EXERCICE 1

Q1 Soit $f \in E$; $\Delta(f)$ est la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 0 en 0 donc $\Delta(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc $\Delta(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$; par conséquent $\Delta(f) \in E$.

<u>Δ est une application de E dans E.</u>

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (f_1, f_2) \in E^2, \forall x \in \mathbb{R}$, $\Delta(\lambda f_1 + f_2)(x) = \int_0^x (\lambda f_1 + f_2)(t)\,dt = \lambda \int_0^x f_1(t)\,dt + \int_0^x f_2(t)\,dt = (\lambda \Delta(f_1) + \Delta(f_2))(x)$.

Donc <u>$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (f_1, f_2) \in E^2$, $\Delta(\lambda f_1 + f_2) = \lambda \Delta(f_1) + \Delta(f_2)$.</u> Δ est linéaire.

<u>Δ est un endomorphisme de E.</u>

Q2 <u>a)</u> Voir plus haut !

<u>b)</u> Soit $\varphi : x \mapsto |x|$. φ est continue sur $\mathbb{R}$ mais φ n'est pas dérivable en 0 donc $\varphi \in E$ et $\varphi \notin \operatorname{Im} \Delta$. Par conséquent $\operatorname{Im} \Delta$ est strictement contenu(e) dans E. <u>Δ n'est pas surjective.</u> <u>Remarque</u> -- $\operatorname{Im} \Delta \subset \{f \in E \mid f(0) = 0\}$ confirme la non surjectivité !

Q3 Montrons que : $\operatorname{Ker} \Delta = \{0_E\}$. Soit $f \in \operatorname{Ker} \Delta$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_0^x f(t)\,dt = 0$

En dérivant il vient : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ donc $f = 0_E$

Par conséquent $\operatorname{Ker} \Delta = \{0_E\}$ et <u>Δ est injective.</u>

Q4 <u>a)</u> $\Delta(f) = \lambda f$. Donc $f = \frac{1}{\lambda} \Delta(f)$ car λ n'est pas nul ; par conséquent f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puisque $\Delta(f)$ l'est.

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{\lambda} (\Delta(f))'(x) = \frac{1}{\lambda} f(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = f(x) e^{-x/\lambda}$. h est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = (f'(x) - \frac{1}{\lambda} f(x)) e^{-x/\lambda} = 0$. h est nulle sur $\mathbb{R}$ donc <u>h est constante sur $\mathbb{R}$.</u>

<u>b)</u> $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, h(x) = a$. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a e^{x/\lambda}$. Or $\Delta(f) = \lambda f$ donc $\Delta(f)(0) = \lambda f(0)$

Par conséquent : $0 = \lambda f(0) = \lambda a \times 1$. $\lambda a = 0$. $a = 0$. $f = 0_E$!! ce qui introduit une légère contradiction ! Il n'est pas franchement utile de calculer $\Delta(f)$; de toute manière <u>$\Delta(f) = \lambda f = 0_E$!</u> Notons donc que <u>si $\lambda \in \mathbb{R}^*$, λ ne peut être valeur propre de Δ.</u>

(Q5) d'après Q3, 0 n'est pas valeur propre de Δ. de plus Q4 a montré que si λ est un réel non nul alors λ n'est pas valeur propre de Δ
donc <u>Δ n'a pas de valeur propre</u> ce qui n'est pas un scoop.

(Q6) a) Soit $f \in E$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$.

→ $F_0 = \Delta(f)$. F_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$ & $F_0' = f$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, F_0 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

→ Supposons la propriété vraie pour $n-1$ ($n \in \mathbb{N}^*$) et montrons la pour n.
$F_n = \Delta(F_{n-1})$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ & $F_n' = F_{n-1}$. L'hypothèse de récurrence montre alors que F_n' est de classe $\mathcal{C}^{(n-1+1)}$ sur $\mathbb{R}$. F_n' étant de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ alors F_n est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$ et la récurrence s'achève.

<u>Pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$.</u>

b) Soit $f \in E$ et soit $n \in \mathbb{N}$. F_n est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$.

