EXERCICE 1

Question préliminaire.-

Supposons que la série de terme général x_n converge. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

Ainsi $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists p_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p_\varepsilon \Rightarrow 0 \leq x_n = |x_n| < \varepsilon$

Donc $\exists p_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p_1 \Rightarrow 0 \leq x_n < 1$; ceci donne encore :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p_1 \Rightarrow 0 \leq x_n^2 \leq x_n .$$

En posant $N = p_1$ on a : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow 0 \leq x_n^2 \leq x_n$. Les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent alors que la série de terme général x_n^2 converge.

(Q1) ch est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $ch'x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = sh\, x$!

$ch'0 = 0$; $\forall x \in]0,+\infty[$, $ch'x > 0$; $\forall x \in]-\infty, 0[$, $ch'x < 0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} ch\, x = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{e^x(1+e^{-2x})}{2} \right) = +\infty$; par parité : $\lim\limits_{x\to-\infty} ch\, x = +\infty$

Notons encore que $ch\, 0 = 1$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$ch'x$		$-$	0	$+$	
$ch\,x$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

(Q2) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ et $e^{-x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ donc :

$ch\, x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \dfrac{1}{2}\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2} + 1 - x + \dfrac{x^2}{2}\right) + o(x^2) = 1 + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.

$ch\, x = 1 + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.

(Q3) a) Notons que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est définie car ch ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

- C'est clair pour $n = 0$ car $u_0 = 1$
- Supposons la propriété vraie pour n ($n \in \mathbb{N}$) et montrons la pour $n+1$.

$u_n > 0$ et $ch\, u_n \geq 1$ donc ; $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{ch\, u_n} > 0$.

ceci achève la récurrence.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

Nous avons : $\forall x\in\mathbb{R}^*$, $\operatorname{ch} x > 1$; donc $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $0 < \frac{1}{\operatorname{ch} x} < 1$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}^*_+$, $\frac{x}{\operatorname{ch} x} < x$. Or nous venons de voir que : $\forall n\in\mathbb{N}, u_n > 0$. Nous pouvons alors écrire : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{\operatorname{ch} u_n} < u_n$.

La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est strictement décroissante.

b) $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et minorée par 0 ; $(u_n)_{n\geq 0}$ converge.

Posons $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} \operatorname{ch} u_n = u_n$ et ch est continue en ℓ ;

par passage à la limite il vient alors $\ell \operatorname{ch}\ell = \ell$ ou $\ell(\operatorname{ch}\ell - 1) = 0$

donc $\ell = 0$ ou $\operatorname{ch}\ell = 1$ ce qui veut dire $\ell = 0$ (!) car $\forall x\in\mathbb{R}^*$, $\operatorname{ch} x > 1$.

$(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

Q4) a) $\forall n\in\mathbb{N}$, $0 < u_{n+1} < u_n$; $\forall n\in\mathbb{N}$, $0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$; $\forall n \in\mathbb{N}$, $0 < v_n + 1 < 1$

$\forall n\in\mathbb{N}$, $-1 < v_n < 0$.

b) $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \frac{1}{\operatorname{ch} u_n} - 1$. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et ch est continue en 0 donc

$\lim\limits_{n\to+\infty}(\operatorname{ch} u_n) = \operatorname{ch} 0 = 1$; ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\operatorname{ch} u_n} - 1\right) = \frac{1}{1} - 1 = 0$

donc $(v_n)_{n\geq 0}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

c) Observons que $\forall k\in\mathbb{N}$, $-1 < v_k$ donc $\ln(1+v_k)$ a un sens.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \ln(1+v_k) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} (\ln u_{k+1} - \ln u_k) = \ln u_n - \ln u_0 \overset{u_0=1}{=} \ln u_n$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \ln(1+v_k) = \ln u_n$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0^+$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln u_n = -\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \ln(1+v_k) = -\infty$.

La série de terme général $\ln(1+v_n)$ est divergente.

La série de terme général $-\ln(1+v_n)$ est également divergente.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ donc $-\ln(1+v_n) \sim -v_n$

Ainsi : $\forall n\in\mathbb{N}, -v_n \geq 0$, $-v_n \sim -\ln(1+v_n)$ et la série de terme général $-\ln(1+v_n)$ diverge

les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent alors que la série de terme général $-v_n$ diverge.

Ainsi : <u>la série de terme général v_n diverge.</u>

Q5 a) $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{\operatorname{ch} u_n} - 1 = \dfrac{1-\operatorname{ch} u_n}{\operatorname{ch} u_n}$.

$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ donc $1-\operatorname{ch} x = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$; $1-\operatorname{ch} x \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$

$\lim\limits_{x\to0} \operatorname{ch} x = \operatorname{ch} 0 = 1$, $\operatorname{ch} x \underset{0}{\sim} 1$

Ainsi : $\dfrac{1-\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} x} \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$: $v_n = \dfrac{1-\operatorname{ch} u_n}{\operatorname{ch} u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{u_n^2}{2}$.

<u>$v_n \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{u_n^2}{2}$.</u>

b) $u_n^2 \sim -2v_n$, la série de terme général $-2v_n$ diverge et $\forall n\in\mathbb{N}, u_n^2 \geq 0$!

Les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent alors que :

<u>la série de terme général u_n^2 diverge.</u>

c) $\forall n\in\mathbb{N}, u_n > 0$ donc d'après la question préliminaire si la série de terme général u_n converge alors la série de terme général u_n^2 converge ... ce qui n'est pas.

Par conséquent <u>la série de terme général u_n diverge.</u>

```
rogram DS13;

unction Ch(x:real):real;
egin
h:=(exp(x)+exp(-x))/2;
nd;
unction Suite(n:integer):real;
ar k:integer;u:real;
egin
:=1;
or k:=1 to n do
:=u/Ch(u);
uite:=u;
nd;
```

EXERCICE 2

(Q1) $p(X=2) = p(P_1 \cap F_2) = p(P_1)\,p(F_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2$. $\underline{p(X=2) = 1/4}$.

