EDHEC 1994 exercice 1

α désigne un nombre réel fixé supérieur ou égal à 1, et on pose :

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\, t^n\,\mathrm{d}t$$

Q1 Montrer que l'intégrale I est absolument convergente.

On fait Q2'

Q2 a) Calculer I_0.

b) Pour $n \geqslant 1$, montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que si I_{n-1} est convergente, il en est de même de I_n, et trouver une relation entre I_n et I_{n-1}.

c) En déduire la convergence de I_n et la valeur de I_n en fonction de n et α.

Q2' n est dans $\mathbb{N}$. Montrer que I_n converge et donner sa valeur.

Q3 a) En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left|\sin x - \left(x - \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\right| \leqslant \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

b) n appartient à $\mathbb{N}$. Montrer que : $\left|I - \left(I_0 - \frac{I_2}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{I_{2n}}{(2n+1)!}\right)\right| \leqslant K I_{2n+1}$ K étant un nombre réel que l'on précisera en fonction de n.

c) En déduire : $I = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{3\alpha^3} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)\alpha^{2n+1}}\right)$.

Q4 On pose, pour tout réel x : $\arctan(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0,1],\ \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} - \frac{1}{1+t^2} = (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$.

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\ \left|\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} - \arctan(x)\right| \leqslant \frac{1}{2n+3}$.

c) En déduire une expression très simple de I en fonction de α utilisant la fonction arctan.

Q1 Posons $\forall t\in]0,+\infty[$, $f_\alpha(t)=e^{-\alpha t}\frac{\sin t}{t}$. f_α est continue sur $]0,+\infty[$.

$f_\alpha(t)\underset{t\to0}{\sim} 1\times\frac{t}{t}=1$. Alors $\lim\limits_{t\to0} f_\alpha(t)=1$. donc f_α est prolongeable par continuité en 0.

Alors $\int_0^1 f_\alpha(t)dt$ converge. Or $\forall t\in]0,1]$, $f_\alpha(t)\geqslant 0$ donc $\int_0^1 |f_\alpha(t)|dt$ converge.

Remarque.. Nous noterons dans la suite $\hat{f}_\alpha$ le prolongement par continuité de f_α à 0.

Alors $\forall t\in[0,+\infty[$, $\hat{f}_\alpha(t)=\begin{cases} e^{-\alpha t}\frac{\sin t}{t} & \text{si } t>0 \\ 1 & \text{si } t=0\end{cases}$.

croissance comparée

$\forall t\in[1,+\infty[$, $|t^2 f_\alpha(t)| = t^2 e^{-\alpha t}\frac{|\sin t|}{t} = t e^{-\alpha t}|\sin t| \leqslant t e^{-\alpha t}$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}(te^{-\alpha t}) = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{\alpha}\,\frac{\alpha t}{e^{\alpha t}}\right)=0$

Alors par encadrement $\lim\limits_{t\to+\infty}|t^2 f_\alpha(t)|=0$ ou $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2|f_\alpha(t)|=0$.

Ainsi 1/ $|f_\alpha(t)| \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

2/ $\forall t\in[1,+\infty[$, $|f_\alpha(t)|\geqslant 0$ et $\frac{1}{t^2}\geqslant 0$.

3/ $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt$ converge.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent alors la convergence de $\int_1^{+\infty}|f_\alpha(t)|dt$.

Finalement $\int_0^{+\infty}|f_\alpha(t)|dt$ converge. Alors $\int_0^{+\infty} f_\alpha(t)dt$ est absolument convergente.

Remarque.. Notons qu'alors $\int_0^{+\infty} f_\alpha(t)dt$ est convergente.

Q2 Version 1.. celle du texte.

a) $t\mapsto e^{-\alpha t}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et $\forall A\in[0,+\infty[$, $\int_0^A e^{-\alpha t}dt=\left[\frac{e^{-\alpha t}}{-\alpha}\right]_0^A=\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha A})$.

Alors $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A e^{-\alpha t}dt=\frac{1}{\alpha}$. $\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}dt$ converge et vaut $\frac{1}{\alpha}$.

I_0 existe et $I_0=\frac{1}{\alpha}$.

b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Supposons que I_{n-1} converge.

$u: t\mapsto t^n$ et $v: t\mapsto -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}$ sont de classe C^1 sur $[0,+\infty[$ et

$\forall t\in[0,+\infty[$, $u'(t)=nt^{n-1}$ et $v'(t)=e^{-\alpha t}$.

En intégrant par parties on obtient alors :

$\forall A \in [0,+\infty[$, $\int_0^A t^n e^{-\alpha t}dt = \left[t^n\left(-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}\right)\right]_0^A - \int_0^A n t^{n-1}\left(-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}\right)dt = -\frac{1}{\alpha}A^n e^{-\alpha A} + \frac{n}{\alpha}\int_0^A t^{n-1}e^{-\alpha t}dt.$

Or $\lim\limits_{A\to+\infty}\left(A^n e^{-\alpha A}\right) = \lim\limits_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{\alpha^n}\frac{(\alpha A)^n}{e^{\alpha A}}\right) \underset{\alpha>0\,!}{=} 0$ par croissance comparée.

Nous avons supposé que I_{n-1} converge.

Alors $\lim\limits_{A\to+\infty}\left(\int_0^A t^n e^{-\alpha t}dt\right) = \lim\limits_{A\to+\infty}\left(-\frac{1}{\alpha}A^n e^{-\alpha A} + \frac{n}{\alpha}\int_0^A t^{n-1}e^{-\alpha t}dt\right) = \frac{n}{\alpha}\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-\alpha t}dt.$

Donc $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-\alpha t}dt$ converge et $I_n = \frac{n}{\alpha}\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-\alpha t}dt$ ou $I_n = \frac{n}{\alpha} I_{n-1}$.

<u>Si $n \in \mathbb{N}^*$ et si I_{n-1} est convergente alors I_n converge et $I_n = \frac{n}{\alpha} I_{n-1}$.</u>

c) <u>Remarque</u> - Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n converge.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \frac{n}{\alpha} I_{n-1}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n!}\alpha^n I_n = \frac{1}{(n-1)!}\alpha^{n-1} I_{n-1}$.

Donc $\left(\frac{1}{n!}\alpha^n I_n\right)_{n\geq 0}$ est une suite constante. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n!}\alpha^n I_n = \frac{1}{0!}\alpha^0 I_0 = I_0 = \frac{1}{\alpha}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$. Fin de la remarque !

Montrons alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n converge et vaut $\frac{n!}{\alpha^{n+1}}$ ... par récurrence.

→ C'est clair pour $n=0$ d'après a)

→ Supposons la propriété vraie pour $n-1$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons la pour n.

Par hypothèse I_{n-1} converge et vaut $\frac{(n-1)!}{\alpha^{(n-1)+1}}$. b) montre alors que

I_n converge et que $I_n = \frac{n}{\alpha} I_{n-1}$

donc I_n converge et $I_n = \frac{n}{\alpha}\frac{(n-1)!}{\alpha^n} = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$ ce qui achève la récurrence.