Nous avons vu que $F_n' = F_{n-1}$.
Une récurrence simple donne $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $F_n^{(k)} = F_{n-k}$.
En particulier $F_n^{(n)} = F_0 = \Delta(f)$, donc $F_n^{(n+1)} = (\Delta(f))' = f$.
Notons encore que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $F_n^{(k)}(0) = F_{n-k}(0) = \begin{cases} \Delta(f)(0) = \underline{0} & \text{si } n-k = 0 \\ \Delta(F_{n-k-1})(0) = \underline{0} & \text{si } n-k \geq 1 \end{cases}$

Il est grand temps d'appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à F_n ... qui est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{F_n^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} F_n^{(n+1)}(t)\, dt = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)\, dt.$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\underline{F_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)\, dt}$.

<u>Remarque</u>.- Nous avons en fait prouvé que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall f \in E,\ \Delta^{n+1}(f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)\, dt \text{ pour tout réel } x.$$
Ce résultat peut se démontrer par récurrence sur n à condition de ne pas oublier le "$\forall f$" dans la propriété de récurrence (... l'hypothèse de récurrence opère sur Δf ...)

EXERCICE 2

<u>Remarque</u>.. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $[x,2x] \subset \mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_-^*$, $[2x,x] \subset \mathbb{R}_-^*$ ... donc f est bien définie ... sur $\mathbb{R}$!

Q1 a) g est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions continues ...

$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)$; $\sin t - t = -\frac{t^3}{6} + o(t^3)$; $\sin t - t \underset{0}{\sim} -\frac{t^3}{6}$; $\frac{\sin t - t}{t^2} \underset{0}{\sim} -\frac{t}{6}$

donc $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\sin t - t}{t^2} = 0 = g(0)$; g est continue en 0.

Finalement <u>g est continue sur $\mathbb{R}$.</u> <u>Remarque</u>.. un dl 2 suffisait largement !

b) Soit G une primitive de g sur $\mathbb{R}$. G est continue en tout point de $\mathbb{R}$ donc en particulier en 0. Par conséquent, $\lim\limits_{x \to 0} (G(2x) - G(x)) = G(0) - G(0) = 0$.

Et donc $\lim\limits_{x \to 0} \int_x^{2x} g(t)\,dt = 0$.

c) $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2}\,dt = \int_x^{2x} g(t)\,dt + \int_x^{2x} \frac{t}{t^2}\,dt = \int_x^{2x} g(t)\,dt + [\ln |t|]_x^{2x}$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2}\,dt = \int_x^{2x} g(t)\,dt + \ln|2x| - \ln|x| = \int_x^{2x} g(t)\,dt + \ln 2$

donc $\lim\limits_{x \to 0} \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2}\,dt = 0 + \ln 2 = f(0)$; <u>f est continue en 0.</u>

Q2 Soit <u>$x \in \mathbb{R}^*$</u>. $f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{\sin t}{t^2}\,dt \underset{u=-t}{=} \int_x^{2x} \frac{\sin(-u)}{u^2}(-du) = \int_x^{2x} \frac{\sin u}{u}\,du = f(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(-x) = f(x)$; cette égalité vaut encore pour $x = 0$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$. <u>f est paire sur $\mathbb{R}$.</u>

Q3 a) $\varphi : t \mapsto \frac{\sin t}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$. Soit Φ une primitive de φ sur $\mathbb{R}^*$.

Φ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ donc $x \mapsto \Phi(2x) - \Phi(x)$ aussi (composition banale)

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \int_x^{2x} \varphi(t)\,dt = \Phi(2x) - \Phi(x)$. <u>$f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.</u>

b) $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \underline{2}\,\Phi'(2x) - \Phi'(x) = 2\varphi(2x) - \varphi(x) = \frac{2\sin 2x}{4x^2} - \frac{\sin x}{x^2} = \frac{\sin 2x - 2\sin x}{2x^2}$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = -\dfrac{2\sin x(1-\cos x)}{2x^2}$.

c) $f'(x) \underset{0}{\sim} -\dfrac{2 \times x \times x^2/2}{2x^2} = -\dfrac{x}{2}$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f'(x) = 0$.

f est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f'(x) = 0$. Le théorème de la limite de la dérivée indique alors que :

1°. f est dérivable en 0   2°. $f'(0)=0$ 3° f' est continue en 0.

Remarque. f est C^1 sur $\mathbb{R}$.

Le signe de f' sur $]0,+\infty[$ est celui de la fonction $-\sin$ ... et même sur $[0,+\infty[$!

donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [k \times 2\pi, k \times 2\pi + \pi]$, $f'(x) \leq 0$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [k \times 2\pi + \pi, (k+1) \times 2\pi]$, $f'(x) \geq 0$.