↑ indépendance des lancers

(Q2) a) Supposons que le premier lancer soit un pile.

Si $P_2 \cap P_3 \cap \dots \cap P_{k-1} \cap F_k$ se réalise alors $\{X=k\}$ se réalise.

Réciproquement si $\{X=k\}$ se réalise : le $k^{\text{ième}}$ lancer est un face, le $(k-1)^{\text{ième}}$ un pile et on a pas obtenu la séquence pile-face avant le $k^{\text{ième}}$ lancer donc les lancers $2, 3, \dots, k-2$ ont amené pile. Ainsi si $\{X=k\}$ se réalise : $P_2 \cap P_3 \cap \dots \cap P_{k-1} \cap F_k$ aussi. Finalement :

si $k \in [\![3,+\infty[\![$ et si le premier lancer donne pile : il faut et il suffit que $P_2 \cap P_3 \cap \dots \cap P_{k-1} \cap F_k$ se réalise pour que $\{X=k\}$ se réalise.

b) Soit $k \in [\![3,+\infty[\![$.

$$p(X=k) = p(X=k/P_1)\,p(P_1) + p(X=k/F_1)\,p(F_1) = \frac{1}{2}\,p(X=k/P_1) + \frac{1}{2}\,p(X=k/F_1)$$

$$p(X=k/P_1) = p(P_2 \cap P_3 \cap \dots \cap P_{k-1} \cap F_k) = p(P_2)\,p(P_3)\dots p(P_{k-1})\,p(F_k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

$p(X=k/F_1) = p(X=k-1)$ ... car si le premier lancer donne face il reste simplement à obtenir la séquence pile-face en $k-1$ lancers pour obtenir la réalisation de $\{X=k\}$

Ainsi $\forall k \in [\![3,+\infty[\![$, $p(X=k) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2}\,p(X=k-1)$.

$\underline{\forall k \in [\![3,+\infty[\![,\ p(X=k) = \frac{1}{2}\,p(X=k-1) + \frac{1}{2^k}}$.

c) $\forall k \in [\![3,+\infty[\![$, $u_k = 2^k p(X=k) = 2^k \times \frac{1}{2}\,p(X=k-1) + 2^k \times \frac{1}{2^k} = u_{k-1} + 1$.

$\forall k \in [\![3,+\infty[\![$, $u_k = u_{k-1} + 1$ ou $\forall k \in [\![2,+\infty[\![$, $u_{k+1} = u_k + 1$.

$(u_k)_{k \geq 2}$ est arithmétique de raison 1, $\forall k \in [\![2,+\infty[\![$, $u_k = u_2 + (k-2)$

$u_2 = 2^2 p(X=2) = 1$. $\underline{\forall k \in [\![2,+\infty[\![,\ u_k = k-1}$.

$\forall k \in [\![2,+\infty[\![$, $p(X=k) = \frac{k-1}{2^k}$ ... $\underline{\text{ne reste plus qu'à calculer } p(X=0)\,!}$

$1 = p(X=0) + \sum_{k=2}^{+\infty} p(X=k) = p(X=0) + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k-1}{2^k} = p(X=0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^{k+1}} = p(X=0) + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

$1 = p(X=0) + \frac{1}{4} \times \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = p(X=0) + 1$; $p(X=0) = 0$

$p(X=0) = 0$ et $\forall k \in [\![2,+\infty[\![$, $p(X=k) = \frac{k-1}{2^k}$.

Remarque.. Il est quasi-impossible de ne jamais obtenir la séquence Pile-Face.
Exercice.. Retrouver ce résultat directement.

Q3) $\forall k \in [\![2,+\infty[\![$, $k\,p(X=k) = k(k-1) \times \frac{1}{2^k} = \frac{1}{4} k(k-1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}$

La série de terme général $k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}$ converge donc la série de terme général $k\,p(X=k)$ est convergente et même absolument convergente car à termes positifs.

Ainsi X possède une espérance.

$E(X) = 0\,p(X=0) + \frac{1}{4}\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} = 0 + \frac{1}{4} \frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{2} \frac{1}{1/8} = 4.$

$E(X) = 4$.

Q4) a) . F_1, $P_1 \cap P_2$ et $P_1 \cap F_2$ sont deux à deux disjoints

. Ou le premier lancer donne face ou le premier lancer donne pile et le second donne alors ou pile ou face. Ainsi $\Omega = F_1 \cup (P_1 \cap P_2) \cup (P_1 \cap F_2)$.

Donc $(F_1, P_1 \cap P_2, P_1 \cap F_2)$ est un système complet d'événements.

b) Soit $k \in [\![4,+\infty[\![$. La formule des probabilités totales donne :

$p(Y=k) = p(Y=k \mid F_1)\,p(F_1) + p(Y=k \mid P_1 \cap P_2)\,p(P_1 \cap P_2) + p(Y=k \mid P_1 \cap F_2)$

$p(Y=k \mid F_1) = p(Y=k-1)$; tout reste à faire en $k-1$ lancers.

$p(Y=k \mid P_1 \cap P_2) = 0$ car $k \geq 4$ ($P_1 \cap P_2 = \{Y=2\}$).

$p(Y=k \mid P_1 \cap F_2) = p(Y=k-2)$; tout reste à faire en $k-2$ lancers !

Ainsi : $p(Y=k) = p(Y=k-1)\,p(F_1) + 0\,p(P_1 \cap P_2) + p(Y=k-2)\,p(P_1 \cap F_2)$

$p(Y=k) = \frac{1}{2} p(Y=k-1) + \frac{1}{4} p(Y=k-2)$ car $p(F_1) = \frac{1}{2}$ et $p(P_1 \cap F_2) = \frac{1}{4}$.