<u>Pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n converge et $I_n = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$.</u>

<u>Version 2.</u> Utilisation de Γ qui n'était pas au programme en 1993.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $t \mapsto e^{-\alpha t}t^n$ est continue sur $[0,+\infty[$.

$t \mapsto \alpha t$ est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$. Cela justifie le changement de variable $u=\alpha t$ dans ce qui suit.

$\forall A \in \mathbb{R}_+,\ \int_0^A e^{-\alpha t}\, t^n\, dt \underset{u=\alpha t}{=} \int_0^{\alpha A} e^{-u}\left(\frac{u}{\alpha}\right)^n \frac{1}{\alpha}\, du = \frac{1}{\alpha^{n+1}}\int_0^{\alpha A} e^{-u} u^n\, du.$

Or $\Gamma(n+1)=\int_0^{+\infty} e^{-u} u^{(n+1)-1}\, du$ converge et vaut $((n+1)-1)!$

Donc $\int_0^{+\infty} e^{-u} u^n du$ converge et vaut $n!$

Alors $\lim\limits_{A\to+\infty}\left(\int_0^A e^{-\alpha t} t^n dt\right) = \lim\limits_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{\alpha^{n+1}}\int_0^{\alpha A} e^{-u}u^n du\right) \overset{\alpha>0 \text{ donc } \lim\limits_{A\to+\infty}(\alpha A)=+\infty}{=} \frac{1}{\alpha^{n+1}}\times n! = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}.$

Donc $I_n=\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} t^n dt$ converge et vaut $\frac{n!}{\alpha^{n+1}}$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}$.

(Q3) a) Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x)=\sin x$. φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$\forall k\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\ \varphi^{(k)}(x)=\sin\left(x+k\times\frac{\pi}{2}\right)$ (récurrence simple...)

En particulier $\forall k\in\mathbb{N},\ \varphi^{(k)}(0)=\sin\left(k\times\frac{\pi}{2}\right)$. Soit $n\in\mathbb{N}$

En appliquant à φ l'inégalité de Taylor-Lagrange, à l'ordre $2n+1$ en 0, il vient :

$\left|\varphi(x)-\sum\limits_{k=0}^{2n+1}\frac{(x-0)^k}{k!}\varphi^{(k)}(0)\right| \leqslant \frac{|x-0|^{2n+2}}{(2n+2)!}\max\limits_{t\in[0,x]}|\varphi^{(2n+2)}(t)|$ pour tout x dans $\mathbb{R}^+$.

$\forall x\in\mathbb{R}_+,\ \left|\sin x-\sum\limits_{k=0}^{2n+1}\frac{x^k}{k!}\sin\left(k\times\frac{\pi}{2}\right)\right| \leqslant \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\max\limits_{t\in[0,x]}\left|\sin\left(t+k\times\frac{\pi}{2}\right)\right| \leqslant \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}.$

Notons que si k est pair : $\sin\left(k\times\frac{\pi}{2}\right)=0$.

Alors $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ \left|\sin x-\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right)\right|\leqslant\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}.$

Or $\forall k\in\mathbb{N},\ \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^k\sin\frac{\pi}{2}=(-1)^k.$

Donc $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ \left|\sin x-\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right|\leqslant\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$ ou

---

$\forall x\in\mathbb{R}_+,\ \left|\sin x-\left(x-\frac{x^3}{6}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\right|\leqslant\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}$.

---

b) Soit $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\,]0,+\infty[$ en multipliant l'inégalité précédente par $\left|\frac{e^{-\alpha x}}{x}\right|$

il vient : $\left|e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}-\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}e^{-\alpha x}x^{2k}\right|\leqslant\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\left|\frac{e^{-\alpha x}}{x}\right|=\frac{1}{(2n+2)!}e^{-\alpha x}x^{2n+1}$

donc $\left|\hat{f}_\alpha(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} e^{-\alpha x} x^{2k}\right| \leq \frac{1}{(2n+2)!} e^{-\alpha x} x^{2n+1}$.

Posons $\forall x \in [0,+\infty[$, $\psi(x) = \hat{f}_\alpha(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} e^{-\alpha x} x^{2k}$

Nous venons de voir que $\forall x \in]0,+\infty[$, $|\psi(x)| \leq \frac{1}{(2n+2)!} e^{-\alpha x} x^{2n+1}$.

Si $\hat{f}_\alpha$ vaut 1 en 0 de même que $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} e^{-\alpha x} x^{2k}$. [OK ? Mais l'inégalité précédente vaut encore pour $x=0$.

$\forall x \in [0,+\infty[$, $|\psi(x)| \leq \frac{1}{(2n+2)!} e^{-\alpha x} x^{2n+1}$ et $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(2n+2)!} e^{-\alpha x} x^{2n+1} dx$ converge et vaut $\frac{1}{(2n+2)!} I_{2n+1}$. Alors :

1) $\int_0^{+\infty} |\psi(x)| dx$ converge donc $\int_0^{+\infty} \psi(x) dx$ est absolument convergente donc convergente, ce qui n'est pas un scoop !

2) $\left|\int_0^{+\infty} \psi(x) dx\right| \leq \int_0^{+\infty} |\psi(x)| dx$

3) $\int_0^{+\infty} |\psi(x)| dx \leq \frac{1}{(2n+2)!} I_{2n+1}$.

4) $\int_0^{+\infty} \psi(x) dx = \int_0^{+\infty} \left[e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} e^{-\alpha x} x^{2k} \right] dx$ or

$\int_0^{+\infty} \psi(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} x^{2k} dx$ car toutes les intégrales convergent, ou encore $\int_0^{+\infty} \psi(x) dx = I - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} I_{2k}$.

Alors $\left| I - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} I_{2k} \right| \leq \frac{1}{(2n+2)!} I_{2n+1}$ ou

$\left| I - \left(I_0 - \frac{I_2}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{I_{2n}}{(2n+1)!} \right) \right| \leq \frac{1}{(2n+2)!} I_{2n+1}$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}$.

__Remarque__ .. Nous oublierons pudiquement le K qui est du KK ...

c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left| I - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} I_{2k} \right| \leq \frac{1}{(2n+1)!} I_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)!} \times \frac{(2n+1)!}{\alpha^{2n+2}} = \frac{1}{2n+2}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2n+2} \underset{\underset{\alpha \geq 1}{\uparrow}}{\leq} \frac{1}{2n+2}$.

Or $\forall k \in \mathbb{N}$, $\frac{(-1)^k}{(2k+1)!} I_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \times \frac{(2k)!}{\alpha^{2k+1}} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)\alpha^{2k+1}}$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left| I - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)\alpha^{2k+1}} \right| \leq \frac{1}{2n+2}$. Or $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2n+2} = 0$. Donc par encadrement

il vient $\underline{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)\alpha^{2k+1}} = I}$ ou $\underline{\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{3\alpha^3} + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)\alpha^{2n+1}} \right) = I}$.

