Exercice 1

Q1 a) et b) $(x,y)\to x-y$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car elle est polynômiale et $t\mapsto e^t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$; ainsi par composition : $(x,y)\to e^{x-y}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

$(x,y)\to x^n-y$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car elle est polynômiale.

Donc f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ comme produit de deux fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f_n}{\partial x}(x,y) = n x^{n-1} e^{x-y} + (x^n-y)\times 1\times e^{x-y}$ et $\frac{\partial f_n}{\partial y}(x,y) = -1 e^{x-y} + (x^n-y)(-1)e^{x-y}$

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f_n}{\partial x}(x,y) = (n x^{n-1}+x^n-y)e^{x-y}$ et $\frac{\partial f_n}{\partial y}(x,y) = -(x^n-y+1)e^{x-y}$.

$(x,y)\to e^{x-y}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et $(x,y)\to n x^{n-1}+x^n-y$ (resp. $(x,y)\to -(x^n-y+1)$) aussi car c'est une fonction polynômiale. Ainsi $\frac{\partial f_n}{\partial x}$ (resp $\frac{\partial f_n}{\partial y}$) est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ comme produit de deux fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Ceci achève de montrer que f_n est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

Q2 a) $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f_2(x,y) = (x^2-y)e^{x-y}$, $\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = (2x+x^2-y)e^{x-y}$ et $\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = -(x^2-y+1)e^{x-y}$

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = 0 \iff \begin{cases} 2x+x^2-y=0 \\ x^2-y+1=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x^2+1 \\ 0 = 2x+x^2-x^2-1 = 2x-1 \end{cases} \iff x=\frac{1}{2} \text{ et } y=\frac{5}{4}.$$

$(\frac{1}{2},\frac{5}{4})$ est l'unique point de $\mathbb{R}^2$ vérifiant " les conditions nécessaires " d'extremum.

En clair $(\frac{1}{2},\frac{5}{4})$ est l'unique point critique de f_2.

b) $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}(x,y) = (2+2x+2x+x^2-y)e^{x-y} = (2+4x+x^2-y)e^{x-y}$; $r = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}(\frac{1}{2},\frac{5}{4}) = 3e^{-3/4}$

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}(x,y) = (+1+x^2-y+1)e^{x-y} = (2+x^2-y)e^{x-y}$; $t = \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}(\frac{1}{2},\frac{5}{4}) = e^{-3/4}$

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x\partial y}(x,y) = (-2x-x^2+y-1)e^{x-y} = (y-(x+1)^2)e^{x-y}$; $s = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x\partial y}(\frac{1}{2},\frac{5}{4}) = -e^{-3/4}$

$s^2-rt = [(-1)^2-3\times 1]e^{-3/2} = -2e^{-3/2} < 0$ et $r>0$. ou $rt-s^2 = 2e^{-3/2} > 0$ et $r>0$!

f_2 admet en $(\frac{1}{2},\frac{5}{4})$ un minimum local strict.

(Q3) a] $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f_1(x,y)=(x-y)e^{x-y}$, $\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y)=(1+x-y)e^{x-y}$ et $\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)=(y-x-1)e^{x-y}$.

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)=0 \iff y=x+1$.

$\mathcal{C}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=x+1\}$ est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ où le gradient de f_1 s'annule.

Soit $A=(x_0,y_0)\in\mathcal{C}$. $f(x_0,y_0)=(x_0-y_0)e^{x_0-y_0}=-e^{-1}$

Remarquons que : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f_1(x,y)=\underline{(x-y)}e^{(x-y)}$

Posons $\forall t\in\mathbb{R}$, $\varphi(t)=te^t$

φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t\in\mathbb{R}$, $\varphi'(t)=e^t+te^t=(t+1)e^t$. $\forall t\in\,]-1,+\infty[$, $\varphi'(t)>0$; $\varphi'(-1)=0$;

$\forall t\in\,]-\infty,-1[$, $\varphi'(t)<0$.

Tout cela suffit pour dire que φ est strictement croissante (resp. décroissante) sur $[-1,+\infty[$ (resp. $]-\infty,-1]$).

Ainsi $\forall t\in\,]-1,+\infty[$, $\varphi(t)>\varphi(-1)=-e^{-1}$ et $\forall t\in\,]-\infty,-1[$, $\varphi(t)>\varphi(-1)=-e^{-1}$

Ainsi : $\forall t\in\mathbb{R}-\{-1\}$, $\varphi(t)>-e^{-1}$ et $\varphi(-1)=-e^{-1}$.

Donc $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $x-y\neq -1 \Rightarrow f_1(x,y)>-e^{-1}$

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $x-y=-1 \Rightarrow f_1(x,y)=-e^{-1}$.

Ceci permet d'affirmer que
1.- f_1 possède un minimum sur $\mathbb{R}^2$
2.- le minimum est $-e^{-1}$
3.- le minimum est atteint en (x_0,y_0) si et seulement si

$$y_0=x_0+1$$

<u>Complément</u>.- Notons que f_2 admet un minimum global en $A=(\frac{1}{2},\frac{5}{4})$. Soit $H=(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

$f_2(A+H)-f_2(A)=((\frac{1}{2}+\alpha)^2-(\beta+\frac{5}{4}))e^{\frac{1}{2}+\alpha-\beta-\frac{5}{4}}-(\frac{1}{4}-\frac{5}{4})e^{\frac{1}{2}-\frac{5}{4}}=(\alpha^2+1+\alpha-\beta-\frac{5}{4})e^{\alpha-\beta-\frac{3}{4}}+e^{-\frac{3}{4}}$

$f_2(A+H)-f_2(A)=e^{\alpha-\beta-\frac{3}{4}}(\alpha^2+\alpha-\beta-1+e^{\beta-\alpha})$. Or $\forall t\in\mathbb{R}$, $e^t\geqslant 1+t$ (inégalité de convexité). Ainsi $f_2(A+H)-f_2(A)\geqslant e^{\alpha-\beta-\frac{3}{4}}(\alpha^2+\alpha-\beta-1+1+\beta-\alpha)=\alpha^2e^{\alpha-\beta-\frac{3}{4}}\geqslant 0$.