Finalement : $\forall k\in [\![4,+\infty[\![,\ p(Y=k) = \frac{1}{2}p(Y=k-1)+\frac{1}{4}p(Y=k-2)$.

c) $v_2 = p(Y=2) = p(P_1\cap P_2) = \frac{1}{4}$. $v_3 = p(Y=3) = p(F_1\cap P_2\cap P_3) = \frac{1}{8}$.

$v_2 = \frac{1}{4}$ et $v_3 = \frac{1}{8}$.

b) donc $\forall k\in [\![4,+\infty[\![,\ v_k = \frac{1}{2}v_{k-1}+\frac{1}{4}v_{k-2}$. Montrons que ceci vaut encore pour $k=2$ et 3

$\frac{1}{2}v_{2-1}+\frac{1}{4}v_{2-2} = \frac{1}{2}v_1+\frac{1}{4}v_0 = \frac{1}{2}\times 0+\frac{1}{4}\times 1 = \frac{1}{4} = v_2$

$\frac{1}{2}v_{3-1}+\frac{1}{4}v_{3-2} = \frac{1}{2}v_2+\frac{1}{4}v_1 = \frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times 0 = \frac{1}{8}\ v_3$

Finalement : $\forall k\in [\![2,+\infty[\![,\ v_k = \frac{1}{2}v_{k-1}+\frac{1}{4}v_{k-2}$.

d) $(v_k)_{k\geq 0}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $x\in\mathbb{C}$ et $x^2 = \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$; cette équation a donc exactement deux solutions : $x_1 = \frac{1}{4}+\frac{\sqrt{5}}{4}$ et $x_2 = \frac{1}{4}-\frac{\sqrt{5}}{4}$.

Ainsi $\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\ \forall k\in\mathbb{N},\ v_k = \alpha x_1^k+\beta x_2^k$.

$$\begin{cases} 1 = v_0 = \alpha+\beta \\ 0 = v_1 = \alpha x_1+\beta x_2 \end{cases}$$

. $L_2 - x_2L_1$ permet d'obtenir $\alpha = \frac{x_2}{x_2-x_1} = -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$

$L_2 - x_1L_1$ permet d'obtenir $\beta = \frac{x_1}{x_1-x_2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$

Ainsi : $\forall k\in\mathbb{N},\ v_k = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^k - \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^k$.

Il en découle $\forall k\in [\![2,+\infty[\![,\ p(Y=k) = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^k - \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^k$

Il ne reste plus qu'à calculer $p(Y=0)$.

$1 = p(Y=0)+\sum_{k=2}^{+\infty}p(Y=k) = p(Y=0)+\sum_{k\in[\![2,+\infty[\![}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^k - \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^k\right)$

$p(Y=0) = 1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\sum_{k=2}^{+\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^k + \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\sum_{k=2}^{+\infty}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^k$ ($\left|\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right|<1$ et $\left|\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right|<1$ donc les 2 séries convergent)

$$p(Y=0) = 1 - \frac{1+\sqrt5}{2\sqrt5}\left[\frac{1}{1-\frac{1-\sqrt5}{4}} - 1\right] + \frac{1-\sqrt5}{2\sqrt5}\left[\frac{1}{1-\frac{1+\sqrt5}{4}} - 1\right]$$

$$p(Y=0) = 1 - \frac{1+\sqrt5}{2\sqrt5}\left(\frac{4}{3+\sqrt5} - 1\right) + \frac{1-\sqrt5}{2\sqrt5}\left(\frac{4}{3-\sqrt5} - 1\right) = 1 - \frac{1+\sqrt5}{2\sqrt5}\,\frac{1-\sqrt5}{3+\sqrt5} + \frac{1-\sqrt5}{2\sqrt5}\,\frac{1+\sqrt5}{3-\sqrt5}$$

$$p(Y=0) = 1 - \frac{1-5}{2\sqrt5}\left(\frac{1}{3+\sqrt5} - \frac{1}{3-\sqrt5}\right) = 1 + \frac{4}{2\sqrt5}\,\frac{-2\sqrt5}{9-5} = 1-1 = 0.$$

Donc $p(Y=0)$ et $\forall k \in [\![2,+\infty[\![$, $p(Y=k) = \frac{1+\sqrt5}{2\sqrt5}\left(\frac{1-\sqrt5}{4}\right)^k - \frac{1-\sqrt5}{2\sqrt5}\left(\frac{1+\sqrt5}{4}\right)^k$.

Exercice.. Montrer directement que $p(Y=0)$.

$\left|\frac{1-\sqrt5}{4}\right|^k < 1$ et $\left|\frac{1+\sqrt5}{4}\right| < 1$ donc les séries de termes généraux $k \times \left(\frac{1-\sqrt5}{4}\right)^{k-1}$ et $k\left(\frac{1+\sqrt5}{4}\right)^{k-1}$ sont convergentes ; ainsi la série de terme général :

$$k\,p(Y=k) = \frac{1+\sqrt5}{2\sqrt5}\,\frac{1-\sqrt5}{4}\,k\left(\frac{1-\sqrt5}{4}\right)^{k-1} - \frac{1-\sqrt5}{2\sqrt5}\,\frac{1+\sqrt5}{4}\,k\left(\frac{1+\sqrt5}{4}\right)^{k-1} = \frac{1}{2\sqrt5}\,k\left(\frac{1+\sqrt5}{4}\right)^{k-1} - \frac{1}{2\sqrt5}\,k\left(\frac{1-\sqrt5}{4}\right)^{k-1}$$ est

convergente (comme combinaison linéaire de séries convergentes) et même absolument convergente car à termes positifs.