<u>Remarque</u>.. La série de terme général $\frac{(-1)^n}{(2n+1)\alpha^{2n+1}}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\alpha^{2n+1}} = I = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \frac{\sin t}{t}\, dt$.

Q4) a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [0,1]$, $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} = \sum_{k=0}^{n} (-t^2)^k \underset{\underset{-t^2 \neq 1}{\uparrow}}{=} \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1-(-t^2)} = \frac{1}{1+t^2} + (-1)^{n+2} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$. ← ou n !

Alors $\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0,1], \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} - \frac{1}{1+t^2} = (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $x \in [0,1]$. Intégrons l'égalité précédente entre 0 et x.

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^x t^{2k}\, dt - \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt.$$

Alors $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} - \arctan x = (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt$.

donc $\left| \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} - \arctan x \right| = \left| (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \right| = \left| \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \right| \underset{\underset{x \geq 0}{\downarrow}}{\leq} \int_0^x \left| \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \right| dt = \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt$.

$\forall t \in [0,x]$, $t^{2n+2} \geq 0$ et $\frac{1}{1+t^2} \leq 1$ donc $\forall t \in [0,x]$, $\frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \leq t^{2n+2}$.

Alors $\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \leq \int_0^x t^{2n+2}\, dt = \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \leq \frac{1}{2n+3}$ car $x \in [0,1]$.

Ainsi $\underline{\left| \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} - \arctan x \right| \leq \frac{1}{2n+3}}$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}$ et pour tout

$\underline{x \text{ dans } [0,1]}$

$\mathbb{N}^*$ si vous voulez faire

Mais aucun concepteur.

<u>Remarque</u>.- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+3} = 0$. Mais par encadrement il vient :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \arctan(x) \text{... pour tout } x \text{ dans } [0,1]$$

Donc pour tout x dans $[0,1]$ la série de terme général $(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ converge et

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x$. Par imparité ceci vaut encore pour tout $x \in [-1,1]$.

Pour $x = 1$ on retrouve un résultat classique : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$ ...

<u>c)</u> $I = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\alpha^{2n+1}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(1/\alpha)^{2n+1}}{2n+1} = \arctan \frac{1}{\alpha}$. $\underline{I = \arctan \frac{1}{\alpha}}$.

remarque de §3 <u>c)</u>   Remarque précédente ($1/\alpha \in [0,1]$).

$$\underline{\forall \alpha \in [1,+\infty[, \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \frac{\sin t}{t}\, dt = \arctan \frac{1}{\alpha} = \frac{\pi}{2} - \arctan \alpha}$$

au cours ($\alpha > 0$)...

PARTIE I : Simulation sur ordinateur de cette expérience aléatoire.

<u>Remarques</u> 1.. La probabilité pour faire un déplacement vers le haut est p.
La probabilité pour faire un déplacement vers la droite <u>ou</u> vers la gauche est $q = 1-p$.

2.. Ainsi si hasard prend la valeur 0 on considère que l'on a fait un déplacement vers le haut.

3.. Si hasard prend la valeur 1 on considère que l'on a fait un déplacement vers la droite.

4.. Si hasard prend la valeur -1 on fait un déplacement vers la gauche si l'abscisse du point est 1 et vers la droite si l'abscisse du point est 0.

Ainsi si hasard ne prend pas la valeur 0, x reçoit la valeur 1 si $x=0$ et x reçoit la valeur $1 + \text{hasard}$ si $x = 1$. Pour ne pas multiplier les tests cherchons alors une fonction affine $\varphi : x \mapsto ax+b$ qui prend la valeur 1 en 0 et $1+\text{hasard}$ en 1.

$$\varphi(0)=1 \text{ et } \varphi(1)=1+\text{hasard} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ a+b=\text{hasard}+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=\text{hasard} \end{cases}$$

<u>Résumons</u> Si hasard prend la valeur 0, x ne change pas et y augmente de 1.
Si hasard ne prend pas la valeur 0, x reçoit la valeur de "$x \times \text{hasard} + 1$" et y ne change pas. Ecrivons alors la totalité de la boucle.

```
While x<2 Do
Begin
h:=hasard;
If h=0 then y:=y+1
      else x:=x*h+1;
End;
```

Ecrivons la fonction hasard en remarquant que $p+\frac{q}{2}=\frac{p+1}{2}$

```
Function hasard (p:real):integer;
Var z:real;
Begin
z:=random;
If z<p then hasard:=0
        else If z<(p+1)/2 then hasard:=1
                          else hasard:=-1;
End;
```

PARTIE II Loi de probabilité de la variable aléatoire X_n et de la durée du trajet.

(Q1) a] $u=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\neq 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ et $Au=\begin{pmatrix}p & q/2 & 0\\ q & p & 0\\ 0 & q/2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=u$.

$u=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.

b] et c] Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Soit $\varepsilon\in\{-1,1\}$. ← pour traiter les deux cas en un !

$p\neq 0, q\neq 0$

$$AX=\left(p+\varepsilon\frac{q}{\sqrt2}\right)X \Leftrightarrow \begin{cases} px+\frac{q}{2}y=\left(p+\varepsilon\frac{q}{\sqrt2}\right)x\\ qx+py=\left(p+\varepsilon\frac{q}{\sqrt2}\right)y\\ \frac{q}{2}y+z=\left(p+\varepsilon\frac{q}{\sqrt2}\right)z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\varepsilon\frac{2}{\sqrt2}x=\varepsilon\sqrt2 x\\ \varepsilon y=\sqrt2 x \dots \text{ou } y=\varepsilon\sqrt2 x \text{ car } \varepsilon^2=1\\ 0=+\frac{q}{2}y+\left(1-p-\varepsilon\frac{q}{\sqrt2}\right)z=\frac{q}{2}y+q\left(1-\frac{\varepsilon}{\sqrt2}\right)z\end{cases}$$

$$AX=\left(p+\varepsilon\frac{q}{\sqrt2}\right)X\Leftrightarrow\begin{cases} y=\varepsilon\sqrt2 x\\ z=\dfrac{-1/2}{\frac{\varepsilon}{\sqrt2}-1}y=\dfrac{\sqrt2}{\sqrt2\varepsilon-2}=\dfrac{\sqrt2\varepsilon+2}{(\sqrt2\varepsilon)^2-4}y=-\frac{1}{2}(\sqrt2\varepsilon+2)y\end{cases}.$$

$$AX=\left(p+\varepsilon\frac{q}{\sqrt2}\right)X\Leftrightarrow\begin{cases} y=\varepsilon\sqrt2 x\\ z=-\frac12(\sqrt2\varepsilon+2)\varepsilon\sqrt2 x=-\frac12(2+2\varepsilon\sqrt2)x=-(1+\varepsilon\sqrt2)x\end{cases}.$$

Ainsi $p+\varepsilon\frac{q}{\sqrt2}$ est une valeur propre de A et le sous-espace propre associé est

$SEP\left(A, p+\varepsilon\frac{q}{\sqrt2}\right)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\ \varepsilon\sqrt2\\ -(1+\varepsilon\sqrt2)\end{pmatrix}\right)$ ... et ceci pour $\varepsilon=1$ et $\varepsilon=-1$.

