



**ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES  
E.S.C.P. - E.A.P.  
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON**  
CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION SCIENTIFIQUE

**MATHEMATIQUES II**

Mardi 16 Mai 2000, de 8h. à 12h.

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.  
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.  
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.  
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Le problème consiste en l'analyse d'un algorithme de tri et l'étude de sa complexité.

On note  $\ln x$  le logarithme népérien d'un réel strictement positif  $x$  et  $\log_2 x$  son logarithme en base 2. On rappelle que  $\log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}$ .

**Partie I : Étude d'une suite réelle**

Dans cette partie la lettre  $n$  désignera toujours un entier naturel **au moins égal à 2**.

On considère la suite  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  définie par son premier terme  $u_1$  et vérifiant, pour tout  $n$ , la relation de récurrence :  $u_n = n - 1 + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} u_i$ .

1) a) Calculer  $u_2$  et  $u_3$  en fonction de  $u_1$ .

b) Montrer que, pour tout  $n$  au moins égal à 3, on a :  $nu_n - (n+1)u_{n-1} = 2n - 2$ .

2) Pour tout entier naturel  $k$  non nul, on pose :  $v_k = \frac{u_k}{k+1}$ .

a) Pour tout  $n$  au moins égal à 3, exprimer  $v_n - v_{n-1}$  en fonction de  $n$ .

b) Déterminer deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  vérifiant, pour tout réel  $x$  non nul et distinct de  $-1$ , l'égalité :

$$\frac{2x-2}{x(x+1)} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x+1}$$

c) Pour tout  $n$ , établir l'égalité :  $v_n = 2 \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} + \frac{u_1}{3} - 2 + \frac{4}{n+1}$ .

3) Pour tout  $n$ , on pose  $h_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}$  et  $z_n = \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$ .

a) Calculer  $u_n$  en fonction de  $h_n$ ,  $u_1$  et  $n$ .

b) Prouver l'égalité :  $h_n = \sum_{k=2}^n z_k + \ln n$ .

c) Déterminer la nature de la série de terme général  $z_n$ .

d) En déduire un équivalent de  $h_n$  quand  $n$  tend vers l'infini.

e) Déterminer un équivalent de  $u_n$  quand  $n$  tend vers l'infini.

## Partie II : Étude d'une suite de variables aléatoires

**A.** On considère un espace probabilisé dont la probabilité est notée  $\mathbf{P}$ , une variable aléatoire  $Z$ , définie sur cet espace, prenant un nombre fini de valeurs réelles notées  $z_1, z_2, \dots, z_p$  et un événement  $A$  de probabilité non nulle.

On note  $\mathbf{E}(Z/A)$  l'espérance de la variable aléatoire  $Z$  pour la probabilité conditionnelle sachant  $A$ , i.e.

$$\mathbf{E}(Z/A) = \sum_{i=1}^p z_i \mathbf{P}([Z = z_i] / A)$$

Soit  $(A_1, A_2, \dots, A_q)$  un système complet d'événements tous de probabilité non nulle. Prouver l'égalité :

$$\mathbf{E}(Z) = \sum_{j=1}^q \mathbf{P}(A_j) \mathbf{E}(Z/A_j)$$

**B.** Toutes les variables aléatoires considérées dans cette sous-partie sont définies sur un même espace probabilisé dont la probabilité est notée  $\mathbf{P}$ .

On considère une suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de variables aléatoires telle que, pour tout  $n$  non nul,  $I_n$  suit la loi uniforme sur l'ensemble  $\{1, 2, \dots, n\}$  des entiers compris, au sens large, entre 1 et  $n$ .

D'autre part, on considère une suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de variables aléatoires ayant les propriétés suivantes :

- $X_1$  est la variable constante égale à 0
- pour tout entier naturel  $n$  au moins égal à 2, les lois conditionnelles de  $X_n$  sachant  $[I_n = 1]$  et de  $X_n$  sachant  $[I_n = n]$  sont toutes deux égales à la loi de  $n - 1 + X_{n-1}$
- pour tout entier naturel  $n$  au moins égal à 3 et tout entier  $i$  tel que  $2 \leq i \leq n - 1$ , la loi conditionnelle de  $X_n$  sachant  $[I_n = i]$  est égale à la loi de  $n - 1 + Z_{n,i} + T_{n,i}$  où  $Z_{n,i}$  et  $T_{n,i}$  sont deux variables aléatoires indépendantes,  $Z_{n,i}$  ayant même loi que  $X_{i-1}$  et  $T_{n,i}$  ayant même loi que  $X_{n-i}$ .