Ainsi Y possède une espérance.

$$E(Y) = 0\,p(Y=0) + \sum_{k=2}^{+\infty} k\,p(Y=k) = \frac{1}{2\sqrt5}\sum_{\substack{k=2 \\ \text{ou } k=1}}^{+\infty}\left(k\left(\frac{1+\sqrt5}{4}\right)^{k-1} - k\left(\frac{1-\sqrt5}{4}\right)^{k-1}\right)$$

Donc $E(Y) = \frac{1}{2\sqrt5}\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1+\sqrt5}{4}\right)^{k-1} - \frac{1}{2\sqrt5}\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1-\sqrt5}{4}\right)^{k-1} = \frac{1}{2\sqrt5}\,\frac{1}{\left(1-\frac{1+\sqrt5}{4}\right)^2} - \frac{1}{2\sqrt5}\,\frac{1}{\left(1-\frac{1-\sqrt5}{4}\right)^2}$.

$$E(Y) = \frac{1}{2\sqrt5}\,\frac{16}{(3-\sqrt5)^2} - \frac{1}{2\sqrt5}\,\frac{16}{(3+\sqrt5)^2} = \frac{8}{\sqrt5}\,\frac{(3+\sqrt5)^2-(3-\sqrt5)^2}{(9-5)^2} = \frac{8}{\sqrt5} \times \frac{12\sqrt5}{16} = 6.$$ $\underline{E(Y)=6.}$

$E(Y) = 6 > E(X) = 4$. Nous sommes bouleversés !

Exercice.. Reprendre le même problème avec une pièce qui donne pile avec la probabilité p ($0<p<1$... et $p \neq \frac{1}{2}$!).

On trouve $E(X) = \frac{1}{pq}$ et $E(Y) = \frac{1+p}{p^2}$

Notons que $E(Y) > E(X) \iff p < \frac{\sqrt5-1}{2}$ $\left(\frac{\sqrt5-1}{2} \simeq 0{,}62\right)$.

Exercice 3. (Q1) a) f est continue et positive sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{2}e^{-t}\,dt = \frac{1}{2}\left[-e^{-t}\right]_0^x = \frac{1}{2}(1-e^{-x}).$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,dt = \frac{1}{2}$; $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ existe et vaut $1/2$. Comme f est paire : $\int_{-\infty}^0 f(t)\,dt$ existe aussi et vaut ~~également~~ $1/2$.

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut 1.

f est bien une densité de probabilité.

b) Soit $x \in \mathbb{R}_-$. $P(Z \le x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{2}e^{-|t|}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^x e^{t}\,dt = \frac{1}{2}\lim\limits_{A\to-\infty}\left(\left[e^t\right]_A^x\right) = \frac{1}{2}\lim\limits_{A\to-\infty}(e^x - e^A) = e^x/2$

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. $P(Z \le x) = P(Z \le 0) + \int_0^x \frac{1}{2}e^{-|t|}\,dt = \frac{e^0}{2} + \frac{1}{2}\int_0^x e^{-t}\,dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[-e^{-t}\right]_0^x = 1 - \frac{1}{2}e^{-x}$

La fonction de répartition F_Z de Z est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Z(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{2} & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}.$$

c) Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_1(t) = \frac{1}{2}e^{-|t|} = f_2(t)$. En clair $f_1 = f_2 = f$!

f_1 (resp. f_2) est une densité de Z_1 (resp. Z_2). Comme Z_1 et Z_2 sont indépendantes,

$h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(x-t)\,dt$ est une densité de $V = Z_1 + Z_2$ définie sur $\mathbb{R}$ car f_2 est bornée.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-|t|} \times \frac{1}{2}e^{-|x-t|}\,dt = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-[|t|+|x-t|]}\,dt$$

Supposons $x \in]-\infty, 0]$. $|t| + |x-t| = \begin{cases} -t+x-t & \text{si } t \in]-\infty, x] \\ -x & \text{si } t \in [x, 0] \\ t+t-x & \text{si } t \in [0, +\infty[\end{cases}$

$$e^{-|t|+|x-t|} = \begin{cases} e^{2t-x} & \text{si } t \in]-\infty, x] \\ e^{x} & \text{si } t \in [x, 0] \\ e^{x-2t} & \text{si } t \in [0, +\infty[\end{cases}$$

à quelques abus près

Donc $h(x) = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^x e^{2t-x}\,dt + \frac{1}{4}\int_x^0 e^x\,dt + \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} e^{x-2t}\,dt = \frac{1}{4}\left[\frac{e^{2t-x}}{2}\right]_{-\infty}^x - \frac{1}{4}xe^x + \frac{1}{4}\left[\frac{e^{x-2t}}{-2}\right]_0^{+\infty}$

$h(x)=\frac{1}{8}e^{x}-\frac{1}{4}xe^{x}+\frac{1}{8}e^{x}=\frac{1}{4}(1-x)e^{x}=\frac{1}{4}(1+|x|)e^{-|x|}$.

Supposons maintenant que $x\in[0,+\infty[$.

$$|t|+|x-t|=\begin{cases}-2t+x & \text{si } t\in]-\infty,0]\\ x & \text{si } t\in[0,x]\\ 2t-x & \text{si } t\in[x,+\infty[\end{cases}$$

$$h(x)=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{0}e^{2t-x}dt+\frac{1}{4}\int_{0}^{x}e^{-x}dt+\frac{1}{4}\int_{x}^{+\infty}e^{-2t+x}dt$$

$$h(x)=\frac{1}{4}\left[\frac{e^{2t-x}}{2}\right]_{-\infty}^{0}+\frac{1}{4}e^{-x}\times x+\frac{1}{4}\left[\frac{e^{-2t+x}}{-2}\right]_{x}^{+\infty}=\frac{1}{8}e^{-x}+\frac{1}{4}xe^{-x}+\frac{1}{8}e^{-x}$$

$h(x)=\frac{1}{4}(1+x)e^{-x}=\frac{1}{4}(1+|x|)e^{-|x|}$.

Donc $\forall x\in\mathbb{R},\ h(x)=\frac{1}{4}(1+|x|)e^{-|x|}$. h est une densité de $V=Z_1+Z_2$.