Alors

1) $p+\frac{q}{\sqrt2}$ est valeur propre de A et $SEP\left(A,p+\frac{q}{\sqrt2}\right)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\ \sqrt2\\ -(1+\sqrt2)\end{pmatrix}\right)$

2) $v=\begin{pmatrix}1\\ \sqrt2\\ -(1+\sqrt2)\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $p+\frac{q}{\sqrt2}$ de première composante égale à 1.

3) $p-\frac{q}{\sqrt2}$ est valeur propre de A et $SEP\left(A,p-\frac{q}{\sqrt2}\right)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\ -\sqrt2\\ \sqrt2-1\end{pmatrix}\right)$;

4) $w=\begin{pmatrix}1\\ -\sqrt2\\ \sqrt2-1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $p-\frac{q}{\sqrt2}$ de première composante égale à 1.

d) u, v, w sont trois vecteurs propres de A associés à trois valeurs propres (*) distinctes de A donc (u,v,w) est une famille libre de cardinal 3 de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension 3.

Ainsi (u,v,w) est une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres 1, $p+\frac{q}{\sqrt{2}}$ et $p-\frac{q}{\sqrt{2}}$.

Soit P la matrice de passage de la base canonique de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ à la base (u,v,w). Alors :

1) $P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & -(1+\sqrt{2}) & \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$;

(*) Il est facile de vérifier que $1\neq p+\frac{q}{\sqrt{2}}$, $1\neq p-\frac{q}{\sqrt{2}}$ et $p+\frac{q}{\sqrt{2}}\neq p-\frac{q}{\sqrt{2}}$ car $q=1-p$ et $p\in]0,1[$

2) P est inversible (comme matrice de passage) ;

3) $A' = P^{-1}AP = \mathrm{Diag}\left(1, p+\frac{q}{\sqrt{2}}, p-\frac{q}{\sqrt{2}}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & p+q/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & p-q/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Si $P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & -(1+\sqrt{2}) & \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$, P est une matrice inversible telle que $A'=P^{-1}AP$ soit la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & p+q/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & p-q/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

e) Soit $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in M_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z=1 \\ \sqrt{2}y-\sqrt{2}z=0 \\ x-(1+\sqrt{2})y+(\sqrt{2}-1)z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=z=\frac{1}{2} \\ x=\frac{1+\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}-1}{2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\frac{1}{2} \\ z=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$\forall X\in M_{3,1}(\mathbb{R})$, $PX=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow X=\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$. Ainsi $P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

f) Soit $n \in \mathbb{N}$. La première colonne de A^n est $A^n\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

Une récurrence simple donne $(A')^n = (\Pi^{-1}A\Pi)^n = \Pi^{-1}A^n\Pi$.

Ainsi $A^n = \Pi(A')^n\Pi^{-1}$. $A' = \mathrm{diag}(1, p+\frac{q}{\sqrt{2}}, p-\frac{q}{\sqrt{2}})$ donc

$A'^n = \mathrm{diag}(1, (p+\frac{q}{\sqrt{2}})^n, (p-\frac{q}{\sqrt{2}})^n)$ (toujours à l'aide d'une récurrence simple ...)

Alors $A^n\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \Pi(A')^n\Pi^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \Pi\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & (p+\frac{q}{\sqrt{2}})^n & 0\\0 & 0 & (p-\frac{q}{\sqrt{2}})^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1/2\\1/2\end{pmatrix} = \Pi\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}(p+\frac{q}{\sqrt{2}})^n\\\frac{1}{2}(p-\frac{q}{\sqrt{2}})^n\end{pmatrix}$.

$A^n\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2}\\1 & -(1+\sqrt{2}) & \sqrt{2}-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}(p+\frac{q}{\sqrt{2}})^n\\\frac{1}{2}(p-\frac{q}{\sqrt{2}})^n\end{pmatrix}$. Alors :

$$A^n\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}(p+\frac{q}{\sqrt{2}})^n + \frac{1}{2}(p-\frac{q}{\sqrt{2}})^n\\ \frac{1}{\sqrt{2}}(p+\frac{q}{\sqrt{2}})^n - \frac{1}{\sqrt{2}}(p-\frac{q}{\sqrt{2}})^n\\ 1 - \frac{1+\sqrt{2}}{2}(p+\frac{q}{\sqrt{2}})^n + \frac{\sqrt{2}-1}{2}(p-\frac{q}{\sqrt{2}})^n\end{pmatrix}$$ est la première colonne de A^n.

Q2 a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $(\{X_{n-1}=0\}, \{X_{n-1}=1\}, \{X_{n-1}=2\})$ est un système complet d'événements. Ainsi, la formule des probabilités totales donne :

$\forall i \in [\![0,2]\!]$, $P(X_n=i) = P(X_{n-1}=0)P_{\{X_{n-1}=0\}}(X_n=i) + P(X_{n-1}=1)P_{\{X_{n-1}=1\}}(X_n=i) + P(X_{n-1}=2)P_{\{X_{n-1}=2\}}(X_n=i)$.

Les données indiquent que : $\forall i \in \{0,1,2\}$, $P_{\{X_{n-1}=0\}}(X_n=i) = \begin{cases} p & \text{si } i=0\\ q & \text{si } i=1\\ 0 & \text{si } i=2\end{cases}$.

$\forall i \in \{0,1,2\}$, $P_{\{X_{n-1}=1\}}(X_n=i) = \begin{cases} \frac{q}{2} & \text{si } i=0\\ p & \text{si } i=1\\ \frac{q}{2} & \text{si } i=2\end{cases}$.

$\forall i \in \{0,1,2\}$, $P_{\{X_{n-1}=2\}}(X_n=i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i=2\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.

Alors $\forall i \in \{0,1,2\}$, $P(X_n=i) = \begin{cases} p\,P(X_{n-1}=0) + \frac{q}{2}P(X_{n-1}=1) & \text{si } i=0\\ q\,P(X_{n-1}=0) + p\,P(X_{n-1}=1) & \text{si } i=1\\ \frac{q}{2}P(X_{n-1}=1) + P(X_{n-1}=2) & \text{si } i=2\end{cases}$

Alors $\begin{pmatrix} P(X_n=0) \\ P(X_n=1) \\ P(X_n=2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & \frac{q}{2} & 0 \\ q & p & 0 \\ 0 & \frac{q}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(X_{n-1}=0) \\ P(X_{n-1}=1) \\ P(X_{n-1}=2) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} P(X_{n-1}=0) \\ P(X_{n-1}=1) \\ P(X_{n-1}=2) \end{pmatrix}$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}^*$

b) Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} P(X_n=0) \\ P(X_n=1) \\ P(X_n=2) \end{pmatrix} \overset{\odot}{=} A^n \begin{pmatrix} P(X_0=0) \\ P(X_0=1) \\ P(X_0=1) \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors d'après 1]

$\odot$ Encore une récurrence simple.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} P(X_n=0) = \frac{1}{2}\left(p+\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^n + \frac{1}{2}\left(p-\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^n \\ P(X_n=1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(p+\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(p-\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^n \\ P(X_n=2) = 1 - \frac{1+\sqrt{2}}{2}\left(p+\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^n + \frac{\sqrt{2}-1}{2}\left(p-\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^n \end{cases}$

Q3 a) $0 < p+\frac{q}{\sqrt{2}} < p+q = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(p+\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^n = 0$. ou $\frac{q}{\sqrt{2}} - p < \frac{q}{\sqrt{2}} < q < 1$!!