Par exemple, on a :

$\mathbf{P}([X_6 = 9] / [I_6 = 1]) = \mathbf{P}([X_5 = 4])$  et aussi  $\mathbf{P}([X_6 = 9] / [I_6 = 3]) = \mathbf{P}([Z_{6,3} + T_{6,3} = 4])$  ce qui, compte tenu des hypothèses, s'écrit :  $\mathbf{P}([X_6 = 9] / [I_6 = 3]) = \sum_j \mathbf{P}([X_2 = j]) \mathbf{P}([X_3 = 4 - j])$ , la somme étant étendue aux

valeurs convenables de l'entier  $j$ .

- 1) a) Montrer que  $X_2$  est une variable aléatoire presque sûrement constante égale à 1.  
b) Établir les égalités :  $\mathbf{P}([X_3 = 2]) = \frac{1}{3}$  et  $\mathbf{P}([X_3 = 3]) = \frac{2}{3}$ . Calculer l'espérance de  $X_3$  qu'on notera  $U_3$ .
- 2) Déterminer la loi de  $X_4$  et calculer son espérance qu'on notera  $U_4$ .
- 3) En procédant par récurrence, montrer que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $X_n$  prend, presque sûrement, des valeurs entières inférieures ou égales à  $\frac{n(n-1)}{2}$ .
- 4) Soit  $n$  un entier naturel au moins égal à 2. On note  $U_n$  l'espérance de  $X_n$ .  
a) À l'aide des résultats de la sous-partie **A**, établir l'égalité :  $U_n = n - 1 + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} U_i$ .  
b) À l'aide de la partie **I**, donner l'expression de  $U_n$  en fonction de  $n$  ainsi qu'un équivalent de  $U_n$  quand  $n$  tend vers l'infini.
- 5) Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on note  $\alpha_n$  la plus petite valeur (entière) prise par la variable  $X_n$  avec une probabilité non nulle.  
a) Soit  $n$  et  $k$  deux entiers naturels, l'entier  $n$  étant au moins égal à 3.  
Montrer que  $\mathbf{P}([X_n = k])$  est nul si et seulement si les nombres  $\mathbf{P}([n - 1 + X_{n-1} = k])$  et  $\mathbf{P}([n - 1 + Z_{n,i} + T_{n,i} = k])$  (l'entier  $i$  variant de 2 à  $n - 1$ ) sont nuls.  
En déduire que  $\alpha_n$  est au moins égal au minimum des nombres  $n - 1 + \alpha_{n-1}$ ,  $n - 1 + \alpha_1 + \alpha_{n-2}$ ,  $n - 1 + \alpha_2 + \alpha_{n-3}$ , ...,  $n - 1 + \alpha_{n-2} + \alpha_1$ .  
b) On considère la fonction  $g$  définie, pour tout  $x$  strictement positif, par  $g(x) = x \log_2 x - 2x + 2$ .  
i) Montrer que  $g$  est convexe. Pour tout couple d'entiers  $(i, n)$  tel que  $2 \leq i \leq n - 1$ , en déduire l'inégalité :  $g(i) + g(n + 1 - i) \geq 2g\left(\frac{n+1}{2}\right)$ .  
ii) Pour tout entier naturel  $n$  non nul, établir l'inégalité :  $g(n+1) - g(n) \leq \log_2(n+1)$ . En traitant à part les cas  $n = 1$  et  $n = 2$ , montrer que, pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a :  $g(n+1) - g(n) \leq n - 1$ .
- 6) En procédant par récurrence, établir, pour tout entier naturel  $n$  non nul, l'inégalité :  
$$\alpha_n \geq (n + 1) \log_2(n + 1) - 2n$$