(Q2) a) Soit $x\in\mathbb{R}$. $P(-Y\leq x)=P(Y\geq -x)=1-P(Y\leq -x)=1-F_Y(-x)=1-$

Rappelons que $\forall t\in\mathbb{R},\ F_Y(t)=\begin{cases}0 & \text{si } t\leq 0\\ 1-e^{-t} & \text{si } t\geq 0\end{cases}$.

Ainsi $P(-Y\leq x)=\begin{cases}1-(1-e^{-(-x)})=e^{x} & \text{si } x\leq 0\\ 1-0=1 & \text{si } x\geq 0\end{cases}$

Notons F_{-Y} la fonction de répartition de $-Y$.

$$\forall x\in\mathbb{R},\ F_{-Y}(x)=\begin{cases}e^{x} & \text{si } x\leq 0\\ 1 & \text{si } x\geq 0\end{cases}.$$

Remarquons que F_{-Y} est continue et dérivable sur $]-\infty,0]$ et sur $[0,+\infty[$.

Ainsi F_{-Y} est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

De plus $\forall x\in]-\infty,0[,\ (F_{-Y})'(x)=e^{x}$ et $\forall x\in]0,+\infty[,\ (F_{-Y})'(x)=0$

F_{-Y} est donc continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$. Ainsi $-Y$ est bien une variable aléatoire à densité. En posant $\forall t\in\mathbb{R},\ g(t)=\begin{cases}e^{t} & \text{si } t\leq 0\\ 0 & \text{si } t>0\end{cases}$ on obtient une densité de $-Y$.

b) Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ e^{-t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$. u est une densité de X car $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.
Notons que u est bornée.

X et Y sont indépendantes donc X et $(-Y)$ le sont également. On obtient alors une densité de $Z = X - Y$ en posant : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\, g(x-t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x-t)\, g(t)\, dt$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \int_{-\infty}^{0} u(x-t)\, e^{t}\, dt \underset{v=-t}{=} \int_{+\infty}^{0} u(x+v)\, e^{-v}(-dv) = \int_{0}^{+\infty} u(x+v)\, e^{-v}\, dv$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) \underset{w=x+v}{=} \int_{x}^{+\infty} u(w)\, e^{-w+x}\, dw$

1er cas : $x \in]-\infty, 0]$. $\varphi(x) = \int_{0}^{+\infty} e^{-w} e^{-w+x}\, dw = \left[\frac{e^{-2w+x}}{-2} \right]_{0}^{+\infty} = \frac{1}{2} e^{x} = \frac{1}{2} e^{-|x|}$.

2ème cas : $x \in [0, +\infty[$. $\varphi(x) = \int_{x}^{+\infty} e^{-w} e^{-w+x}\, dw = \left[\frac{e^{-2w+x}}{-2} \right]_{x}^{+\infty} = \frac{1}{2} e^{-2x+x} = \frac{1}{2} e^{-x} = \frac{1}{2} e^{-|x|}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$. Ainsi $Z = X - Y$ suit une loi exponentielle bilatérale.

c) $E(X)$ (resp. $E(Y)$) existe et vaut 1 car $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ (resp. $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$).
Ainsi $Z = X - Y$ possède une espérance qui vaut 0.
$E(Z)$ existe et vaut 0.

d) Soit $x \in]-\infty, 0[$. $P(T \leqslant x) = P(|Z| \leqslant x) = 0$
Soit $x \in [0, +\infty[$. $P(T \leqslant x) = P(|Z| \leqslant x) = P(-x \leqslant Z \leqslant x) = P(Z \leqslant x) - P(Z \leqslant -x)$.

$$P(T \leqslant x) \underset{Q1\ b)}{=} 1 - \frac{1}{2} e^{-x} - \left(\frac{e^{-x}}{2} \right) = 1 - e^{-x}.$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $P(T \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$. Donc $T \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

PROBLÈME

PARTIE I Etude de φ

(Q1) a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. $\deg P' \leq n-1$ et $\deg P'' \leq n-2$ donc :

$\deg(X-1)P' \leq n$ et $\deg XP'' \leq n-1$ ainsi $\deg((X-1)P' - XP'') \leq n$

$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

$\forall (P_1,P_2) \in \mathbb{R}_n[X]^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \varphi(\lambda P_1+P_2) = (X-1)(\lambda P_1+P_2)' - X(\lambda P_1+P_2)'' = (X-1)(\lambda P_1'+P_2') - X(\lambda P_1''+P_2'')$

$\forall (P_1,P_2) \in \mathbb{R}_n[X]^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \varphi(\lambda P_1+P_2) = \lambda((X-1)P_1' - XP_1'') + ((X-1)P_2' - XP_2'') = \lambda\varphi(P_1)+\varphi(P_2)$.

ceci achève de montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) $\varphi(1) = 0$. $\varphi(X) = (X-1)\times 1 - X\times 0 = X-1$.

$\forall k \in [\![2,n]\!],\ \varphi(X^k) = (X-1)kX^{k-1} - Xk(k-1)X^{k-2} = kX^k - k^2X^{k-1}$

donc $\varphi(1) = 0$ et $\forall k \in [\![1,n]\!],\ \varphi(X^k) = kX^k - k^2X^{k-1}$.

c)
$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1^2 & & (0) & \\ & 1 & -2^2 & & \\ & & 2 & \ddots & \\ & (0) & & \ddots & -n^2 \\ & & & & n \end{pmatrix}$$

d) M est triangulaire supérieure. Ainsi les valeurs propres de φ (et de M) sont les éléments de la diagonale de M c'est à dire : $0, 1, 2, \dots, n$.

φ admet $n+1$ valeurs propres distinctes et φ est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension $n+1$; φ est donc diagonalisable.