$p - \frac{q}{\sqrt{2}} < p < 1$. $\frac{q}{\sqrt{2}} - p = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(q+p-(1+\sqrt{2})p\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-(1+\sqrt{2})p\right) < \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$.

$p - \frac{q}{\sqrt{2}} < 1$ et $\frac{q}{\sqrt{2}} - p < 1$ donnent $\left|p - \frac{q}{\sqrt{2}}\right| < 1$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(p-\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^n = 0$.

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n=0) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n=0)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n=2) = 1$

Montrons alors qu'il est quasi-certain que l'abscisse du mobile M prenne la valeur 2. Soit S cet événement.

$\overline{S} = \bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} \{X_n \neq 2\}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\{X_{n+1} \neq 2\} \subset \{X_n \neq 2\}$.

donc le théorème de la limite monotone indique que $P(\overline{S}) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n \neq 2)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n \neq 2) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - P(X_n=2)\right) = 1-1 = 0$. Alors $P(\overline{S}) = 0$.

Ainsi $P(S) = 1$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n=2) = 1$ NE MONTRE PAS qu'il est quasi-certain que l'abscisse du mobile prenne la valeur 2.

b) Soit $n\in\mathbb{N}$. $1-P(X_n=2)=\frac{1+\sqrt2}{2}\left(p+\frac{q}{\sqrt2}\right)^n+\frac{1-\sqrt2}{2}\left(p-\frac{q}{\sqrt2}\right)^n$.

$$1-P(X_n=2)=\left(p+\frac{q}{\sqrt2}\right)^n\left[\frac{1+\sqrt2}{2}+\frac{1-\sqrt2}{2}\left(\frac{p-\frac{q}{\sqrt2}}{p+\frac{q}{\sqrt2}}\right)^n\right].$$

$-p-\frac{q}{\sqrt2}<p-\frac{q}{\sqrt2}<p+\frac{q}{\sqrt2}$ donc $\left|p-\frac{q}{\sqrt2}\right|<\left|p+\frac{q}{\sqrt2}\right|=p+q/\sqrt2$.

Alors $\left|\frac{p-\frac{q}{\sqrt2}}{p+\frac{q}{\sqrt2}}\right|<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1+\sqrt2}{2}+\frac{1-\sqrt2}{2}\left(\frac{p-\frac{q}{\sqrt2}}{p+\frac{q}{\sqrt2}}\right)^n\right)=\frac{1+\sqrt2}{2}\neq0$

Alors $\frac{1+\sqrt2}{2}+\frac{1-\sqrt2}{2}\left(\frac{p-\frac{q}{\sqrt2}}{p+\frac{q}{\sqrt2}}\right)^n\sim\frac{1+\sqrt2}{2}$.

Ainsi $\underline{1-P(X_n=2)\sim\frac{1+\sqrt2}{2}\left(p+\frac{q}{\sqrt2}\right)^n}$.

Q4 a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\{T=n\}=\{X_0\neq2\}\cap\{X_1\neq2\}\cap\dots\cap\{X_{n-2}\neq2\}\cap\{X_{n-1}=1\}\cap\{X_n=2\}$.

Si $\{X_{n-1}=1\}$ est réalisé nécessairement $\{X_0\neq2\},\dots,\{X_{n-2}\neq2\}$ sont réalisés.

Ainsi $\underline{\{T=n\}=\{X_{n-1}=1\}\cap\{X_n=2\}}$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

b) $T(\Omega)=[\![2,+\infty[\![$.

$\forall n\in[\![2,+\infty[\![$, $P(T=n)=P(\{X_{n-1}=1\}\cap\{X_n=2\})=P(X_{n-1}=1)\,P_{\{X_{n-1}=1\}}(X_n=2)$.

$\forall n\in[\![2,+\infty[\![$, $P(T=n)=\left(\frac{1}{\sqrt2}\left(p+\frac{q}{\sqrt2}\right)^{n-1}-\frac{1}{\sqrt2}\left(p-\frac{q}{\sqrt2}\right)^{n-1}\right)\times\frac{q}{2}$.

$\forall n\in[\![2,+\infty[\![$, $P(T=n)=\frac{q}{2\sqrt2}\left[\left(p+\frac{q}{\sqrt2}\right)^{n-1}-\left(p-\frac{q}{\sqrt2}\right)^{n-1}\right]=\frac{q}{2\sqrt2}\left(p+\frac{q}{\sqrt2}\right)^{n-1}-\frac{q}{2\sqrt2}\left(p-\frac{q}{\sqrt2}\right)^{n-1}$

c) $\left|p+\frac{q}{\sqrt2}\right|<1$ et $\left|p-\frac{q}{\sqrt2}\right|<1$ Δ donc les séries de termes généraux $n\left(p+\frac{q}{\sqrt2}\right)^{n-1}$ et $n\left(p-\frac{q}{\sqrt2}\right)^{n-1}$ convergent.

(Δ prouvé en Q3 a))

Or $\forall n\in[\![2,+\infty[\![$, $nP(T=n)=\frac{q}{2\sqrt2}n\left(p+\frac{q}{\sqrt2}\right)^{n-1}-\frac{q}{2\sqrt2}n\left(p-\frac{q}{\sqrt2}\right)^{n-1}$ ... et aussi pour $n=1$.

La série de terme général $nP(T=n)$ converge comme combinaison linéaire de deux séries convergentes ; elle est même absolument convergente car elle est à termes positifs. Ainsi T possède une espérance et :

$$E(T) = \frac{q}{2\sqrt{2}} \sum_{n=2}^{+\infty} n\left(p+\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} - \frac{q}{2\sqrt{2}} \sum_{n=2}^{+\infty} n\left(p-\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}.$$

<u>mieux</u> $$E(T) = \frac{q}{2\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(p+\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} - \frac{q}{2\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(p-\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}!$$

Alors $$E(T) = \frac{q}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\left(1-p-\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^2} - \frac{q}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\left(1-p+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}.$$

$$E(T) = \frac{q}{2\sqrt{2}} \frac{1}{q^2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} - \frac{q}{2\sqrt{2}} \frac{1}{q^2\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$E(T) = \frac{1}{2\sqrt{2}q}\left[\frac{2}{(\sqrt{2}-1)^2} - \frac{2}{(\sqrt{2}+1)^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}q} \frac{(\sqrt{2}+1)^2-(\sqrt{2}-1)^2}{((\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1))^2} = \frac{1}{q\sqrt{2}}\left[2+2\sqrt{2}+1-2-1+2\sqrt{2}\right]$$

$$E(T) = \frac{4}{q}.$$

PARTIE III Loi de probabilité du vecteur aléatoire (X_n, Y_n) et de la distance parcourue

(Q1) <u>a)</u> • Les déplacements sont indépendants, la probabilité de faire un déplacement vers le haut est p.