### Partie III : Étude d'un algorithme de tri

A. On considère un entier naturel  $n$  non nul et un ensemble  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  où  $e_1, e_2, \dots, e_n$  sont des réels vérifiant  $e_1 < e_2 < \dots < e_n$ . On munit l'ensemble des permutations de  $E$  de la probabilité uniforme notée  $\mathbf{P}$ . On considère les  $n$  variables aléatoires  $T_1, T_2, \dots, T_n$  qui, à toute permutation  $\sigma$  de  $E$ , associent les images des éléments de  $E$  par  $\sigma$ , i.e.  $T_1(\sigma) = \sigma(e_1)$ ,  $T_2(\sigma) = \sigma(e_2)$ , ...,  $T_n(\sigma) = \sigma(e_n)$ , et on note  $T$  le vecteur aléatoire  $(T_1, T_2, \dots, T_n)$ . Pour toute liste  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  d'éléments **distincts** de  $E$  on a donc

$$\mathbf{P}\left(\{T = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)\}\right) = \frac{1}{n!}$$

1) Déterminer la loi de la variable aléatoire  $T_1$ .

2) On suppose  $n$  au moins égal à 2. Pour toute permutation  $\sigma$  de  $E$  on note  $T'_1(\sigma)$  le premier élément de la liste  $(\sigma(e_1), \sigma(e_2), \dots, \sigma(e_n))$  inférieur à  $\sigma(e_1) = T_1(\sigma)$  si un tel élément existe et  $T'_1(\sigma) = 0$  sinon,  $T'_2(\sigma)$  le deuxième élément inférieur à  $\sigma(e_1)$  si un tel deuxième élément existe et  $T'_2(\sigma) = 0$  sinon, etc.,  $T'_{n-1}(\sigma)$  le  $(n-1)$ -ième élément inférieur à  $\sigma(e_1)$  si un tel  $(n-1)$ -ième élément existe et  $T'_{n-1}(\sigma) = 0$  sinon.

Par exemple, si

$n = 4$ ,  $(e_1, e_2, e_3, e_4) = (3, 5, 7, 10)$  et  $(\sigma(e_1), \sigma(e_2), \sigma(e_3), \sigma(e_4)) = (7, 10, 5, 3)$

alors  $T'_1(\sigma) = 5$ ,  $T'_2(\sigma) = 3$  et  $T'_3(\sigma) = 0$ .

Soit  $k$  un entier vérifiant  $1 \leq k \leq n-1$ .

a) Combien y a-t-il de listes  $(i_1, i_2, \dots, i_k)$  d'entiers vérifiant  $2 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$  ?

b) Soit  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$  une liste d'éléments **distincts** de  $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ . Établir l'égalité :

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{j=1}^k [T'_j = \alpha_j] \cap [T_1 = e_{k+1}]\right) = \frac{1}{n \cdot k!}$$

c) En déduire l'égalité :

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{j=1}^k [T'_j = \alpha_j] \mid [T_1 = e_{k+1}]\right) = \frac{1}{k!}$$

où  $\mathbf{P}(A/B)$  désigne la probabilité conditionnelle de  $A$  sachant  $B$ .

Ainsi la loi conditionnelle de  $(T'_1, T'_2, \dots, T'_k)$  sachant  $[T_1 = e_{k+1}]$  est uniforme.

B. Dans un programme écrit en langage Pascal on fait les déclarations suivantes :

```
const    n = «entier naturel non nul fixé par l'utilisateur» ;
type tableau = array [1..n] of integer ;
```

Soit  $T$  une variable de type tableau qu'on suppose constituée d'éléments distincts. Si  $deb$  et  $fin$  sont deux entiers tels que  $1 \leq deb < fin \leq n$  on dira qu'un élément  $T[k]$  de la liste  $(T[deb], T[deb+1], \dots, T[fin])$  est à sa place dans le sous-tableau  $[T[deb], \dots, T[fin]]$  si les éléments  $T[deb], T[deb+1], \dots, T[k-1]$  sont inférieurs à  $T[k]$  et si les éléments  $T[k+1], T[k+2], \dots, T[fin]$  sont supérieurs à  $T[k]$  (bien sûr, si  $k = deb$  ou  $k = fin$ , une seule de ces conditions subsiste).

Ainsi, si  $n = 4$  et  $T = [3, 1, 7, 5]$  alors  $T[3]$  ( $=7$ ) est à sa place dans le sous-tableau  $[T[1], T[2], T[3]]$  ( $= [3, 1, 7]$ )

mais n'est pas à sa place dans le sous-tableau  $[T[2], T[3], T[4]]$  ( $= [1, 7, 5]$ ).

On dira que le tableau  $T$  est **trié** si chacun de ses éléments est à sa place dans  $T$ .