(Q2) a) $kL_k = \varphi(L_k) = (X-1)L_k' - XL_k''$

Le coefficient de X^p dans kL_k est : $ka_p = k$

Le coefficient de X^p dans $(X-1)L_k' - XL_k''$ est celui de X^p dans $(X-1)L_k'$ c'est à dire pX^p. Ainsi $k=p$.

donc L_k est de degré k.

b) En particulier $\deg L_0 = 0$. Comme L_0 est unitaire : $L_0 = 1$.

c) Soit $k\in[\![1,n]\!]$. $L_k=\sum_{i=0}^{k} a_i X^i$ avec $a_k=1$ et $\varphi(L_k)=kL_k$.

donc $\sum_{i=0}^{k} k a_i X^i = kL_k=\varphi(L_k)=(X-1)L_k'-XL_k''=(X-1)\sum_{i=1}^{k} i a_i X^{i-1} - X\sum_{i=2}^{k} i(i-1)a_i X^{i-2}$

donc $\sum_{i=0}^{k} k a_i X^i = \sum_{i=1}^{k} i a_i X^i - \sum_{i=1}^{k} i a_i X^{i-1} - \sum_{i=2}^{k} i(i-1)a_i X^{i-1}$

$\sum_{i=0}^{k} k a_i X^i = \sum_{i=1 \text{ ou } 0}^{k} i a_i X^i - \sum_{i=0}^{k-1} (i+1)a_{i+1}X^i - \sum_{i=1 \text{ ou } 0}^{k-1} (i+1)i\, a_{i+1} X^i$

Ainsi $\begin{cases} k a_k = k a_k \\ \text{et} \\ \forall i\in[\![0,k-1]\!],\ k a_i = i a_i-(i+1)a_{i+1}-(i+1)i\,a_{i+1} = i a_i-(i+1)^2 a_{i+1} \end{cases}$

donc $\underline{\forall i\in[\![0,k-1]\!],\quad a_i=-\frac{(i+1)^2}{k-i}\,a_{i+1}}$.

d) On va montrer à l'aide d'une récurrence descendante que :
$\forall i\in[\![0,k]\!]$, $a_i=(-1)^{k-i}(k-i)!\,[C_k^i]^2$ ... en ayant fixé k dans $[\![1,n]\!]$.

* $(-1)^{k-k}(k-k)!\,[C_k^k]^2=1=a_k$; la propriété est vraie pour $i=k$.

* Supposons la propriété vraie pour $i+1$ ($i\in[\![0,k-1]\!]$) et montrons-la pour i ;

$a_i=-\frac{(i+1)^2}{k-i}a_{i+1} \underset{H.R.}{=} -\frac{(i+1)^2}{k-i}\times(-1)^{k-i-1}(k-i-1)!\,[C_k^{i+1}]^2$

$a_i=(-1)^{k-i}(k-i)!\,\frac{(i+1)^2}{(k-i)^2}[C_k^{i+1}]^2=(-1)^{k-i}(k-i)!\Big[\underbrace{\frac{i+1}{k-i}C_k^{i+1}}_{=C_k^i}\Big]^2=(-1)^{k-i}(k-i)!\,[C_k^i]^2$

ceci achève la récurrence.

Donc $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $\forall i\in[\![0,k]\!]$, $a_i=(-1)^{k-i}(k-i)!\,[C_k^i]^2$

Notons que ceci reste encore vrai pour $k=0$ car $a_0=1$.

Ainsi $\underline{\forall k\in[\![0,n]\!]\ \forall i\in[\![0,k]\!]\ a_i=(-1)^{k-i}(k-i)!\,[C_k^i]^2.}$

ou $\underline{\forall k\in[\![0,n]\!],\ L_k=\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}(k-i)!\,[C_k^i]^2X^i.}$

(Q3) La fonction f_k est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur IR comme produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur IR : les fonctions $u : x \mapsto x^k$ et $v : x \mapsto e^{-x}$

La formule de Leibniz donne : $f_k^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} u^{(i)} v^{(k-i)}$

$\forall i \in [\![0,k]\!]$, $v^{(k-i)} = (-1)^{k-i} v$

$\forall i \in [\![0,k]\!]$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $u^{(i)}(x) = k(k-1)\cdots(k-i+1)\, x^{k-i} = \frac{k!}{(k-i)!} x^{k-i}$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_k^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{k!}{(k-i)!} x^{k-i} (-1)^{k-i} e^{-x} \underset{i \leftarrow k-i}{=} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{k-i} \frac{k!}{i!} x^{i} (-1)^{i} e^{-x}$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $(-1)^k e^{x} f_k^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{k!}{i!} x^i (-1)^{i+k}$. Notons que $(-1)^{i+k} = (-1)^{k-i}$

Autrement dit : $\forall x \in \mathbb{R}$, $(-1)^k e^{x} f_k^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} (k-i)! \binom{k}{i} \frac{k!}{i!(k-i)!} x^i$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $(-1)^k e^{x} f_k^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} (k-i)! \left[\binom{k}{i}\right]^2 x^i$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $(-1)^k e^{x} f_k^{(k)}(x) = L_k(x)$ ... et ceci pour tout $k \in [\![0,n]\!]$.

PARTIE II Etude d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

(Q1) a) C'est du cours ! $\forall k \in \mathbb{N}$, $I_k = \Gamma(k+1)$ existe et vaut $(k+1-1)! = k!$

b) Soit U un élément de $\mathbb{R}[X]$. $\exists\, p \in \mathbb{N}$, $\exists (u_0, u_1, \dots, u_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$, $U = \sum_{k=0}^{p} u_k X^k$,

pour tout k dans $\mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} x^k e^{-x}\,dx$ existe donc $\int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{p} u_k x^k e^{-x}\,dx$ converge comme combinaison linéaire d'intégrales convergentes, donc $\int_0^{+\infty} U(x) e^{-x}\,dx$ existe.

$\forall U \in \mathbb{R}[X]$, $\int_0^{+\infty} U(x) e^{-x}\,dx$ existe.