Q4 a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $\forall t \in [x, 2x]$, $\left|\dfrac{\sin t}{t^2}\right| \leq \dfrac{1}{t^2}$ et $\exists t_0 \in [x, 2x]$, $\left|\dfrac{\sin t_0}{t_0^2}\right| < \dfrac{1}{t_0^2}$

Par conséquent : $\displaystyle\int_x^{2x} \left|\frac{\sin t}{t^2}\right| dt \underset{x<2x}{<} \int_x^{2x} \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_x^{2x} = -\frac{1}{2x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{2x}$.

ce qui donne encore : $|f(x)| = \left|\displaystyle\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2} dt\right| \leq \int_x^{2x} \left|\frac{\sin t}{t^2}\right| dt < \frac{1}{2x}$. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $|f(x)| < \dfrac{1}{2x}$.

Remarque. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $|f(x)| < \dfrac{1}{2|x|}$ et par parité : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $|f(x)| < \dfrac{1}{2|x|}$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $|f(x)| < \dfrac{1}{2x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Q5 a) $\forall t \in [\frac{\pi}{2}, 2 \times \frac{\pi}{2}]$, $\dfrac{\sin t}{t^2} \geq 0$ et $\forall t \in [\frac{\pi}{2}, 2 \times \frac{\pi}{2}[$, $\dfrac{\sin t}{t^2} > 0$ donc $\displaystyle\int_{\pi/2}^{2 \times \pi/2} \frac{\sin t}{t^2} dt > 0$.

$\forall t \in [\pi, 2\pi]$, $\dfrac{\sin t}{t^2} \leq 0$ et $\forall t \in]\pi, 2\pi[$, $\dfrac{\sin t}{t^2} < 0$ donc $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin t}{t^2} dt < 0$.

Finalement : $f(\frac{\pi}{2}) > 0$ et $f(\pi) < 0$.

b) $f(2\pi) = \int_{2\pi}^{4\pi} \frac{\sin t}{t^2}\,dt = \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin t}{t^2}\,dt + \int_{3\pi}^{4\pi} \frac{\sin t}{t^2}\,dt \underset{u = t-\pi}{=} \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin t}{t^2}\,dt + \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin(u+\pi)}{(u+\pi)^2}\,du$

donc $f(2\pi) = \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin t}{t^2}\,dt - \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin(u)}{(u+\pi)^2}\,du = \int_{2\pi}^{3\pi} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{(t+\pi)^2} \right) \sin t\,dt.$

$\forall t \in [2\pi, 3\pi]$, $\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{(t+\pi)^2} \right) > 0$; $\forall t \in [2\pi, 3\pi]$, $\sin t \geq 0$ et $\forall t \in]2\pi, 3\pi[$, $\sin t > 0$

donc $\underline{\underline{f(2\pi) > 0}}$.

EXERCICE 3

Comme dirait mon beauf c'est de la daube.

(Q1) f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ et g une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$. Donc $g \circ f$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ (la composée de deux applications linéaires est une application linéaire). $\underline{g \circ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$.

<u>Remarque</u>.. Notons que $f \circ g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

(Q2) <u>a)</u> Soit $y \in \operatorname{Im}(g \circ f)$. $\exists x \in \mathbb{R}^3$, $g(f(x)) = y$. Posons $z = f(x)$; $y = g(z)$ donc $y \in \operatorname{Im} g$.
Par conséquent : $\underline{\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g}$.

<u>Ou encore</u> : $f(\mathbb{R}^3) \subset \mathbb{R}^2$ donc $\operatorname{Im}(g\circ f) = g(f(\mathbb{R}^3)) \subset g(\mathbb{R}^2) = \operatorname{Im} g$.

<u>b)</u> $\dim \operatorname{Im} g + \dim \operatorname{Ker} g = \dim \mathbb{R}^2$ car $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$.
Par conséquent $\dim \operatorname{Im} g \leq \dim \mathbb{R}^2 = 2$. $\underline{\dim \operatorname{Im} g \leq 2}$.

<u>c)</u> $\operatorname{Im}(g\circ f) \subset \operatorname{Im} g$ donc $\dim(\operatorname{Im}(g \circ f)) \leq \dim \operatorname{Im} g \leq 2$. $\underline{\dim(\operatorname{Im}(g\circ f)) \leq 2}$.