Ainsi $\forall H\in\mathbb{R}^2$, $f_2(A+H)-f_2(A)\geqslant 0$. <u>$f_2$ admet en $A=(\frac{1}{2},\frac{5}{4})$ un minimum absolu.</u>

Exercice 2

Q1 Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

$$MX=X \Leftrightarrow \begin{cases} x=x\\ -x+4y+z-2t=y\\ 2x+y+2z-t=z\\ x+2y+z=t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-x+3y+z-2t=0\\ 2x+y+z-t=0\\ x+2y+z-t=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 & (L_3-L_2)\\ 5y+2z-3t=0 & (L_1+L_3)\\ x+2y+z-t=0 & L_3\end{cases}$$

$$MX=X \Leftrightarrow \begin{cases} y=x\\ 5y+2z-3t=0\\ 3y+z-t=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x\\ y+t=0 & 2L_3-L_2\\ z=t-3y\end{cases} . \quad MX=X \Leftrightarrow \begin{cases} y=x\\ t=-y=-x\\ z=-x-3x=-4x\end{cases}$$

Ainsi $\{X\in\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid MX=X\}=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-4\\-1\end{pmatrix}\right)$.

1 est valeur propre de M et $SEP(M,1)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-4\\-1\end{pmatrix}\right)$.

$$MX=2X \Leftrightarrow \begin{cases} x=2x\\ -x+4y+z-2t=2y\\ 2x+y+2z-t=2z\\ x+2y+z=2t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0\\ 2y+z-2t=0\\ y=t\\ 2y+z-2t=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0\\ t=y\\ z=0\\ 0=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=z=0\\ y=t\end{cases}$$

2 est valeur propre de M et $SEP(M,2)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

Cherchons l'ensemble des valeurs propres de M. 1 et 2 sont des valeurs propres de M. Prenons donc λ dans $\mathbb{R}-\{1,2\}$ et cherchons une réduite de Gauss de $M-\lambda I$ avec "le pivot".

$$M-\lambda I=\begin{pmatrix}1-\lambda&0&0&0\\-1&4-\lambda&1&-2\\2&1&2-\lambda&-1\\1&2&1&-\lambda\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&4-\lambda&1&-2\\2&1&2-\lambda&-1\\1&2&1&-\lambda\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&4-\lambda&1&-2\\0&1&2-\lambda&-1\\0&2&1&-\lambda\end{pmatrix}$$

$L_1\leftarrow\frac{1}{1-\lambda}L_1\ (\lambda\neq1)$ $\qquad L_2\leftarrow L_2+L_1\ ;\ L_3\leftarrow L_3-2L_1\ ;\ L_4\leftarrow L_4-L_1$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&1&-\lambda\\0&1&2-\lambda&-1\\0&4-\lambda&1&-2\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&1&-\lambda\\0&0&3-2\lambda&-2+\lambda\\0&0&\lambda-2&-(\lambda-2)^2\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&1&-\lambda\\0&0&3-2\lambda&\lambda-2\\0&0&1&-(\lambda-2)\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&1&-\lambda\\0&0&1&-(\lambda-2)\\0&0&3-2\lambda&\lambda-2\end{pmatrix}$$

$L_4\leftrightarrow L_2$ $\qquad L_3\leftarrow 2L_3-L_2\ ;\ L_4\leftarrow 2L_4-(4-\lambda)L_2$ $\qquad L_4\leftarrow\frac{1}{\lambda-2}L_4$ $\qquad L_4\leftrightarrow L_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1 & -(\lambda-2) \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-2+(3-2\lambda)(\lambda-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1 & -(\lambda-2) \\ 0 & 0 & 0 & -2(\lambda-2)^2 \end{pmatrix}$$

$L_4 \leftarrow L_4 - (3-2\lambda)L_3$

Comme λ n'est pas 2 cette dernière matrice est inversible.

Ainsi si λ est distinct de 1 et 2, $M - \lambda I$ est inversible.

Par conséquent 1 et 2 sont les seules valeurs propres de M.

Comme $\dim SEP(M,1) + \dim SEP(M,2) = 1+1 = 2 \neq 4$: M n'est pas diagonalisable.

Remarque.. M n'est ni diagonalisable dans $\mathbb{R}$ ni diagonalisable dans $\mathbb{C}$!

Q2) $MM' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ c'_1 & a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ c'_2 & a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ c'_3 & a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 + \sum_{k=1}^3 a_{1k}c'_k & \sum_{k=1}^3 a_{1k}a'_{k1} & \sum_{k=1}^3 a_{1k}a'_{k2} & \sum_{k=1}^3 a_{1k}a'_{k3} \\ c_2 + \sum_{k=1}^3 a_{2k}c'_k & \sum_{k=1}^3 a_{2k}a'_{k1} & \sum_{k=1}^3 a_{2k}a'_{k2} & \sum_{k=1}^3 a_{2k}a'_{k3} \\ c_3 + \sum_{k=1}^3 a_{3k}c'_k & \sum_{k=1}^3 a_{3k}a'_{k1} & \sum_{k=1}^3 a_{3k}a'_{k2} & \sum_{k=1}^3 a_{3k}a'_{k3} \end{pmatrix}$

définie par $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ et $C' = \begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ c'_3 \end{pmatrix}$

Or $C'' = C + AC' = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^3 a_{1k}c'_k \\ \sum_{k=1}^3 a_{2k}c'_k \\ \sum_{k=1}^3 a_{3k}c'_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + \sum_{k=1}^3 a_{1k}c'_k \\ c_2 + \sum_{k=1}^3 a_{2k}c'_k \\ c_3 + \sum_{k=1}^3 a_{3k}c'_k \end{pmatrix}$

et $AA' = \left(\sum_{k=1}^3 a_{ik}a'_{kj} \right)$

D'où $MM' = \begin{pmatrix} 1 & O \\ C'' & AA' \end{pmatrix}$ avec $O = (0\ 0\ 0)$ et $C'' = C + AC'$

Q3) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists U_n \in M_{3,1}(\mathbb{R}), M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U_n & V^n \end{pmatrix}$

C'est clair pour $n=1$ (prendre $U_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$).

Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$.

$$M^{n+1} = M^n M = \begin{pmatrix}1 & 0\\ U_n & V^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ U_1 & V\end{pmatrix} \underset{Q1}{=} \begin{pmatrix}1 & 0\\ U_n + V^n U_1 & V^n V\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ U_n + V^n U_1 & V^{n+1}\end{pmatrix}$$

Posons $U_{n+1} = U_n + V^n U_1$.

$U_{n+1} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ et $M^{n+1} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ U_{n+1} & V^{n+1}\end{pmatrix}$; ceci achève la récurrence.

Remarques 1.. En posant $U_0 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ on a aussi $M^0 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ U_0 & V^0\end{pmatrix}$

2.. <u>Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un unique élément U_n de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $M^n = \begin{pmatrix}1 & 0\\ U_n & V^n\end{pmatrix}$</u>

Q4 $W = \begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}$; $W^2 = \begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$

$W^3 = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

Ainsi <u>$W^2 = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$ et $\forall n \in [\![3, +\infty[\![$, $W^n = 0$.</u>

$V = W + 2I$ et W et $2I$ commutent par conséquent :

$$V^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k W^k (2I)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} 2^{n-k} C_n^k W^k$$

Supposons $n \geq 2$. $V^n = \sum_{k=0}^{2} 2^{n-k} C_n^k W^k = 2^n I + 2^{n-1} n W + \frac{n(n-1)}{2} 2^{n-2} W^2$ car $W^k = 0$ pour $k > 2$.

$V^n = 2^n I + n 2^{n-1} W + n(n-1) 2^{n-3} W^2$. Notons que ceci vaut encore pour $n = 0$ et $n = 1$.

<u>$\forall n \in \mathbb{N}$, $V^n = 2^n I + n 2^{n-1} W + n(n-1) 2^{n-3} W^2$</u>

$$\forall n \in \mathbb{N},\ V^n = \begin{pmatrix}2^n & 0 & 0\\ 0 & 2^n & 0\\ 0 & 0 & 2^n\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2n2^{n-1} & n2^{n-1} & -2n2^{n-1}\\ n2^{n-1} & 0 & -n2^{n-1}\\ 2n2^{n-1} & n2^{n-1} & -2n2^{n-1}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}n(n-1)2^{n-3} & 0 & -n(n-1)2^{n-3}\\ 0 & 0 & 0\\ n(n-1)2^{n-3} & 0 & -n(n-1)2^{n-3}\end{pmatrix}$$

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad V^n = \begin{pmatrix} (n+1)2^n + n(n-1)2^{n-3} & n2^{n-1} & -n2^n - n(n-1)2^{n-3} \\ n2^{n-1} & 2^n & -n2^{n-1} \\ n2^n + n(n-1)2^{n-3} & n2^{n-1} & (-n+1)2^n - n(n-1)2^{n-3} \end{pmatrix}$$

Q5 a) $SEP(M,1) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-4\\-1\end{pmatrix}\right)$ ainsi $\underline{X = \begin{pmatrix}1\\1\\-4\\-1\end{pmatrix}}$

$MX = X$ et une récurrence évidente donne $\forall n\in\mathbb{N},\ M^nX = X$.

b) Posons $T = \begin{pmatrix}1\\-4\\-1\end{pmatrix}$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\begin{pmatrix}1\\T\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-4\\-1\end{pmatrix} = X = M^nX = \begin{pmatrix}1 & 0\\ U_n & V^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\T\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ U_n + V^nT\end{pmatrix}$$

multiplication calculée par bloc !

Donc $T = U_n + V^nT$; $U_n = T - V^nT$. Ainsi

$$a_n = 1 - \left[(n+1)2^n + n(n-1)2^{n-3} - 4n2^{n-1} + n2^n + n(n-1)2^{n-3}\right] = 1 - 2^n - n(n-1)2^{n-2}$$

$$b_n = -4 - \left[n2^{n-1} - 4\times 2^n + n2^{n-1}\right] = -4 + 2^{n+2} - n2^n$$

$$c_n = -1 - \left[n2^n + n(n-1)2^{n-3} - 4n2^{n-1} - (-n+1)2^n + n(n-1)2^{n-3}\right] = -1 + 2^n - n(n-1)2^{n-2}$$

$$\forall n\in\mathbb{N}^{(*)},\quad \begin{cases} a_n = 1 - 2^n - n(n-1)2^{n-2} \\ b_n = -4 + 2^{n+2} - n2^n \\ c_n = -1 + 2^n - n(n-1)2^{n-2} \end{cases}$$

PARTIE I Répartion des revenus dans une population donnée

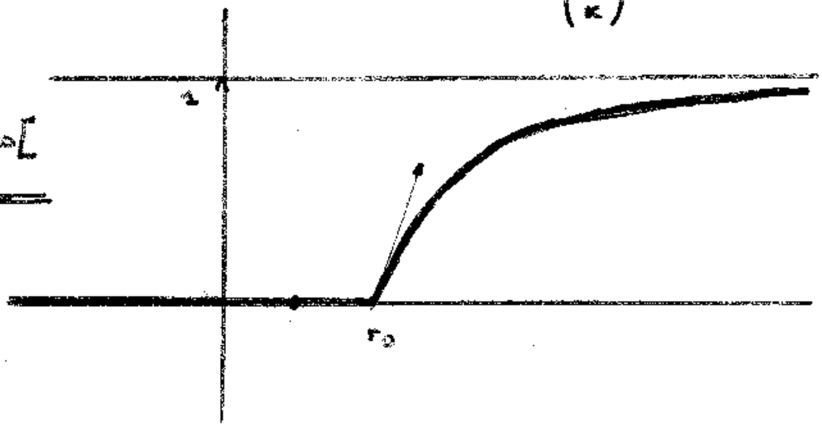
(Q1) a] $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.