• Si on n'a pas M passant au point de coordonnées $(0, n-2k)$ cela signifie que M a fait $n-2k$ déplacements vers le haut, k déplacements faisant passer l'abscisse de M de 0 à 1 (ce qui se produit avec la probabilité q) et k déplacements faisant passer l'abscisse de M de 1 à 0 (ce qui se produit avec la probabilité $\frac{q}{2}$)

La probabilité cherchée est donc $p^{n-2k} q^k \left(\frac{q}{2}\right)^k$. ou $p^{n-2k}\left(\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^{2k}$.

<u>b)</u> Pour aller de O au point de coordonnées $(0,y)$ il est nécessaire de faire un nombre k de déplacements faisant passer l'abscisse du point de 0 à 1, k déplacements faisant passer l'abscisse du point de 1 à 0 et y déplacements vers le haut. Si le tout se fait en n pas : $y+2k=n$ et ainsi $2k=n-y$. Alors $n-y$ est pair et positif.

<u>Si $n-y$ est impair ou strictement négatif le nombre de chemins cherché est 0.</u>

Supposons $n-y$ pair et positif ou nul. Notons que pour les chemins proposés le premier déplacement horizontal se fait sur la droite, le suivant sur la gauche et l'alternance se poursuit. Ainsi la connaissance des déplacements horizontaux détermine la connaissance des déplacements vers la droite, des déplacements vers la gauche et également des déplacements vers le haut.
Pour construire un tel chemin il suffit de choisir la place des $2k$ déplacements horizontaux parmi les n déplacements où $k=\frac{n-y}{2}$.
<u>Si $n-y$ est pair et positif le nombre de chemins cherché est $\binom{n}{n-y}$ ou $\binom{n}{y}$</u>

<u>c)</u> Soit $n\in\mathbb{N}$ et $y\in\mathbb{N}$. $\{X_n=0\}\cap\{Y_n=y\}$ se réalise si et seulement si, en n pas le point passe de O au point de coordonnées $(0,y)$.

Si $n-y$ est impair ou négatif $\{X_n=0\}\cap\{Y_n=y\}=\emptyset$ d'après b)

Supposons $n-y$ pair et positif. Il y a $\binom{n}{y}$ chemins permettant d'aller de O au point de coordonnées $(0,y)$ en n pas et Π réalise un tel chemin avec la probabilité $p^y\left(\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^{n-y}$ (d'après a)).

<u>Ainsi si $n-y$ est pair et positif : $P(\{X_n=0\}\cap\{Y_n=y\})=\binom{n}{y}p^y\left(\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^{n-y}$</u>

<u>Si $n-y$ est impair ou strictement négatif : $P(\{X_n=0\}\cap\{Y_n=y\})=0$</u>

(Q2) Un chemin faisant passer de O au point de coordonnées $(1, y)$ en n pas est constitué de - y déplacements vers le haut
- k déplacements horizontaux vers la droite et $k-1$ déplacements horizontaux vers la gauche avec $k+k-1+y=n$ ou $n-y=2k-1$.

Si un tel chemin existe $n-y$ est un élément impair de $\mathbb{N}$.

Ainsi si $n-y$ est pair ou strictement négatif : $P(\{X_n=1\}\cap\{Y_n=y\})=0$.

Supposons que $n-y$ impair et $n-y \geq 0$. $\exists k \in \mathbb{N}^*$, $n-y=2k-1$.

Un chemin allant de O au point de coordonnées $(1, y)$ en n pas est constitué de - y déplacements vers le haut
- k déplacements horizontaux vers la droite et $k-1$ déplacements horizontaux vers la gauche alternés. Le premier déplacement horizontal se faisant vers la droite.

Pour construire un tel chemin il suffit de choisir la place des déplacements vers le haut.

Il y a donc $\binom{n}{y}$ chemins de ce type.

Un chemin de ce type se réalise avec la probabilité $p^y\left(\frac{q}{2}\right)^{k-1} q^k = \sqrt{2}\, p^y \left(\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^{2k-1}$

ou $\sqrt{2}\, p^y \left(\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^{n-y}$.

Si $n-y$ est un élément impair de $\mathbb{N}$: $P(\{X_n=1\}\cap\{Y_n=y\}) = \binom{n}{y}\sqrt{2}\, p^y \left(\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^{n-y}$.

Résumons Q1 c) et Q2 de manière différente. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\forall k\in\mathbb{N},\ P(\{X_n=0\}\cap\{Y_n=n-2k\}) = \begin{cases} \binom{n}{n-2k} p^{n-2k}\left(\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^{2k} & \text{si } n-2k\geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\forall k\in\mathbb{N},\ P(\{X_n=0\}\cap\{Y_n=n-(2k+1)\})=0$

$$\forall k\in\mathbb{N},\ P(\{X_n=1\}\cap\{Y_n=n-(2k+1)\}) = \begin{cases} \binom{n}{n-2k-1}\sqrt{2}\, p^{n-2k-1}\left(\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^{2k+1} & \text{si } n-2k-1\geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$\forall k\in\mathbb{N},\ P(\{X_n=1\}\cap\{Y_n=n-2k\})=0$

(Q3) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $(\{Y_n = i\})_{i\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.

Alors $P(\{X_n = 0\}) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(\{X_n=0\} \cap \{Y_n = i\}) = \sum_{i=0}^{n} P(\{X_n=0\} \cap \{Y_n = i\})$.

↑ $P(\{X_n=0\} \cap \{Y_n=i\}) = 0$ si $i > n$

Alors $P(\{X_n=0\}) = \sum_{k=0}^{n} P(\{X_n=0\} \cap \{Y_n = n-k\})$.

$$P(\{X_n=0\}) = \sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} P(\{X_n=0\} \cap \{Y_n = n-2k\}) + \underbrace{\sum_{k=0}^{E(\frac{n-1}{2})} P(\{X_n=0\} \cap \{Y_n = n-2k-1\})}_{=0}.$$

Ainsi $P(X_n=0) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n}{n-2k} p^{n-2k} \left(\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n}{2k} p^{n-2k} \left(\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^{2k}$.