<u>d)</u> Comme $g \circ f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et que $\dim \mathbb{R}^3 < +\infty$ (!), $g\circ f$ injective équivaut à $g \circ f$ surjective. Donc $g \circ f$ non injective équivaut à $g\circ f$ non surjective.
Si $g \circ f$ est surjective : $\operatorname{Im}(g\circ f) = \mathbb{R}^3$, ceci est impossible car $\dim(\operatorname{Im}(g\circ f)) \leq 2$.

Par conséquent : <u>$g \circ f$ n'est ni surjective ni injective</u>.

(Q3) $g \circ f$ n'étant pas injective 0 est valeur propre de $g \circ f$. <u>0 est valeur propre de BA</u>.

(Q4) <u>a)</u> $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une réduite de Gauss de AB donc AB est inversible.
Supposons que $BX = 0$. Alors $ABX = 0$ donc $X = 0$!
Par conséquent $\underline{BX \neq 0}$. <u>Remarque</u>.. On pouvait aussi utiliser l'égalité $ABX = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$...

<u>b)</u> Soit λ une valeur propre de AB. $\exists X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0$ et $ABX = \lambda X$.
$BABX = \lambda BX$, $BA(BX) = \lambda(BX)$ et BX n'est pas nul d'après <u>a)</u>.
Donc λ est valeur propre de BA.

<u>c)</u> $AB - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} ; \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}} ; \underset{L_2 \leftarrow \lambda L_1 + L_2}{\begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1-\lambda^2 \end{pmatrix}}$. Les deux valeurs propres de AB sont donc -1 et 1.

donc -1, 1 et 0 sont <u>des</u> valeurs propres de BA (Q3+Q4<u>b</u>). Or BA est une matrice d'ordre 3 donc $-1, 1, 0$ sont LES valeurs propres de BA qui est alors diagonalisable !

PROBLÈME

PARTIE I Notons que parler de la variable aléatoire $T = Z/A$ n'a aucun sens. A la rigueur on peut parler de la loi de Z sachant que A est réalisé. Mais ... Z/A possède une espérance si et seulement si la série de terme général $k\,p([Z=k]/A)$ est absolument convergente.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\left|k\, p([Z=k]/A)\right| = k\,p([Z=k]/A) = \frac{1}{p(A)}\, k\, p([Z=k]\cap A) \leq \frac{1}{p(A)}\, k\, p([Z=k])$

Z ayant une espérance la série de terme général $k\,p([Z=k])$ est convergente ; celle de terme général $\frac{1}{p(A)}\, k\,p([Z=k])$ aussi. Les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent alors que la série de terme général $|k\,p([Z=k]/A)|$ converge.

$E(Z/A)$ existe donc.

Ceci étant vrai pour tout événement A de $\mathcal{A}$ de probabilité non nulle on peut alors affirmer que $E(Z/\bar{A})$ existe également !

<u>$E(Z/A)$ et $E(Z/\bar{A})$ existent pour tout élément A de $\mathcal{A}$ de probabilité distincte de 0 et 1</u>

$$E(Z) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\,p(Z=k) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(k\,p([Z=k]/A)\,p(A) + k\,p([Z=k]/\bar{A})\,p(\bar{A})\right)$$

$$E(Z) = p(A)\sum_{k=0}^{+\infty} k\,p([Z=k]/A) + p(\bar{A})\sum_{k=0}^{+\infty} k\,p([Z=k]/\bar{A})$$ car les deux séries convergent.

Donc <u>$E(Z) = p(A)\,E(Z/A) + p(\bar{A})\,E(Z/\bar{A})$.</u>

PARTIE II **Q1** Ici on est assez mal ! Que dire de X_0 ?

1er cas.. on suppose que, dans la mesure où l'urne U est vide au départ, l'état E_0 est atteint au 0 tirage mais alors on ne peut plus dire que X_0 prend la valeur 0 si l'état E_0 n'est jamais atteint.

2e cas.. On ne compte pas l'état initial alors X_0 n'est plus une variable aléatoire.

Le mieux est donc de dire que par convention X_0 est la variable certaine nulle.

Notons que le premier tirage met l'urne U dans l'état E_1 et ceci pour la première fois. Donc X_1 est la variable certaine égale à 1.