Si $x \in]-\infty, r_0[$, $F(x) = 0$

Si $x \in [r_0, +\infty[$, $F(x) = \int_{r_0}^{x} \frac{\alpha}{r_0}\left(\frac{r_0}{t}\right)^{\alpha+1} dt = \alpha r_0^{\alpha} \int_{r_0}^{x} t^{-\alpha-1} dt = \alpha r_0^{\alpha}\left[-\frac{t^{-\alpha}}{\alpha}\right]_{r_0}^{x} = \alpha r_0^{\alpha}\left[-\frac{x^{-\alpha}}{\alpha} + \frac{r_0^{-\alpha}}{\alpha}\right]$

$= 1 - \left(\frac{r_0}{x}\right)^{\alpha}$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, r_0[\\ 1 - \left(\frac{r_0}{x}\right)^{\alpha} & \text{si } x \in [r_0, +\infty[\end{cases}$$



b] Il s'agit de trouver $E(X)$.

Notons que $\int_{-\infty}^{r_0} t f(t)\,dt$ existe et vaut 0.

Soit $A \in [r_0, +\infty[$. $\int_{r_0}^{A} t f(t)\,dt = \alpha r_0^{\alpha} \int_{r_0}^{A} t^{-\alpha} dt = \alpha r_0^{\alpha}\left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_{r_0}^{A} = \alpha r_0^{\alpha}\left[\frac{A^{-\alpha+1} - r_0^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right]$

$\int_{r_0}^{A} t f(t)\,dt = \frac{\alpha r_0^{\alpha}}{1-\alpha} \times \frac{1}{A^{\alpha-1}} + \frac{\alpha r_0}{\alpha - 1}$. $\lim_{A \to +\infty} A^{\alpha-1} = +\infty$ car $\alpha > 1$; $\lim_{A \to +\infty} \frac{1}{A^{\alpha-1}} = 0$

Par conséquent $\int_{r_0}^{+\infty} t f(t)\,dt$ existe et vaut $\frac{\alpha r_0}{\alpha - 1}$.

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt$ existe et vaut $\frac{\alpha r_0}{\alpha - 1}$.

Le revenu moyen d'un individu de la population est $\frac{\alpha r_0}{\alpha - 1}$

(Q2) a] Soit X_i la variable aléatoire représentant le revenu du $i^{\text{ème}}$ individu de la population.

$\Pi = \sum_{i=1}^{N} X_i$!! D'autres diraient peut être que $\Pi = N \times \frac{\alpha r_0}{\alpha - 1}$ ...

b) Soit A l'événement "un individu pris au hasard dans la population a un revenu au moins égal à r". $p(A) = \frac{N(r)}{N}$.

Pour tout $i \in [\![1,N]\!]$ notons B_i l'événement "on choisit en tirant au hasard dans la population le $i^{ème}$ individu." $(B_i)_{i\in[\![1,N]\!]}$ est un système complet d'événements.

$$p(A) = \sum_{i=1}^{N} p(A \cap A_i) = \sum_{i=1}^{N} p(A/A_i)\,p(A_i) = \sum_{i=1}^{N} p(X_i \geq r) \times \frac{1}{N} = \sum_{i=1}^{N}(1-p(X_i < r))\frac{1}{N}$$

$$p(A) = \sum_{i=1}^{N} (1-F(r))\,\frac{1}{N} = N(1-F(r))\,\frac{1}{N} = 1-F(r).$$

Ainsi $\frac{N(r)}{N} = 1-F(r)$ ou : $\underline{\underline{N(r) = [1-F(r)]N.}}$

Finalement $N(r) = \begin{cases} N & \text{si } r < r_0 \\ \left(1-\left(1-\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\alpha}\right)\right) & \text{si } r \geq r_0 \end{cases}$ $\quad N(r) = \begin{cases} N & \text{si } r < r_0 \\ \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\alpha} & \text{si } r \geq r_0 \end{cases}$

(Q3) $\quad Xu = X'u' = X'\lambda u$; $\underline{\underline{X' = \frac{1}{\lambda} X}}$

Une densité de X' est alors $g : x \mapsto \frac{1}{|1/\lambda|} f\left(\frac{x-0}{1/\lambda}\right)$

$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \lambda f(\lambda x)$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda x < r_0 \\ \frac{\lambda\alpha}{r_0}\left(\frac{r_0}{\lambda x}\right)^{\alpha+1} & \text{si } \lambda x \geq r_0 \end{cases}$; $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{r_0}{\lambda} \\ \frac{\alpha}{r_0/\lambda}\left(\frac{r_0/\lambda}{x}\right)^{\alpha+1} \end{cases}$.

Ainsi X' suit une loi de Pareto de paramètres α, $\frac{r_0}{\lambda}$ et 0.

Partie II : Etude d'un modèle d'imposition par tranches

(Q1) $\tau_0 = \frac{1}{2}(1-e^{-b\times 0}) = 0$.