▼ Lemme.. Si $n \in \mathbb{N}$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$: $\sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} a^{n-2k} b^{2k} = \frac{(a+b)^n + (a-b)^n}{2}$

Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \binom{n}{2k+1} a^{n-2k-1} b^{2k+1} = \frac{(a+b)^n - (a-b)^n}{2}$

démonstration du lemme.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \underbrace{\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n}{2k} a^{n-2k} b^{2k}}_{S} + \underbrace{\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \binom{n}{2k+1} a^{n-2k-1} b^{2k+1}}_{T}$.

$(a+b)^n = S + T$.

$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} (-1)^k b^k = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n}{2k} a^{n-2k} b^{2k} - \sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \binom{n}{2k+1} a^{n-2k-1} b^{2k+1} = S - T$

$(a-b)^n = S - T$

Alors $(a+b)^n + (a-b)^n = 2S$ et $(a+b)^n - (a-b)^n = 2T$; $S = \frac{(a+b)^n + (a-b)^n}{2}$ et

$T = \frac{(a+b)^n - (a-b)^n}{2}$. Si $n = 0$ $S = 1 = \frac{(a+b)^0 + (a-b)^0}{2}$.

▲ ceci achève la démonstration du lemme.

Alors $P(X_n=0) = \frac{\left(p + \frac{q}{\sqrt{2}}\right)^n - \left(p - \frac{q}{\sqrt{2}}\right)^n}{2}$; c'est le résultat de P2 Q 2b)

c) On a de même $P(X_n=1) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(\{X_n=1\} \cap \{Y_n=i\}) = \sum_{i=0}^{n} P(\{X_n=1\} \cap \{Y_n=i\}) = \sum_{k=0}^{n} P(\{X_n=1\} \cap \{Y_n = n-k\})$

Supposons $n \geq 1$ $\quad P(X_n=1) = \underbrace{\sum_{k=0}^{[n/2]} P(\{X_n=1\}\cap\{Y_n=n-2k\})}_{=0} + \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} P(\{X_n=1\}\cap\{Y_n=n-(2k+1)\})$

Alors $P(X_n=1) = \sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \binom{n}{n-2k-1} \sqrt{2}\, p^{n-2k-1} \left(\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^{2k+1} = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \binom{n}{2k+1} p^{n-2k-1} \left(\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^{2k+1}$

D'après le lemme $\quad P(X_n=1) = \sqrt{2}\, \dfrac{\left(p+\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^n - \left(p-\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^n}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(p+\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^n - \left(p-\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^n\right).$

Ce résultat vaut encore pour $n=0$ et confirme P2 Q2 b)

Q4 a) $D(\Omega)=\mathbb{N}$.

b) Soit m un élément de $\mathbb{N}$. $(\{T=k\})_{k\geq 2}$ est un système quasi-complet d'événements donc $\quad P(D=m) = \sum_{k=2}^{+\infty} P(\{D=m\}\cap\{T=k\})$.

$$P(D=m) = \sum_{k=2}^{+\infty} P(\{D=m\}\cap\{X_{k-1}=1\}\cap\{X_k=2\}) = \sum_{k=2}^{+\infty} P(\{Y_{k-1}=m\}\cap\{X_{k-1}=1\}\cap\{X_k=2\})$$

$$P(D=m) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(\{X_k=1\}\cap\{X_{k+1}=2\}\cap\{Y_k=m\}) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(\{X_k=1\}\cap\{X_{k+1}=2\}\cap\{Y_k=m\})$$

"$k \mapsto k+1$" $\qquad$ $\{X_k=1\}\cap\{X_{k+1}=2\}\cap\{Y_k=m\}=\emptyset$ si $k=0$.

$$\forall m\in\mathbb{N},\quad P(D=m) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(\{X_k=1\}\cap\{X_{k+1}=2\}\cap\{Y_k=m\}).$$

Soit $m\in\mathbb{N}$. Observons que $\forall k\in\mathbb{N}$, $\{Y_k=m\}=\emptyset$ si $k<m$.

$\forall k\in[\![m,+\infty[\![$, $P(\{X_k=1\}\cap\{X_{k+1}=2\}\cap\{Y_k=m\}) = P(\{X_k=1\}\cap\{Y_k=m\})\, P_{\{X_k=1\}\cap\{Y_k=m\}}(X_{k+1}=2)$

$\forall k\in[\![m,+\infty[\![$, $P(\{X_k=1\}\cap\{X_{k+1}=2\}\cap\{Y_k=m\}) = \frac{q}{2}\, P(\{X_k=1\}\cap\{Y_k=m\})$.

$\forall k\in[\![m,+\infty[\![$, $P(\{X_k=1\}\cap\{X_{k+1}=2\}\cap\{Y_k=m\}) = \frac{q}{2}\, P(\{X_k=1\}\cap\{Y_k=k-(k-m)\})$

Soit $\ell \in [\![n,+\infty[\![$.

Si $\ell-n$ est pair $P(\{X_\ell=1\}\cap\{Y_\ell=\ell-(\ell-n)\})=0$.

Si $\ell-n$ est impair, c'est à dire s'il existe i dans $\mathbb{N}$ tel que $\ell-n=2i+1$ alors

$$P(\{X_\ell=1\}\cap\{Y_\ell=\ell-(\ell-n)\})=\binom{\ell}{\ell-2i-1}\sqrt{2}\,p^{\ell-2i-1}\left(\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^{2i+1}=\binom{\ell}{2i+1}\sqrt{2}\,p^{\ell-2i-1}\left(\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^{2i+1}.$$

Finalement $P(D=n)=\frac{q}{2}\sum_{\ell=n}^{+\infty}P(\{X_\ell=1\}\cap\{Y_\ell=\ell-(\ell-n)\})$ donne encore :

$$P(D=n)=\frac{q}{2}\sum_{i=0}^{+\infty}\binom{n+2i+1}{2i+1}\sqrt{2}\,p^{n}\left(\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^{2i+1}\quad(*)$$

$$P(D=n)=\frac{q}{2}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{(n+2i+1)!}{n!\,(2i+1)!}\sqrt{2}\,p^{n}\,\frac{(q^2)^i\,q}{2^i\sqrt{2}}$$

$$P(D=n)=\frac{p^n}{n!}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{(n+2i+1)!}{(2i+1)!}\left(\frac{q^2}{2}\right)^{i+1}$$ ... on peut encore écrire :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad P(D=n)=\frac{p^n}{n!}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(n+1+2k)!}{(1+2k)!}\left(\frac{q^2}{2}\right)^{1+k}.$$

d) Le tout en un pour le même prix ! Soit $n\in\mathbb{N}$.

Rappelons que $\forall r\in\mathbb{N}, \forall x\in]-1,1[, \sum_{n=r}^{+\infty}\binom{n}{r}x^{n-r}=\frac{1}{(1-x)^{r+1}}$. Ce qui s'écrit

encore $\forall r\in\mathbb{N}, \forall x\in]-1,1[, \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+r}{r}x^{n}=\frac{1}{(1-x)^{r+1}}$.