(Q2) a) N_j est le nombre de tirages nécessaires pour que l'urne passe de l'état E_j, atteint pour la première fois, à l'état E_{j+1} atteint pour la première fois.

b) Soit $j \in [\![0, 2n-1]\!]$. X_{j+1} et X_j ayant une espérance $N_j = X_{j+1} - X_j$ en possède une aussi.

Notons que : $\forall j \in [\![0, 2n-1]\!]$, $E(N_j) = E(X_{j+1}) - E(X_j)$, $\underline{\forall j \in [\![0, 2n-1]\!], \ \mu_j = m_{j+1} - m_j}$.

$j \in [\![1, 2n-1]\!]$

(Q3) a) Pour passer de l'état E_j à l'état E_{j+1} en un seul tirage il est nécessaire de tirer un numéro correspondant à une boule de V qui contient $2n-j$ boules. Par conséquent $\underline{p(A_j) = \frac{2n-j}{2n}}$.

b) Si A_j est réalisé, 1 tirage a été nécessaire pour passer de l'état E_j à l'état E_{j+1} donc N_j / A_j est la variable certaine égale à 1. $\underline{N_j / A_j = 1}$.

Si $\overline{A_j}$ est réalisé le nombre de tirages pour passer de l'état E_j à l'état E_{j+1} est supérieur ou égal à 2. Cela signifie que le premier tirage a mis U dans l'état E_{j-1} et qu'ensuite il a fallu N_{j-1} tirages pour revenir à l'état E_j et N_j tirages pour enfin voir U dans l'état E_{j+1}.

Par conséquent : $\underline{N / \overline{A_j} = 1 + N_{j-1} + N_j}$.

c) Soit $j \in [\![1, 2n-1]\!]$. Notons que $p(A_j) \neq 0$ et $p(A_j) \neq 1$.

linéarité de l'espérance

$\mu_j = E(N_j) = E(N_j / A_j)\, p(A_j) + E(N_j / \overline{A_j})\, p(\overline{A_j})$

$$\mu_j = 1 \times \frac{2n-j}{2n} + E(1 + N_{j-1} + N_j)\frac{j}{2n} = \frac{2n-j}{2n} + (1 + \mu_{j-1} + \mu_j)\frac{j}{2n}.$$

$2n\mu_j = 2n - j + j + j\mu_{j-1} + j\mu_j$; $\underline{\mu_j = \frac{2n + j\mu_{j-1}}{2n-j}}$.

d) Pour $\forall j \in [\![0,n-1]\!]$, $I_j = n\int_0^1 x^{n-j-1}(1-x)^j\,dx$.

Notons que $I_0 = n\int_0^1 x^{n-1}\,dx = n \times \left[\frac{x^n}{n}\right]_0^1 = 1$.

Soit $j \in [\![1,n-1]\!]$.

$$I_j = n\int_0^1 \underset{u'}{x^{n-j-1}}\,\underset{v}{(1-x)^j}\,dx = n\left[\frac{x^{n-j}}{n-j}(1-x)^j\right]_0^1 - n\int_0^1 \frac{x^{n-j}}{n-j}\left(-j(1-x)^{j-1}\right)dx.$$

$$I_j = \frac{n}{n-j} + \frac{nj}{n-j}\int_0^1 x^{n-j}(1-x)^{j-1}\,dx = \frac{n}{n-j} + \frac{j}{n-j}I_{j-1} = \frac{n + j\,I_{j-1}}{n-j}. \quad (*)$$

Montrons par récurrence que : $\forall j \in [\![0,n-1]\!]$, $\mu_j = I_j$.

→ $\mu_0 = E(N_0) = E(X_1 - X_0) = E(X_1) - E(X_0) = 1 - 0 = 1 = I_0$.

→ Supposons que $\mu_{j-1} = I_{j-1}$ pour $j \in [\![1,n-1]\!]$ et montrons que $\mu_j = I_j$.

$$\mu_j = \frac{n + j\,\mu_{j-1}}{n-j} \underset{H.R.}{=} \frac{n + j\,I_{j-1}}{n-j} \underset{(*)}{=} I_j.$$ Ceci achève la récurrence.

$$\forall j \in [\![0,n-1]\!],\ \mu_j = n\int_0^1 x^{n-j-1}(1-x)^j\,dx.$$

Q4) $k \in [\![1,n]\!]$.

a) $\sum_{j=0}^{k-1} N_j = \sum_{j=0}^{k-1}(X_{j+1} - X_j) = X_k - X_0 = X_k$. $\quad X_k = \sum_{j=0}^{k-1} N_j$.