Le taux d'imposition de la première tranche est nulle.

b) Si $r \in [0,1[$, $I(r) = r\tau_0 = 0$. Supposons que $r \in [1,+\infty[$. Posons $n = E(r)$.

$r \in [n,n+1[= [q_n, q_{n+1}[$ donc $I(r) = q_1\tau_0 + \sum_{k=1}^{n-1}(q_{k+1}-q_k)\tau_k + (r-q_n)\tau_n$.

$$I(r) = \sum_{k=1}^{n-1}(k+1-k)\tau_k + (r-n)\tau_n = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1-e^{-bk}}{2} + (r-n)\frac{1-e^{-nb}}{2}.$$

$$I(r) = \frac{n-1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(e^{-b})^k + (r-n)\frac{1-e^{-nb}}{2} = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(e^{-b})^k + \frac{r-n}{2}(1-e^{-nb}).$$

$$I(r) = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{1-e^{-nb}}{1-e^{-b}} + \frac{r}{2} - \frac{n}{2} - \frac{r-n}{2}e^{-nb} = \frac{1}{2}\left[r - \frac{1-e^{-nb}}{1-e^{-b}} - (r-n)e^{-nb}\right]$$

$$I(r) = \frac{1}{2}\left[r - \frac{1-e^{-nb}}{1-e^{-b}} - (r-n)e^{-nb}\right]$$ ... pour $r \geq 1$ et même pour $r \in [0,1[$ car dans ce cas $n = 0$ et on retrouve bien $I(r) = 0$.

(V1) utilise le calcul précédent.

```
program ECRICOME_99;
var n:integer;r,b:real;

begin
write('Donnez la valeur de b. b=');readln(b);
write('Donnez la valeur du revenu r. r=');readln(r);
n:=trunc(r);writeln;
if n=0 then writeln('I(',r,')=0')
else writeln('I(',r,')=',0.5*(r-(1-exp(-n*b))/(1-exp(-b))-(r-n)*exp(-n*b)));

end.
```

(V2) n'utilise pas le calcul précédent

```
program ECRICOME_99;
var n,i:integer;r,b,s:real;
begin
write('Donnez la valeur de b. b=');readln(b);
write('Donnez la valeur du revenu r. r=');readln(r);
n:=trunc(r);writeln;s:=0;
for i:=1 to n-1 do s:=s+0.5*(1-exp(-i*b));
s:=s+(r-n)*0.5*(1-exp(-n*b));writeln('I(',r,')=',s);
end.
```

(Q2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\tau_n = \frac{1}{2}(1-e^{-bn})$, $\lim_{n\to+\infty}\tau_n = \frac{1}{2}$. $\frac{\tau_n}{n(n+1)} \sim \frac{1/2}{n^2} = \frac{1}{2n^2}$.

La série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est convergente et à termes positifs, les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent donc que la série de terme général $\frac{\tau_n}{n(n+1)}$ converge.

$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \tau_n \int_{q_n}^{q_{n+1}} N(r)\,dr = \tau_n \int_n^{n+1} N(r)\,dr$

$I_0 = 0$ car $\tau_0 = 0$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = \frac{1}{2}(1-e^{-bn}) \int_n^{n+1} \frac{N}{r^2}\,dr = \frac{1}{2}(1-e^{-bn}) \left[-\frac{N}{r}\right]_n^{n+1}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = \tau_n \left[-\frac{N}{n+1} + \frac{N}{n}\right] = N \frac{\tau_n}{n(n+1)}$.

$I = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n$ a alors un sens. $I = 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{N\tau_n}{n(n+1)} = N \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tau_n}{n(n+1)}$

$$\underline{\underline{I = N \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tau_n}{n(n+1)}}}.$$

Q3 a) soit $p \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{n=1}^{p} \frac{\tau_n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{p} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-bn}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{p}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{p}\frac{e^{-bn}}{n} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{p}\frac{e^{-bn}}{n+1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{p+1}\right) - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{p}\frac{(e^{-b})^n}{n} + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{p+1}\frac{e^{-b(n-1)}}{n}.$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{p+1}\right) - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{p}\frac{(e^{-b})^n}{n} + \frac{e^b}{2}\left(\sum_{n=1}^{p+1}\frac{(e^{-b})^n}{n} - e^{-b}\right).$$

$e^{-b} \in]0,1[$ donc $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(e^{-b})^n}{n} = -\ln(1-e^{-b})$.

Ainsi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tau_n}{n(n+1)} = \frac{1}{2}(1-0) - \frac{1}{2}(-\ln(1-e^{-b})) + \frac{e^b}{2}(-\ln(1-e^{-b}) - e^{-b})$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tau_n}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln(1-e^{-b}) - \frac{e^b}{2}\ln(1-e^{-b}) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1-e^b)\ln(1-e^{-b}).$$

Finalement $\underline{\underline{I(b) = \frac{N}{2}(1-e^b)\ln(1-e^{-b})}}$.

b) $b \mapsto (1-e^{-b})$ est dérivable sur $]0,+\infty[$, $\forall b\in]0,+\infty[$, $1-e^{-b}>0$ et $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$b\mapsto \ln(1-e^{-b})$ est alors dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$; $b\mapsto \frac{N}{2}(1-e^{b})$ l'est également.

Ainsi I est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

I est continue et dérivable sur $]0,+\infty[$.

c) $\forall b\in]0,+\infty[$, $I(b) = \frac{N}{2} e^{b} (e^{-b}-1)\ln(1-e^{-b}) = -\frac{N}{2} e^{b}(1-e^{-b})\ln(1-e^{-b})$.

$\lim\limits_{b\to 0}(1-e^{-b})=0$ donc $\lim\limits_{b\to 0}\left((1-e^{-b})\ln(1-e^{-b})\right)=0$ car $\lim\limits_{X\to 0} X\ln X=0$.