Soit $r\in\mathbb{N}$. et soit $x\in]-1,1[$. $-x\in]-1,1[$.

$$\text{Alors}\quad \frac{1}{(1-x)^{r+1}}-\frac{1}{(1+x)^{r+1}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+r}{r}\underbrace{(x^n-(-1)^n x^n)}_{\substack{=0 \text{ si } n \text{ est pair}\\ 2x^n \text{ si } n \text{ est impair}}}=\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{2k+1+r}{r}2x^{2k+1}!$$

Alors $\sum_{i=0}^{+\infty} \binom{2i+1+r}{r} x^{2i+1} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1-x)^{r+1}} - \frac{1}{(1+x)^{r+1}}\right]$

Reprenons n dans $\mathbb{N}$ et $P(D=n)$ sous la forme $(*)$

$$P(D=n) = \frac{q}{2}\sum_{i=0}^{+\infty}\binom{n+2i+1}{2i+1}\sqrt{2}\,p^n(q/\sqrt{2})^{2i+1} = \frac{q\,p^n}{\sqrt{2}}\sum_{i=0}^{+\infty}\binom{m+2i+1}{m}\left(\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^{2i+1}$$

Ainsi $P(D=m) = \dfrac{q\,p^m}{2\sqrt{2}}\left[\dfrac{1}{\left(1-\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^{m+1}} - \dfrac{1}{\left(1+\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^{m+1}}\right].$

Ainsi $P(D=0) = \dfrac{q}{2\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{1-\frac{q}{\sqrt{2}}} - \dfrac{1}{1+\frac{q}{\sqrt{2}}}\right) = \dfrac{q}{2\sqrt{2}}\;\dfrac{1+\frac{q}{\sqrt{2}}-1+\frac{q}{\sqrt{2}}}{1-\frac{q^2}{2}} = \dfrac{q}{2\sqrt{2}}\;\dfrac{2\times\frac{2q}{\sqrt{2}}}{2-q^2}$

$$P(D=0) = \frac{q^2}{2-q^2}.$$

$P(D=1) = \dfrac{qp}{2\sqrt{2}}\left[\dfrac{\left(1+\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(1-\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^2}{\left(1-\frac{q^2}{2}\right)^2}\right] = \dfrac{qp}{2\sqrt{2}}\;\dfrac{4\left(1+\frac{q^2}{2}+\frac{2q}{\sqrt{2}}-1-\frac{q^2}{2}+\frac{2q}{\sqrt{2}}\right)}{(2-q^2)^2}$

$P(D=1) = \dfrac{qp}{2\sqrt{2}}\times\dfrac{4q}{\sqrt{2}}\times\dfrac{4}{(2-q^2)^2} = \dfrac{4q^2p}{(2-q^2)^2}.$ $\quad P(D=1) = \dfrac{4q^2p}{(2-q^2)^2}.$

$P(D=2) = \dfrac{qp^2}{2\sqrt{2}}\;\dfrac{\left(1+\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^3 - \left(1-\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^3}{\left(1-\frac{q^2}{2}\right)^3} = \dfrac{qp^2}{2\sqrt{2}}\dfrac{8}{(2-q^2)^3}\left[1+3\frac{q}{\sqrt{2}}+3\frac{q^2}{2}+\frac{q^3}{2\sqrt{2}}-1+3\frac{q}{\sqrt{2}}-3\frac{q^2}{2}+\frac{q^3}{2\sqrt{2}}\right]$

$P(D=2) = \dfrac{4qp^2}{\sqrt{2}(2-q^2)^3}\left[6\dfrac{q}{\sqrt{2}}+\dfrac{q^3}{\sqrt{2}}\right] = \dfrac{4qp^2}{2(2-q^2)^3}(6q+q^3)$. $P(D=2) = 2\dfrac{q^2p^2(6+q^2)}{(2-q^2)^3}.$

$\forall m\in\mathbb{N},\ m\,P(D=m) = \dfrac{qp}{2\sqrt{2}}\;\dfrac{1}{\left(1-\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^2}\,m\left(\dfrac{p}{1-\frac{q}{\sqrt{2}}}\right)^{m-1} - \dfrac{qp}{2\sqrt{2}}\;\dfrac{1}{\left(1+\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^2}\,m\left(\dfrac{p}{1+\frac{q}{\sqrt{2}}}\right)^{m-1}$

$0 < 1-q < 1-\frac{q}{\sqrt{2}}$ donc $0 < \frac{1-q}{1-\frac{q}{\sqrt{2}}} < 1$. Ainsi $\left|\frac{p}{1-\frac{q}{\sqrt{2}}}\right| < 1$.

$0 < 1-q < 1-\frac{q}{\sqrt{2}} < 1+\frac{q}{\sqrt{2}}$ donc $0 < \frac{1-q}{1+\frac{q}{\sqrt{2}}} < 1$. Ainsi $\left|\frac{p}{1+\frac{q}{\sqrt{2}}}\right| < 1$.

Alors les séries de termes généraux $n\left(\frac{p}{1-\frac{q}{\sqrt{2}}}\right)^{n-1}$ et $n\left(\frac{p}{1+\frac{q}{\sqrt{2}}}\right)^{n-1}$ convergent

La série de terme général $nP(D=n)$ est alors convergente comme combinaison linéaire de séries convergentes. Elle est même absolument convergente car à termes positifs. Ainsi $E(D)$ existe. De plus

$$E(D) = \sum_{n=0}^{+\infty} nP(D=n) = \frac{qp}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\left(1-\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^2} \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{p}{1-\frac{q}{\sqrt{2}}}\right)^{n-1} - \frac{qp}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\left(1+\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^2} \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{p}{1+\frac{q}{\sqrt{2}}}\right)^{n-1}$$

$$E(D) = \frac{qp}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\left(1-\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^2} \frac{1}{\left(1-\frac{p}{1-\frac{q}{\sqrt{2}}}\right)^2} - \frac{qp}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\left(1+\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^2} \frac{1}{\left(1-\frac{p}{1+\frac{q}{\sqrt{2}}}\right)^2}$$

$$E(D) = \frac{qp}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\left(1-\frac{q}{\sqrt{2}}-p\right)^2} - \frac{qp}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\left(1+\frac{q}{\sqrt{2}}-p\right)^2} = \frac{qp}{2\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\left(q-\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^2} - \frac{1}{\left(q+\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^2}\right]$$

$$E(D) = \frac{qp}{2\sqrt{2}\,q^2}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} - \frac{1}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\right] = \frac{p}{2\sqrt{2}\,q} \frac{\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}.$$

$$E(D) = \frac{4p}{2\sqrt{2}\,q}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{2}{\sqrt{2}}-1-\frac{1}{2}+\frac{2}{\sqrt{2}}\right] = \frac{4p}{2\sqrt{2}\,q}\,\frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4p}{q}.$$

$$\underline{\underline{E(D) = \frac{4p}{q}.}}$$