Ainsi si P et Q sont deux éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, $PQ \in \mathbb{R}[X]$ et en conséquence :

$\int_0^{+\infty} e^{-x} P(x) Q(x)\,dx$ existe.

$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]$, l'intégrale définissant $(P|Q)$ est convergente.

c) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(P,Q,R) \in \mathbb{R}_n[X]^3$

$$\varphi(\lambda P+Q, R) = \int_0^{+\infty} (\lambda P+Q)(x) R(x) e^{-x}\,dx = \int_0^{+\infty} (\lambda P(x)R(x) + Q(x)R(x)) e^{-x}\,dx$$

$$\varphi(\lambda P+Q, R) = \lambda \int_0^{+\infty} P(x)R(x)e^{-x}\,dx + \int_0^{+\infty} Q(x)R(x)e^{-x}\,dx = \lambda\,\varphi(P,R) + \varphi(Q,R)$$

toutes les intégrales sont convergentes.

$\varphi(\lambda P+Q, R) = \lambda\,\varphi(P,R) + \varphi(Q,R)$.

(Q2) Montrons par récurrence sur k que pour tout couple (f,g) de fonctions de classe C^k sur $[a,b]$:

$$\int_a^b f(t) g^{(k)}(t)\,dt = \left[\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j f^{(j)}(t)\, g^{(k-j-1)}(t) \right]_a^b + (-1)^k \int_a^b f^{(k)}(t) g(t)\,dt$$

→ Pour $k=1$ c'est la formule d'intégration par parties usuelle.

→ Supposons la propriété vraie pour k ($k \in \mathbb{N}^*$) et montrons la pour $k+1$.
Soient f et g deux fonctions de classe C^{k+1} sur $[a,b]$.

f et g' étant de classe C^k sur $[a,b]$ nous pouvons alors utiliser l'hypothèse de récurrence pour écrire :

$$\int_a^b f(t)(g')^{(k)}(t)dt = \left[\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j f^{(j)}(t)(g')^{(k-j-1)}(t)\right]_a^b + (-1)^k\int_a^b f^{(k)}(t)g'(t)dt$$

donc $\displaystyle\int_a^b f(t)g^{(k+1)}(t)dt = \left[\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j f^{(j)}(t)\, g^{(k-j)}(t)\right]_a^b + (-1)^k\int_a^b f^{(k)}(t)g'(t)dt \quad (1)$

$f^{(k)}$ et g étant C^1 sur $[a,b]$ une intégration par parties donne alors :

$\displaystyle\int_a^b f^{(k)}(t)g'(t)dt = \left[f^{(k)}(t)g(t)\right]_a^b - \int_a^b f^{(k+1)}(t)g(t)dt$; en réinjectant dans (1) on obtient :

$$\int_a^b f(t)g^{(k+1)}(t)dt = \left[\sum_{j=0}^{k}(-1)^j f^{(j)}(t)g^{(k-j)}(t)\right]_a^b + (-1)^{k+1}\int_a^b f^{(k+1)}(t)g(t)dt$$ ce qui

achève la récurrence. Ainsi si f et g sont deux fonctions de classe C^k sur $[a,b]$:

$$\int_a^b f(t)g^{(k)}(t)dt = \left[\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j f^{(j)}(t)g^{(k-j-1)}(t)\right]_a^b + (-1)^k\int_a^b f^{(k)}(t)g(t)dt$$

(Q3) $k\in\mathbb{N}^*$. Soit $i\in[\![0,k-1]\!]$. La formule de Leibniz donne :

$f_k^{(i)}(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{i} C_i^j\,(x^k)^{(j)}\,(e^{-x})^{(i-j)}$ pour tout x dans $\mathbb{R}$ à quelques garanties près.

$\forall x\in\mathbb{R},\ f_k^{(i)}(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{i} C_i^j\, k(k-1)\cdots(k-j+1)\, x^{k-j}\,(-1)^{i-j}\,e^{-x}$

donc $f_k^{(i)}(0)=0$ car 0^{k-j} vaut 0 pour tout j dans $[\![0,i]\!]$ car $i<k$

$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \forall i\in[\![0,k-1]\!],\ f_k^{(i)}(0)=0$

(Q4) a) Ici nous prenons i dans $[\![0,n]\!]$ et k dans $[\![1,n]\!]$.

L_i et f_k étant de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, Q2 nous permet d'écrire que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \int_0^x L_i(t)f_k^{(k)}(t)dt = \left[\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j L_i^{(j)}(t)\,f_k^{(k-j-1)}(t)\right]_0^x + (-1)^k\int_0^x L_i^{(k)}(t)f_k(t)dt$$

En remarquant que $f_k^{(k-j-1)}(0)=0$ si $j\in[\![0,k-1]\!]$ $(0\le k-j-1\le k-1)$ il vient :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \int_0^x L_i(t)f_k^{(k)}(t)\,dt=\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j L_i^{(j)}(x)f_k^{(k-j-1)}(x)+(-1)^k\int_0^x L_i^{(k)}(t)f_k(t)\,dt \qquad (*)$$

<u>b]</u> Supposons que $i<k$ et k dans $\mathbb{N}^*$

$\forall x\in\mathbb{R},\ \int_0^x L_i(t)f_k^{(k)}(t)\,dt=\int_0^x L_i(t)(-1)^k e^{-t}L_k(t)\,dt$ (d'après I § 5)

$\forall x\in\mathbb{R},\ \int_0^x L_i(t)f_k^{(k)}(t)\,dt=(-1)^k\int_0^x L_i(t)L_k(t)e^{-t}\,dt.$

Soit $j\in[\![0,k-1]\!]$. Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$(-1)^j L_i^{(j)}(x)f_k^{(k-j-1)}(x)=(-1)^j L_i^{(j)}(x)\sum_{r=0}^{k-j-1}C_{k-j-1}^r (x^k)^{(r)}(e^{-x})^{(k-j-1-r)}$$

$$(-1)^j L_i^{(j)}(x)f_k^{(k-j-1)}(x)=(-1)^j L_i^{(j)}(x)\sum_{r=0}^{k-j-1}C_{k-j-1}^r\, k(k-1)\dots(k-r+1)\,x^{k-r}(-1)^{k-j-1-r}e^{-x}$$

Ainsi existe-il $P\in\mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall x\in\mathbb{R},\ (-1)^j L_i^{(j)}(x)f_k^{(k-j-1)}(x)=P(x)e^{-x}$.