b) $m_k = E(X_k) = E\left(\sum_{j=0}^{k-1} N_j\right) = \sum_{j=0}^{k-1} E(N_j) = \sum_{j=0}^{k-1}\mu_j$ ... linéarité de l'espérance.

$$m_k = \sum_{j=0}^{k-1}\mu_j.$$

c) Soit $x \in \mathbb{R}^* - \{\tfrac{1}{2}\}$. $\sum_{j=0}^{k-1} x^{n-j-1}(1-x)^j = x^{n-1}\sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{1-x}{x}\right)^j \underset{\frac{1-x}{x} \neq 1 \text{ car } x \neq \frac{1}{2}}{=} x^{n-1}\,\frac{1-\left(\frac{1-x}{x}\right)^k}{1-\frac{1-x}{x}}$

$$\sum_{j=0}^{k-1} x^{n-j-1}(1-x)^j = \frac{x^{n-1}}{x^k}\,\frac{x^k - (1-x)^k}{\frac{2x-1}{x}} = x^{n-k}\,\frac{x^k - (1-x)^k}{2x-1}$$

$\forall x \in \mathbb{R}^* - \{\tfrac{1}{2}\}$, $\sum_{j=0}^{k-1} x^{n-j-1}(1-x)^j = x^{n-k}\,\frac{x^k - (1-x)^k}{2x-1}$. Notons que cette égalité vaut encore pour $x = 0$ (faire 2 cas pour la preuve : $k < n$ et $k = n$).

Remarque.. On pouvait aussi utiliser : $a^k - b^k = (a-b)\sum_{j=0}^{k-1} a^{k-j-1}b^j$.

d) $u_k : x \mapsto \sum_{j=0}^{k-1} x^{n-j-1}(1-x)^j$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ & $v_k : x \mapsto x^{n-k}\,\frac{x^k-(1-x)^k}{2(x-1)}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}-\{1\}$. En particulier v_k est localement intégrable sur $[0,1[$.

Comme $\forall x \in \mathbb{R}-\{1\}$, $u_k(x)=v_k(x)$, v_k est prolongeable par continuité en 1 ; mieux u_k est le prolongement par continuité de v_k à 1.

Par conséquent $\int_0^1 x^{n-k}\,\frac{x^k-(1-x)^k}{2(x-1)}\,dx$ est convergente.

Q5) mieux : $\int_0^1 x^{n-k}\,\frac{x^k-(1-x)^k}{2(x-1)}\,dx = \sum_{j=0}^{k-1}\int_0^1 x^{n-j-1}(1-x)^j\,dx$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$

En multipliant par $2n$ on obtient : $n\int_0^1 x^{n-k}\,\frac{x^k-(1-x)^k}{x-1}\,dx = \sum_{j=0}^{k-1} y_j = m_k$ pour tout k dans $[\![1,n]\!]$.

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $m_k = n\int_0^1 x^{n-k}\,\frac{x^k-(1-x)^k}{x-1}\,dx$ ... acquis aussi pour $k=0$ $(0=0)$. Un changement de variable (un peu rapide) donne alors :

$\forall k \in [\![0,n]\!]$, $m_k \underset{t=1-x}{=} n\int_1^0 (1-t)^{n-k}\,\frac{(1-t)^k-t^k}{-t}(-dt)$ ou $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $m_k = n\int_0^1 (1-t)^{n-k}\,\frac{t^k-(1-t)^k}{t}\,dt$.

PARTIE III : Etude de deux cas particuliers

Q1) a) $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $\frac{1-(1-t)^{2n}}{t} = \frac{1-(1-t)^{2n}}{1-(1-t)} = \sum_{k=0}^{2n-1}(1-t)^k$

$t \mapsto \frac{1-(1-t)^{2n}}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$, $t \mapsto \sum_{k=0}^{2n-1}(1-t)^k$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $\frac{1-(1-t)^{2n}}{t} = \sum_{k=0}^{2n-1}(1-t)^k$. Donc $t \mapsto \sum_{k=0}^{2n-1}(1-t)^k$ est le prolongement par continuité de $t \mapsto \frac{1-(1-t)^{2n}}{t}$ à $\mathbb{R}$.