Ainsi $\lim\limits_{b\to 0} I(b) = -\frac{N}{2}\times 1\times 0 = 0$. $\lim\limits_{b\to 0} I(b)=0$.

$I(b) \underset{b\to+\infty}{\sim} \frac{N}{2}(1-e^{b})(-e^{-b})$ car $\lim\limits_{b\to+\infty} e^{-b}=0$ et $\ln(1+t)\underset{t\to 0}{\sim} t$

$I(b)\underset{b\to+\infty}{\sim} \frac{N}{2}(1-e^{-b})$; $\lim\limits_{b\to+\infty} I(b)=\frac{N}{2}$.

d) $\forall b\in]0,+\infty[$, $I'(b) = \frac{N}{2}(-e^{b})\ln(1-e^{-b}) + \frac{N}{2}(1-e^{b})\,\frac{-(-e^{-b})}{1-e^{-b}}$

$\forall b\in]0,+\infty[$, $I'(b) = \frac{N}{2}(-e^{b})\ln(1-e^{-b}) + \frac{N}{2}(1-e^{b})\,\frac{1}{e^{b}-1}$

$\forall b\in]0,+\infty[$, $I'(b) = -\frac{N}{2}e^{b}\left[\ln(1-e^{-b})+e^{-b}\right]$.

ln : $\forall t\in\mathbb{R}_+^*$, $\ln t\le t-1$; mieux : $\forall t\in\mathbb{R}_+^*-\{1\}$, $\ln t< t-1$.

$\forall b\in\mathbb{R}_+^*$, $1-e^{-b}\in]0,1[$. $\forall b\in\mathbb{R}_+^*$, $\ln(1-e^{-b})<1-e^{-b}-1=-e^{-b}$.

$\forall b\in]0,+\infty[$, $\ln(1-e^{-b})+e^{-b}<0$.

Ainsi $\forall b\in]0,+\infty[$, $I'(b)>0$. I est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

b	0		$+\infty$
$I'(b)$	$\Vert$	$+$	
$I(b)$	$\Vert\ 0$	$\nearrow$	$N/2$

(Q4) I est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0,+\infty[$. I définit une bijection de l'intervalle $]0,+\infty[$ sur l'intervalle de $]\lim_{b\to 0} I(b), \lim_{b\to+\infty} I(b)[$

I définit une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]0,\frac{N}{2}[$.

$\frac{1}{10}\Pi = \frac{1}{5}N \in]0,\frac{N}{2}[$

L'état peut prélever par l'impôt direct $\frac{1}{10}$ du montant total des revenus de la population en prenant $b = I^{-1}(\frac{1}{5}N)$.

$\frac{1}{3}\Pi = \frac{2}{3}N \notin]0,\frac{N}{2}[$. L'état ne peut pas prélever $\frac{1}{3}$ des revenus... par l'impôt direct.

Partie III Etude d'un modèle d'imposition continu

(Q1) τ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ ($r \mapsto e^{-br}$ est strictement décroissante), $\tau(0)=0$ et $\lim_{r\to+\infty} \tau(r) = 1/2$.

r	0		$+\infty$
τ	0	$\nearrow$	$1/2$

(Q2) a) $r \mapsto \frac{e^{-br}}{r^2}$ est continue sur $[1,+\infty[$ et $\forall r\in[1,+\infty[$, $0 \le \frac{e^{-br}}{r^2} \le e^{-br}$

$\forall A\in[1,+\infty[$, $\int_1^A e^{-br}\,dr = \left[\frac{e^{-br}}{-b}\right]_1^A = \frac{1}{b}(e^{-b}-e^{-bA})$.

$\lim_{A\to+\infty}\int_1^A e^{-br}\,dr = \frac{e^{-b}}{b}$. Ainsi $\int_1^{+\infty} e^{-br}\,dr$ converge.

Les règles de comparaison des intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors la convergence de $\int_1^{+\infty}\frac{e^{-br}}{r^2}\,dr$.

$\int_1^{+\infty}\frac{e^{-br}}{r^2}\,dr$ converge.

On pouvait aussi utiliser : $\forall r\in[1,+\infty[$, $\frac{e^{-br}}{r^2} \le \frac{e^{-b}}{r^2}$!!

(Q2) b) Soit $A \in [1, +\infty[$.

$$\int_0^A N(r)\pi(r)dr = \int_0^1 N\ \frac{1-e^{-br}}{2}dr + \int_1^A \frac{N}{r^2}\ \frac{1-e^{-br}}{2}dr$$

$$\int_0^A N(r)\pi(r)dr = \frac{N}{2}\left[r + \frac{e^{-br}}{b}\right]_0^1 + \frac{N}{2}\left[-\frac{1}{r}\right]_1^A - \frac{N}{2}\int_1^A \frac{e^{-br}}{r^2}dr$$

$$\int_0^A N(r)\pi(r)dr = \frac{N}{2}\left[1 + \frac{e^{-b}}{b} - \frac{1}{b} - \frac{1}{A} + 1 - \int_1^A \frac{e^{-br}}{r^2}dr\right]$$

$$\lim_{A\to+\infty} \frac{N}{2}\left[1 + \frac{e^{-b}}{b} - \frac{1}{b} - \frac{1}{A} + 1 - \int_1^A \frac{e^{-br}}{r^2}dr\right] = \frac{N}{2}\left[2 + \frac{e^{-b}-1}{b} - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-br}}{r^2}dr\right]$$

Ainsi $J(b)$ existe et vaut $\underline{\frac{N}{2}\left[2 + \frac{e^{-b}-1}{b} - \int_1^{+\infty}\frac{e^{-br}}{r^2}dr\right]}$

c) Soit $(b,b') \in {\mathbb{R}_+^*}^2$ tel que $b < b'$.