Par croissance comparée : $\lim_{x\to+\infty}(P(x)e^{-x})=0$ car $P\in\mathbb{R}[X]$.

Ainsi $\lim_{x\to+\infty}\left[(-1)^j L_i^{(j)}(x)f_k^{(k-j-1)}(x)\right]=0$

Ainsi : $\lim_{x\to+\infty}\left[\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j L_i^{(j)}(x)f_k^{(k-j-1)}(x)\right]=0 \qquad (a)$

De plus : $\lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^x L_i(t)f_k^{(k)}(t)\,dt\right)=\lim_{x\to+\infty}(-1)^k\int_0^x L_i(t)L_k(t)e^{-t}\,dt=(-1)^k\int_0^{+\infty}L_i(t)L_k(t)e^{-t}\,dt \qquad (b)$

car cette intégrale est convergente.

(a) et (b) permettent de passer à la limite dans $(*)$ et d'obtenir :

$$(-1)^k\int_0^{+\infty}L_i(t)L_k(t)e^{-t}\,dt=(-1)^k\int_0^{+\infty}L_i^{(k)}(t)f_k(t)\,dt \text{ ou } \int_0^{+\infty}L_i(t)L_k(t)e^{-t}\,dt=\int_0^{+\infty}L_i^{(k)}(t)f_k(t)\,dt$$

On remarque que cette dernière égalité vaut pour $k=0$ car $L_0 = 1$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_0(t) = e^{-t}$.

Finalement :

$\forall i \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, \displaystyle\int_0^{+\infty} L_i(t) L_k(t) e^{-t}\,dt = \int_0^{+\infty} L_i^{(k)}(t) f_k(t)\,dt$

c) Soit $(i,k) \in [\![0,n]\!]^2$ tel que $i < k$. $\deg L_i = i$ donc $L_i^{(k)} = 0$

$\displaystyle\int_0^{+\infty} L_i(t) L_k(t) e^{-t}\,dt = \int_0^{+\infty} 0 \times f_k(t)\,dt = 0$; $\varphi(L_i, L_k) = 0$

Bien évidemment si $i > k$ on a aussi $\varphi(L_i, L_k) = 0$ (échange des rôles ...)

Ainsi $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

d) Rappelons que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $J(k) = \Gamma(k+1) = k!$ ... et c'est tout.

Soit k : $\varphi(L_k, L_k) = \displaystyle\int_0^{+\infty} L_k(t) L_k(t) e^{-t}\,dt = \int_0^{+\infty} L_k^{(k)}(t) f_k(t)\,dt$

L_k est unitaire et de degré k donc $L_k^{(k)} = k!$

$\varphi(L_k, L_k) = \displaystyle\int_0^{+\infty} k!\, t^k e^{-t}\,dt = k!\, J_k = (k!)^2$. $\underline{\|L_k\| = k!}$

Pour $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\hat{L}_k = \frac{1}{\|L_k\|} L_k$. $(\hat{L}_0, \hat{L}_1, \dots, \hat{L}_n)$ est une famille orthonormale donc libre de $n+1$ éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$. Ainsi :

$\underline{(\hat{L}_0, \hat{L}_1, \dots, \hat{L}_n) \text{ est une base orthonormale de } \mathbb{R}_n[X].}$

PARTIE III

(Q1) RL_n est un polynôme n'ayant pas de racine d'ordre impair dans $\mathbb{R}_+$; ainsi RL_n garde un signe constant dans $\mathbb{R}_+$.
RL_n est unitaire et de degré $p \in \mathbb{N}^*$; alors $(RL_n)(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x^p$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (RL_n)(x) = +\infty$

Plus de doute $\underline{RL_n \text{ est positif sur } \mathbb{R}^+}$.

(Q2) a) $\mathbb{R}_{n-1}[X] = \mathrm{Vect}(L_0, L_1, \dots, L_{n-1})$ et L_n est orthogonal à $L_0, L_1, \dots, L_{n-1}$;

par conséquent $L_n \in (\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$. $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\varphi(P, L_n) = 0$.

Comme nous avons supposé que $p < n$: $\deg R = p \leq n-1$; $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

donc $\underline{\varphi(R, L_n) = 0}$.

b). $\int_0^{+\infty} R(t) L_n(t) e^{-t}\, dt = 0$ et $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $R(t) L_n(t) e^{-t} \geq 0$.

En particulier : $0 \leq \int_0^1 R(t)L_n(t)e^{-t}\, dt \leq \int_0^{+\infty} R(t) L_n(t) e^{-t}\, dt = 0$.

Ainsi $\int_0^1 R(t) L_n(t) e^{-t}\, dt = 0$ et $t \mapsto R(t) L_n(t) e^{-t}$ est une fonction continue et positive sur $[0,1]$. Par conséquent $\forall t \in [0,1]$, $R(t) L_n(t) e^{-t} = 0$ ou $\forall t \in [0,1]$, $R(t) L_n(t) = 0$. RL_n est un polynôme ayant une infinité de racines

donc $RL_n = 0$!! $(\deg(RL_n) = p \geq 1)$

(Q3) a) b) montre que nécessairement $\underline{p = n}$.

b) $\deg L_n = n$ et L_n admet n racines distinctes d'ordre impair dans $\mathbb{R}_+$. Un polynôme de degré n a au plus n racines. Ainsi :

L_n admet exactement n racines réelles distinctes qui sont toutes positives.