



## BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

CODE SUJET :

283

CCIP\_M2\_S

Conceptions : H.E.C. – E.S.C.P. – E.A.P.

OPTION : SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES II

Mercredi 9 Mai 2007, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Pour toute variable aléatoire réelle  $Y$  définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et possédant une espérance mathématique, on note  $E(Y)$  cette espérance pour la probabilité  $P$ .

Pour tout événement  $C$  de  $\mathcal{A}$  tel que  $P(C) > 0$ , on note, sous réserve d'existence,  $E(Y/C)$  l'espérance de  $Y$  pour la probabilité conditionnelle  $P_C$  (espérance conditionnelle de  $Y$  sachant  $C$ ).

### Partie I.

Cette partie constitue une application particulière des résultats généraux étudiés dans la suite du problème.

On possède  $n$  urnes ( $n \geq 3$ ) numérotées de 1 à  $n$ , dans lesquelles on répartit au hasard et de façon indépendante,  $m$  boules indiscernables ( $m \geq 4$ ), de sorte que, pour tout  $i$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , la probabilité pour chaque boule d'être placée dans l'urne numéro  $i$  soit égale à  $1/n$ .

On suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

À l'issue de cette expérience, on pose pour tout  $i$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si l'urne n°}i \text{ est vide} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On pose  $W_n = \sum_{i=1}^n X_i$ .

1. a) Déterminer pour tout  $i$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , la loi de la variable aléatoire  $X_i$ .
- b) Pour tout couple  $(i, j)$  d'entiers de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  distincts, calculer  $P([X_i = 1] \cap [X_j = 1])$ , ainsi que la covariance de  $X_i$  et  $X_j$ . Les variables aléatoires  $X_i$  et  $X_j$  sont-elles indépendantes ?
2. a) Exprimer l'espérance  $E(W_n)$  de  $W_n$  en fonction de  $n$  et  $m$ .
- b) On note  $V(W_n)$  la variance de  $W_n$ . Calculer  $V(W_n)$  en fonction de  $n$  et  $m$ .

c) Vérifier l'égalité :  $E(W_n) - V(W_n) = n^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2m} - n(n-1) \left(1 - \frac{2}{n}\right)^m$ .

En déduire que  $E(W_n) - V(W_n) \geq 0$ .

3. Dans cette question, l'entier  $m$  vérifie  $m = \lfloor n \ln n + \theta n \rfloor$ , où  $\theta$  est une constante réelle positive et  $\lfloor x \rfloor$  désigne la partie entière de  $x$ .

a) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(W_n)$ .

b) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (E(W_n) - V(W_n)) = 0$ .

c) Soit  $T_n$  une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre  $\mu_n = E(W_n)$ .

On admet que pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}$ , on a :

$$|P([W_n = k]) - P([T_n = k])| \leq \min\left(1, \frac{1}{\mu_n}\right) \times (\mu_n - V(W_n))$$

Quelle est la limite en loi de la suite de variables aléatoires  $(W_n)_{n \geq 3}$  ?

4. On pose  $\mu = e^{-\theta}$ , et on suppose que le paramètre  $\mu$  est inconnu. Dans cette question, on veut estimer  $\mu$ .

Pour  $p$  entier de  $\mathbb{N}^*$ , on considère un  $p$ -échantillon indépendant, identiquement distribué  $(T_1, T_2, \dots, T_p)$  de la loi de Poisson de paramètre  $\mu$ . On pose :

$$\bar{T}_p = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p T_i \quad \text{et} \quad U_p = \sqrt{p} \frac{\bar{T}_p - \mu}{\sqrt{\mu}}$$

a) Montrer que  $\bar{T}_p$  est un estimateur sans biais et convergent du paramètre  $\mu$ .

b) Quelle est la limite en loi de la suite de variables aléatoires  $(U_p)_{p \geq 1}$  ?

c) On veut construire, pour  $p$  assez grand, un intervalle de confiance du paramètre  $\mu$  au risque  $\alpha$  donné. Soit  $u$  le réel strictement positif tel que  $P(|U| \geq u) = \alpha/2$ , où  $U$  est une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

Justifier que pour  $p$  assez grand, on peut écrire :  $P(|U_p| \leq u) = 1 - \alpha$ , et déterminer alors un intervalle de confiance  $[I_p, J_p]$  pour  $\mu$  au risque  $\alpha$ .