Tout ceci montre que $\int_0^1 \frac{1-(1-t)^{2n}}{t}\,dt$ converge et vaut $\sum_{k=0}^{2n-1}\int_0^1 (1-t)^k\,dt$.

$\sum_{k=0}^{2n-1}\int_0^1 (1-t)^k\,dt = \sum_{k=0}^{2n-1}\left[-\frac{(1-t)^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \sum_{k=0}^{2n-1}\frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}$.

Donc $\int_0^1 \frac{1-(1-t)^{2n}}{t}\,dt = \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}$.

b) On pouvait pour traiter cette question utiliser la même démarche que celle de a), et pourquoi ne pas utiliser a) !

En effet ce qui a été prouvé pour ℓ_n vaut évidemment pour n et donc

$\int_0^1 \frac{1-(1-t)^n}{t}\,dt$ converge et vaut $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

Soit $\varepsilon\in\,]0,1]$, $\displaystyle\int_\varepsilon^1 \frac{1-(1-t^2)^n}{t}\,dt = \frac12\int_\varepsilon^1 \frac{1-(1-t^2)^n}{t^2}\,2t\,dt \underset{\substack{u=t^2\\ du=2t\,dt}}{=} \frac12\int_{\varepsilon^2}^1 \frac{1-(1-u)^n}{u}\,du$.

$\displaystyle\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{\varepsilon^2}^1 \frac{1-(1-u)^n}{u}\,du = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

Donc $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{1-(1-t^2)^n}{t}\,dt = \frac12\sum_{k=1}^{n}\frac1k$.

Par conséquent $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-(1-t^2)^n}{t}\,dt$ converge et vaut $\displaystyle\frac12\sum_{k=1}^{n}\frac1k$.

c) $\displaystyle m_n = n\int_0^1 (1-t)^n\,\frac{(1+t)^n-(1-t)^n}{t}\,dt = n\int_0^1 \frac{(1-t^2)^n-(1-t)^{2n}}{t}\,dt$

$\displaystyle m_n = n\int_0^1\left(\frac{1-(1-t)^{2n}}{t} - \frac{1-(1-t^2)^n}{t}\right)dt \overset{\text{les deux intégrales convergent}}{=} n\int_0^1 \frac{1-(1-t)^{2n}}{t}\,dt - n\int_0^1 \frac{1-(1-t^2)^n}{t}\,dt$

donc $\displaystyle m_n = n\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac1k - \frac12\sum_{k=1}^{n}\frac1k\right) = n\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}\right) = n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}$

Donc $\displaystyle m_n = n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}$.

Q2) a) $p\in\mathbb{N}$. $t\mapsto \frac{(1+t)^p-(1-t)^p}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et prolongeable par continuité en 0

car $\displaystyle\frac{(1+t)^p-(1-t)^p}{t} = \frac{(1-t)^p}{t}\left[\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^p-1\right] \underset{0}{\sim} \frac1t\times p\times\left(\frac{1+t}{1-t}-1\right) = \frac{p}{t}\,\frac{2t}{1-t} \underset{0}{\sim} 2p$.

(ou $(1+t)^p-(1-t)^p = 1+pt-(1-pt)+o(t) = 2pt+o(t)$ ...)

Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1+t)^p-(1-t)^p}{t}\,dt$ converge pour tout $p\in\mathbb{N}$.

Soit $p \in [\![1,+\infty[\![$. $I_p - I_{p-1} = \int_0^1 \frac{1}{t}\left[(1+t)^{p-1}(1+t-1) - (1-t)^{p-1}(1-t-1)\right]dt$

$I_p - I_{p-1} = \int_0^1 (1+t)^{p-1}\,dt + \int_0^1 (1-t)^{p-1}\,dt = \left[\frac{1}{p}(1+t)^p\right]_0^1 + \left[\frac{-1}{p}(1-t)^p\right]_0^1$

$I_p - I_{p-1} = \frac{1}{p}2^p - \frac{1}{p} - 0 + \frac{1}{p} = \frac{2^p}{p}$. $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ I_p - I_{p-1} = \frac{2^p}{p}$.

__b)__ $m_n = n\int_0^1 \frac{(1+t)^n - (1-t)^n}{t}\,dt = n\, I_n \underset{I_0=0}{=} n(I_n - I_0) = n\left(\sum_{p=1}^{n} (I_p - I_{p-1})\right)$

$$m_n = n \sum_{p=1}^{n} \frac{2^p}{p}.$$