$\forall r \in [0,+\infty[,\ -br \geq -b'r$; $\forall r \in [0,+\infty[,\ e^{-br} \geq e^{-b'r}$

$\forall r \in [0,+\infty[,\ \frac{1}{2}(1-e^{-br}) \leq \frac{1}{2}(1-e^{-b'r})$;

$\forall r \in [0,+\infty[,\ \frac{1}{2}(1-e^{-br})N(r) \leq \frac{1}{2}(1-e^{-b'r})N(r)$ $(N(r) \geq 0)$

Donc $J(b) = \int_0^{+\infty} N(r)\frac{1-e^{-br}}{2}dr \leq \int_0^{+\infty} N(r)\frac{1-e^{-b'r}}{2}dr = J(b')$.

$\forall (b,b') \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $b < b' \Rightarrow J(b) \leq J(b')$. $\underline{J \text{ est croissante sur }]0,+\infty[.}$

<u>Remarque</u>.. En fait J est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

(Q3) a) Soit $b \in \mathbb{R}_+^*$. $\forall r \in [1,+\infty[$, $\frac{e^{-br}}{r^2} \leq e^{-b} \times \frac{1}{r^2}$

$\int_1^{+\infty}\frac{dr}{r^2}$ existe et vaut 1. $\left(\lim_{A\to+\infty}\left[-\frac{1}{r}\right]_1^A = 1\right)$.

Donc $\int_1^{+\infty}\frac{e^{-br}}{r^2}dr \leq e^{-b}\int_1^{+\infty}\frac{dr}{r^2} = e^{-b}$. $\underline{\forall b \in \mathbb{R}_+^*,\ \varphi(b) \leq e^{-b}}$.

Rap : $\forall b \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \leq \varphi(b) \leq e^{-b}$ $\left(\forall b \in \mathbb{R}_+^*, \forall r \in [1,+\infty[, \frac{e^{-br}}{r^2} \geq 0\right)$.

Par encadrement il vient $\underline{\lim_{b\to+\infty}\varphi(b) = 0}$.

b) Soit $A \in \mathbb{R}$ tel que $A > 1$. $\forall r \in [A, +\infty[$, $\frac{e^{-br}}{r^2} \geq 0$; $\int_A^{+\infty} \frac{e^{-br}}{r^2} dr \geq 0$.
Soit $b \in \mathbb{R}_+^*$

Donc $\int_1^A \frac{e^{-br}}{r^2} dr \leq \int_1^A \frac{e^{-br}}{r^2} dr + \int_A^{+\infty} \frac{e^{-br}}{r^2} dr = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-br}}{r^2} dr$.

Ainsi $1 \geq e^{-b} \geq \varphi(b) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-br}}{r^2} dr \geq \int_1^A \frac{e^{-br}}{r^2} dr \underset{\substack{\uparrow \\ e^{-br} \geq e^{-bA},\ \forall r \in [1,A]}}{\geq} e^{-bA} \int_1^A \frac{1}{r^2} dr = e^{-bA}\left(1 - \frac{1}{A}\right)$

donc $1 \geq \varphi(b) \geq e^{-bA} - \frac{e^{-bA}}{A} \geq e^{-bA} - \frac{1}{A}$ $\quad (-e^{-bA} \geq -1)$

donc $\forall b \in \mathbb{R}_+^*, \forall A \in]1, +\infty[, \; e^{-bA} - \frac{1}{A} \leq \varphi(b) \leq 1$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $A = \max\left(\frac{3}{2}, E\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) + 1\right)$

Alors : $A > 1$ et $A = E\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) + 1 > \frac{2}{\varepsilon}$ donc $A > 1$ et $\frac{1}{A} < \frac{\varepsilon}{2}$.

$\lim_{b \mapsto 0} (e^{-bA}) = 1$; $\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall b \in \mathbb{R}, |b| < \eta \Rightarrow |e^{-bA} - 1| < \varepsilon/2$

En particulier : $\forall b \in]0, \eta[, \; 1 - e^{-bA} \leq |e^{-bA} - 1| < \varepsilon/2$

$\forall b \in]0, \eta[, \; 1 - \frac{\varepsilon}{2} < e^{-bA}$ or $-\frac{\varepsilon}{2} < -\frac{1}{A}$

donc $\forall b \in]0, \eta[, \; 1 - \varepsilon < e^{-bA} - \frac{1}{A}$

$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall b \in]0, \eta[, \; 1 - \varepsilon < e^{-bA} - \frac{1}{A}$.

$\forall b \in]0, \eta[, \quad 1 - \varepsilon < e^{-bA} - \frac{1}{A} \leq \varphi(b) \leq 1 < 1 + \varepsilon$

$\forall b \in]0, \eta[, -\varepsilon < \varphi(b) - 1 < \varepsilon$. $\forall b \in]0, \eta[, \; |\varphi(b) - 1| < \varepsilon$.

Ainsi $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall b \in]0, \eta[, \; |\varphi(b) - 1| < \varepsilon$

donc $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall b \in \mathbb{R}_+^*, |b - 0| < \eta \Rightarrow |\varphi(b) - 1| < \varepsilon$

donc $\lim_{b \mapsto 0} \varphi(b) = 1$.

c) Soit $b\in\mathbb{R}_+^*$. Soit h un réel tel que $b+h\in\mathbb{R}_+^*$.

$$\varphi(b+h)-\varphi(b)=\int_1^{+\infty}\frac{e^{-(b+h)r}}{r^2}\,dr-\int_1^{+\infty}\frac{e^{-br}}{r^2}\,dr=\int_1^{+\infty}e^{-br}\frac{(e^{-hr}-1)}{r^2}\,dr$$

$\rho : u\mapsto e^u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée continue sur $\mathbb{R}$.