## Partie II

Dans cette partie,  $\lambda$  désigne un réel strictement positif.

Soit  $M$  une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  qui suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ .

Soit  $A$  une partie quelconque de  $\mathbb{N}$  et  $\bar{A}$  son complémentaire dans  $\mathbb{N}$ . On rappelle que si  $A$  est non vide, alors,  $P([M \in A]) = \sum_{i \in A} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$ , et on pose par convention  $[M \in \emptyset] = \emptyset$ .

On considère la fonction  $f_A$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $f_A(0) = 0$ , et pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}$  :

$$f_A(k+1) = \frac{k!}{\lambda^{k+1}} e^\lambda (P([M \in A] \cap [M \leq k]) - P([M \in A]) \times P([M \leq k]))$$

1. a) Déterminer la fonction  $f_A$  dans les cas particuliers  $A = \emptyset$  et  $A = \mathbb{N}$ .

b) Donner l'expression de  $f_A(1)$  en fonction de  $\lambda$  et de  $P([M \in A])$  dans les deux cas suivants :  $0 \in A$  et  $0 \in \bar{A}$ . Exprimer  $f_A(2)$  en fonction de  $\lambda$  et de  $P([M \in A])$  dans le cas où 0 et 1 appartiennent à  $A$ .

2. Soit  $A$  et  $B$  deux parties de  $\mathbb{N}$  disjointes.

a) Montrer que  $f_{A \cup B} = f_A + f_B$ .

b) En déduire que  $f_{\bar{A}} = -f_A$ .

3. a) Montrer que pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}$ , la fonction  $f_A$  vérifie la relation suivante :

$$\lambda f_A(k+1) - k f_A(k) = \begin{cases} P([M \in \bar{A}]) & \text{si } k \in A \\ -P([M \in A]) & \text{si } k \in \bar{A} \end{cases}$$

b) En déduire que si  $A$  est non vide et distincte de  $\mathbb{N}$ , la fonction  $f_A$  n'est pas identiquement nulle.

4. Dans cette question,  $j$  est un entier naturel non nul, et  $A$  est le singleton  $\{j\}$ . On pose  $f_{\{j\}} = f_j$ .

a) Pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}^*$ , montrer l'égalité suivante :

$$f_j(k+1) = \begin{cases} \frac{k!}{j! \lambda^{k-j+1}} P([M \geq k+1]) & \text{si } k \geq j \\ -\frac{k!}{j! \lambda^{k-j+1}} P([M \leq k]) & \text{si } k < j \end{cases}$$

b) Calculer  $f_j(j+1) - f_j(j)$ , et déterminer son signe.

c) Calculer pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}^*$ , différent de  $j$ ,  $f_j(k+1) - f_j(k)$  en distinguant les deux cas :  $k > j$  et  $k < j$ . En déduire que la différence  $f_j(k+1) - f_j(k)$  est positive si et seulement si  $k = j$ .

d) Établir les inégalités suivantes :  $f_j(j+1) - f_j(j) \leq \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \leq \min\left(1, \frac{1}{\lambda}\right)$ .

5. On considère le singleton  $\{0\}$  et on pose  $f_{\{0\}} = f_0$ . Montrer, pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}^*$ , l'inégalité suivante :  $f_0(k+1) - f_0(k) \leq 0$ .

6. a) Établir pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}$ , l'inégalité suivante :  $f_A(k+1) - f_A(k) \leq f_k(k+1) - f_k(k)$ .  
(on distinguera les deux cas :  $k \in A$  et  $k \in \bar{A}$ )

b) En déduire, pour toute partie  $A$  de  $\mathbb{N}$ , l'inégalité suivante :

$$\sup_{k \geq 0} |f_A(k+1) - f_A(k)| \leq \min\left(1, \frac{1}{\lambda}\right)$$

### Partie III.

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2. On considère  $n$  variables aléatoires discrètes indépendantes  $X_1, X_2, \dots, X_n$  définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , telles que pour tout  $i$  de  $[[1, n]]$ , la variable aléatoire  $X_i$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $p_i$  strictement positif.

On pose  $\lambda_n = \sum_{i=1}^n p_i$ ,  $W_n = \sum_{i=1}^n X_i$  et, pour tout  $i$  de  $[[1, n]]$ ,  $R_i = W_n - X_i$ .