On suppose qu'on dispose d'une procédure (écrite en langage Pascal) dont l'en-tête est

```
Placer(var T : tableau ; deb, fin : integer ; var pl : integer) ;
```

qui ne fait rien si  $fin \leq deb$  et qui, si  $1 \leq deb < fin \leq n$ , effectue, à l'aide de  $(fin - deb)$  comparaisons, les opérations suivantes :

i) d'une part, elle ne modifie que le sous-tableau  $[T[deb], \dots, T[fin]]$  de sorte que les éléments de ce sous-tableau plus petits que  $T[deb]$  «ont glissé» (sans permutation entre-eux) à gauche de  $T[deb]$  et les éléments de ce sous-tableau plus grands que  $T[deb]$  «ont glissé» (sans permutation entre-eux) à droite de  $T[deb]$ .

Ainsi  $T[deb]$  se retrouve à sa place dans le sous-tableau modifié.

ii) d'autre part, elle met dans la variable  $pl$  l'indice  $i$  tel que  $T[i]$  reçoit, au cours de la procédure, la valeur qui était stockée dans  $T[deb]$  avant l'exécution de la procédure.

Par exemple, si  $T = [12, 3, 8, 10, 6, 4, 5]$  l'instruction  $Placer(T, 3, 6, pl)$  une fois exécutée aura changé  $T$  en  $[12, 3, 6, 4, 8, 10, 5]$  et affecté la valeur 5 à la variable  $pl$ , alors que l'instruction  $Placer(T, 3, 4, pl)$  aura laissé  $T$  inchangé et affecté la valeur 3 à la variable  $pl$ .

Par ailleurs on considère la procédure suivante :

```

procédure  Tri (var  $T$  : tableau ;  $deb, fin$  : integer) ;
var  $pl$  : integer ;
begin
    if  $fin > deb$  then begin Placer( $T, deb, fin, pl$ ) ;
                                if  $pl > deb$  then Tri( $T, deb, pl - 1$ ) ;
                                if  $pl < fin$  then Tri( $T, pl + 1, fin$ ) ;
                                end ;
    end ;

```

- 1) a) L'entier  $i$  étant compris entre 1 et  $n$ , quel est l'effet sur la variable  $T$  de l'instruction  $Tri(T, i, i)$  ?  
 b) Dans cette sous-question on suppose qu'initialement  $T = [2, 9, 6, 1, 5]$ .  
 Déterminer la «trace» de l'instruction  $Tri(T, 1, 5)$  en donnant la liste des procédures **successives** (avec les valeurs de leurs paramètres) qui sont effectuées et en indiquant à chaque fois les affectations des variables  $pl$  et  $T$ .  
 c) Expliquer succinctement l'effet et le principe de fonctionnement de la procédure  $Tri$  en indiquant, en particulier, pourquoi l'algorithme s'arrête.
- 2) On se place à nouveau dans le contexte probabiliste de la sous-partie **A** et, si  $\sigma$  est une permutation de  $E$ , on affecte la valeur  $[\sigma(e_1), \sigma(e_2), \dots, \sigma(e_n)]$  à la variable  $T$  de type tableau, i.e.  $T[1] := \sigma(e_1)$ ,  $T[2] := \sigma(e_2), \dots$ ,  $T[n] := \sigma(e_n)$ . On note  $X_n(\sigma)$  le nombre de comparaisons faites lors des différentes exécutions de la procédure *Placer* (et seulement au cours de celles-ci) quand on effectue la procédure  $Tri(T, 1, n)$ .  
 a) À l'aide de la sous-partie **A**, montrer que la suite de variables aléatoires  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  vérifie les hypothèses de **II.B**. En déduire un équivalent de l'espérance de  $X_n$  lorsque l'entier naturel  $n$  tend vers l'infini.  
 b) Dans le cas où  $E = \{1, 2, \dots, n\}$ , donner (en le commentant de manière succincte) un exemple de tableau nécessitant  $\frac{n(n-1)}{2}$  comparaisons pour être trié.  
 c) Dans le cas où  $E = \{1, 2, \dots, 7\}$ , donner de même un exemple de tableau nécessitant 10 comparaisons pour être trié.  
 d) Déterminer une suite d'entiers  $n$  pour lesquels, dans le cas où  $E = \{1, 2, \dots, n\}$ , il existe un tableau d'éléments nécessitant  $g(n+1)$  comparaisons pour être trié.