L'inégalité de Taylor Lagrange permet alors d'écrire que :

$$\forall u\in\mathbb{R},\ |\rho(u)-\rho(0)|\leq |u|\ \underset{t\in[0,u]}{\mathrm{Max}}|\rho'(t)|=|u|\ \underset{t\in[0,u]}{\mathrm{Max}}\,e^t\leq |u|\,e^{|u|}$$

$\underset{t\in[0,u]}{\mathrm{Max}}\,e^t=e^u=e^{|u|}$ si $u\geq 0$

$\underset{t\in[0,u]}{\mathrm{Max}}\,e^t=1\leq e^{|u|}$ si $u\leq 0$

Donc $\forall u\in\mathbb{R},\ |e^u-1|\leq |u|\,e^{|u|}$.

Supposons que $h\in\mathbb{R}$ et $|h|<\frac{b}{2}$.

$$\forall r\in\mathbb{R}_+^*,\ |e^{-hr}-1|\leq |-hr|\,e^{|-hr|}=|h|\,r\,e^{|h|r}\leq |h|\,r\,e^{\frac{b}{2}r}$$

$$\forall r\in\mathbb{R}_+^*,\ |e^{-hr}-1|\leq |h|\,r\,e^{\frac{b}{2}r}$$

Ainsi $\forall r\in[1,+\infty[,\ \left|\frac{e^{-br}(e^{-hr}-1)}{r^2}\right|\leq \frac{e^{-br}}{r^2}|h|\,r\,e^{\frac{b}{2}r}=\frac{|h|}{r}e^{-\frac{b}{2}r}\leq |h|\,e^{-\frac{b}{2}r}$

$$\forall A\in[1,+\infty[,\ \int_1^A e^{-\frac{b}{2}r}\,dr=\left[\frac{e^{-b/2\,r}}{-b/2}\right]_1^A=\frac{2}{b}\left[e^{-\frac{b}{2}}-e^{-\frac{b}{2}A}\right]$$

Ainsi $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_1^A e^{-\frac{b}{2}r}\,dr=\frac{2}{b}e^{-\frac{b}{2}}$; $\int_1^{+\infty}e^{-\frac{b}{2}r}\,dr$ converge et vaut $\frac{2}{b}e^{-\frac{b}{2}}$.

Les règles de comparaison des intégrales généralisées de fonctions positives montrent que :

alors que : 1) $\int_1^{+\infty}\left|\frac{e^{-br}(e^{-hr}-1)}{r^2}\right|dr$ converge

2) $\int_1^{+\infty}\left|\frac{e^{-br}(e^{-hr}-1)}{r^2}\right|dr\leq |h|\int_1^{+\infty}e^{-\frac{b}{2}r}\,dr=|h|\frac{2}{b}e^{-\frac{b}{2}}$.

Alors $\int_1^{+\infty}\frac{e^{-br}(e^{-hr}-1)}{r^2}\,dr$ est absolument convergente ; on peut alors écrire que :

$$|\varphi(b+h)-\varphi(b)|=\left|\int_1^{+\infty}e^{-br}\frac{(e^{-hr}-1)}{r^2}\,dr\right|\leq\int_1^{+\infty}\left|\frac{e^{-br}(e^{-hr}-1)}{r^2}\right|dr\leq |h|\frac{2}{b}e^{-b/2}$$

Posons $K_b=\frac{2}{b}e^{-b/2}$.

Ainsi on a : $\forall h \in \mathbb{R}$, $|h| < \frac{b}{2} \Rightarrow |\varphi(b+h) - \varphi(b)| \leq K_b |h|$ avec $K_b = \frac{2}{b} e^{-b/2}$

Il vient alors par encadrement : $\lim_{h \to 0} (\varphi(b+h) - \varphi(b)) = 0$ donc $\lim_{h \to 0} \varphi(b+h) = \varphi(b)$.

Ainsi φ est continue en b et ceci pour tout $b \in \mathbb{R}_+^*$.

(Q4) a) $\forall b \in]0, +\infty[$, $J(b) = \frac{N}{2}\left[2 + \frac{e^{-b} - 1}{b} - \varphi(b)\right]$

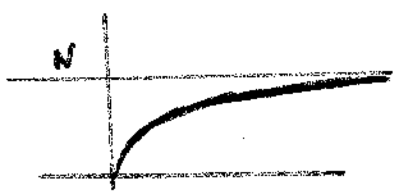
$b \mapsto \frac{e^{-b}-1}{b}$ et φ étant continues sur $\mathbb{R}_+^*$, J est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) $\lim_{b \to 0} \varphi(b) = 1$. $\frac{e^{-b}-1}{b} \underset{b \to 0}{\sim} \frac{-b}{b} = -1$ donc $\lim_{b \to 0} \frac{e^{-b}-1}{b} = -1$.

Ainsi $\lim_{b \to 0} J(b) = \frac{N}{2}[2 - 1 - 1] = 0$; $\lim_{b \to 0} J(b) = 0$.

$\lim_{b \to +\infty} \left(\frac{e^{-b}-1}{b}\right) = \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{1}{be^b} - \frac{1}{b}\right) = 0$ et $\lim_{b \to +\infty} \varphi(b) = 0$.

Donc $\lim_{b \to +\infty} J(b) = \frac{N}{2}[2 + 0 - 0] = N$. $\lim_{b \to +\infty} J(b) = N$.

c) 

(Q5) J est continue sur $]0, +\infty[$, strictement croissante, $\lim_{b \to 0} J(b) = 0$ et $\lim_{b \to +\infty} J(b) = N$

J définit alors une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]0, N[$.

$\frac{2N}{10} = \frac{N}{5} \in]0, N[$. L'état peut prélever par l'impôt direct $1/10$ des revenus.

$\frac{2N}{3} \in]0, N[$. " " " " $1/3$ des revenus.