On note  $M_n$  une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda_n$ . Soit  $A$  une partie quelconque de  $\mathbb{N}$ , et  $f_A$  la fonction définie dans la partie II, dans l'expression de laquelle on remplace  $M$  par  $M_n$  et  $\lambda$  par  $\lambda_n$ . On pose  $f = f_A$ .

1. a) Établir pour tout  $i$  de  $[[1, n]]$ , l'égalité des deux variables aléatoires  $X_i f(W_n)$  et  $X_i f(1 + R_i)$ .

b) En déduire pour tout  $i$  de  $[[1, n]]$ , l'égalité :  $E(X_i f(W_n)) = p_i E(f(1 + R_i))$ .

2. Pour tout  $i$  de  $[[1, n]]$ , on pose :  $Y_i = f(1 + W_n) - f(1 + R_i)$ .

Établir la relation suivante :  $E(\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n)) = \sum_{i=1}^n p_i E(Y_i)$ .

3. a) Établir pour tout  $i$  de  $[[1, n]]$ , la formule suivante :

$$E(Y_i / [X_i = 1]) = E(f(2 + R_i) - f(1 + R_i))$$

b) Calculer pour tout  $i$  de  $[[1, n]]$ ,  $E(Y_i / [X_i = 0])$ .

c) Dédurre des questions précédentes l'égalité suivante :

$$E(\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n)) = \sum_{i=1}^n p_i^2 E(f(2 + R_i) - f(1 + R_i))$$

4. Établir l'inégalité suivante :

$$|E(\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n))| \leq \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right) \times \sum_{i=1}^n p_i^2$$

5. À l'aide de la question II.3.a, montrer, pour toute partie  $A$  de  $\mathbb{N}$ , l'égalité suivante :

$$E(\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n)) = P([W_n \in A]) - P([M_n \in A])$$

En déduire, pour toute partie  $A$  de  $\mathbb{N}$ , la majoration suivante :

$$|P([W_n \in A]) - P([M_n \in A])| \leq \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right) \times \sum_{i=1}^n p_i^2$$

6. Dans cette question uniquement, on suppose que pour tout  $i$  de  $[1, n]$ ,  $X_i$  suit la loi de Bernoulli de paramètre  $p_i = \frac{1}{n+i}$ .

a) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n$ . Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n p_i^2 = 0$ .

b) Déterminer la limite en loi de la suite  $(W_n)_{n \geq 2}$ .

#### Partie IV.

Les notations sont identiques à celles de la partie III, mais les variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_n$  définies sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , ne sont pas nécessairement indépendantes.

1. a) Montrer que pour tout  $i$  de  $[1, n]$ , on a :  $E(X_i f(W_n)) = p_i E(f(1 + R_i) / [X_i = 1])$ .

b) En déduire l'égalité suivante :  $P([W_n \in A]) - P([M_n \in A]) = \sum_{i=1}^n p_i [E(f(1 + W_n)) - E(f(1 + R_i) / [X_i = 1])]$ .

2. On suppose que pour tout  $i$  de  $[1, n]$ , il existe une variable aléatoire  $Z_i$  définie sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , telle que la loi de  $Z_i$  soit identique à la loi conditionnelle de  $R_i$  sachant  $[X_i = 1]$ .

a) Justifier, pour tout couple  $(\ell, j)$  d'entiers naturels, l'inégalité :  $|f(\ell) - f(j)| \leq |\ell - j| \times \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right)$ , et en déduire la majoration suivante :  $|P([W_n \in A]) - P([M_n \in A])| \leq \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right) \times \sum_{i=1}^n p_i E(|W_n - Z_i|)$ .

b) On suppose de plus que pour tout  $\omega$  de  $\Omega$ , pour tout  $i$  de  $[1, n]$ , on a  $W_n(\omega) \geq Z_i(\omega)$ . Établir l'égalité :

$$\sum_{i=1}^n p_i E(|W_n - Z_i|) = \lambda_n - V(W_n), \text{ où } V(W_n) \text{ désigne la variance de } W_n.$$

En déduire, pour toute partie  $A$  de  $\mathbb{N}$ , l'inégalité suivante :

$$|P([W_n \in A]) - P([M_n \in A])| \leq \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right) \times (\lambda_n - V(W_n))$$