0^1 f(t)dt = 0$.

2°) On définit alors par récurrence à partir de f_0 une suite de fonctions (f_n) définies sur $[0, 1]$ par :

$$f_{n+1}(x) = f_n(1) \exp(x) - \exp(x) \int_0^x f_n(t) \exp(-t) dt.$$

- Montrer que f_{n+1} est de classe C^1 sur $[0, 1]$ et vérifie $(f_{n+1})' = f_{n+1} - f_n$. En déduire que :

$$f_{n+1}(1) - f_{n+1}(0) = \int_0^1 (f_{n+1}(t) - f_n(t)) dt.$$

- Montrer que $f_{n+1}(0) = f_n(1)$. En déduire que :

$$f_n(1) = \int_0^1 f_n(t) dt.$$

- c) Etablir enfin, pour tout nombre réel x de $[0, 1]$, que $f_{n+1}(x) = \int_0^x f_{n+1}(t)dt + \int_x^1 f_n(t)dt$.
- d) On note f l'application définie sur chaque intervalle $[n, n+1[$ où $n \in \mathbb{N}$ par $f(x) = f_n(x-n)$.
Ainsi, la fonction f est définie sur la réunion de ces intervalles $[n, n+1[$, et donc sur $[0, +\infty[$.
Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$ et vérifie $f(x) = \int_{x-1}^x f(t)dt$ pour tout nombre réel $x \geq 1$.

3°) On prolonge la fonction f définie ci-dessus sur $[0, +\infty[$ en une fonction définie sur $[-1, +\infty[$.
A cet effet, on pose $f(x) = f(x+1) - f'(x+1)$ pour $-1 \leq x < 0$.

Montrer que f est continue sur $[-1, +\infty[$ et vérifie $f(x) = \int_{x-1}^x f(t)dt$ pour tout nombre réel $x \geq 0$.

En répétant ce même procédé sur $[-2, +\infty[$, $[-3, +\infty[$, etc, on obtient une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\phi f(x) = f(x)$ pour tout nombre réel x (on ne demande pas d'explicitier ce raisonnement).

PARTIE III : Limite en $+\infty$ d'une fonction de $E_1(\phi)$

On désigne toujours par f une application de $E_1(\phi)$ et par n un nombre entier naturel.

1°) On étudie dans cette question les suites (M_n) et (m_n) des maxima et minima de f sur $[n, n+1]$.

a) Justifier l'existence du maximum M_n de la fonction f sur l'intervalle $[n, n+1]$, puis celle d'un nombre réel x_n appartenant à $[n, n+1]$ tel que $f(x_n) = M_n$.

b) On suppose $n \geq 1$. Montrer que :

- $f'(x_n) = 0$ si $n < x_n < n+1$, et comparer alors $f(x_{n-1})$ à $f(x_n)$.
- f est constante sur $[n, n+1]$ si $x_n = n+1$.

En déduire dans tous les cas que $M_{n-1} \geq M_n$.

c) On définit de même le minimum m_n de la fonction f sur l'intervalle $[n, n+1]$.

Etablir la monotonie de la suite (m_n) et en déduire la convergence des suites (M_n) et (m_n) .

2°) On étudie dans cette question l'existence d'une limite éventuelle de f en $+\infty$ et on pose :

$$L = 2 \int_0^1 t f(t) dt.$$

a) Calculer la dérivée de l'application $x \mapsto g(x) = \int_x^{x+1} (t-x)f(t)dt$ et exprimer $g(x)$ à l'aide de L .

b) Justifier l'inégalité suivante pour $x \geq n$:

$$0 \leq \int_x^{x+1} (t-x)(M_n - f(t))dt \leq M_n - f(x+1).$$

En l'appliquant avec $x = x_{n+1} - 1$, en déduire que $0 \leq \frac{M_n - L}{2} \leq M_n - M_{n+1}$.

c) Etablir une inégalité analogue faisant intervenir L , m_n et m_{n+1} , et en déduire enfin que $f(x)$ tend vers L lorsque x tend vers $+\infty$.

PARTIE IV : Recherche des fonctions bornées de $E_1(\phi)$

On désigne maintenant par f une application bornée de $E_1(\phi)$ et on note alors :

$$M = \sup \{ |f(x)| \mid x \in \mathbb{R} \}.$$

1°) On étudie dans cette question la fonction u_0 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$u_0(x) = \int_{x-1}^x (f(t) - f(x))^2 dt.$$

- a) Comparer u_0 et $\phi f^2 - f^2$ (ou $\phi(f^2) - f^2$).
- b) Calculer la dérivée de u_0 et en déduire le sens de variation de u_0 .

2°) On définit alors par récurrence à partir de u_0 une suite de fonctions (u_n) définies sur $\mathbf{R}$ par :

$$u_n(x) = \phi u_{n-1}(x) \quad \text{c'est à dire} \quad u_n(x) = \int_{x-1}^x u_{n-1}(t) dt.$$

- a) Calculer la dérivée de u_n et en déduire le sens de variation de u_n .
- b) Déterminer le sens de variation de la suite $n \rightarrow u_n(x)$ lorsque le nombre réel x est fixé.
- c) Etablir pour tout nombre réel x et tout nombre entier naturel n l'inégalité suivante :

$$0 \leq \sum_{k=0}^n u_k(x) \leq M^2.$$

- d) En déduire que la suite $n \rightarrow u_n(x)$ converge vers 0, puis que f est constante sur $\mathbf{R}$.
