Exercice 1

Q1 a) $Z_n(\Omega)=\{-1,1\}$ donc $a_n+b_n=p(Z_n=-1)+p(Z_n=1)=1$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ a_n+b_n=1$.

b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $Z_{n+1}=Z_n X_{n+1}$, remarquons encore que Z_n et X_{n+1} sont indépendantes car $Z_n=\prod_{i=1}^{n} X_i$ et $(X_1,X_2,\dots,X_n,X_{n+1})$ est une famille de variables aléatoires indépendantes.

Ainsi : $p(Z_{n+1}=-1)=p\left(\left(\{Z_n=-1\}\cap\{X_{n+1}=1\}\right)\cup\left(\{Z_n=1\}\cap\{X_{n+1}=-1\}\right)\right)$

Par incompatibilité et indépendance il vient alors :

$a_{n+1}=p(Z_{n+1}=-1)=p(Z_n=-1)p(X_{n+1}=1)+p(Z_n=1)p(X_{n+1}=-1)$

$a_{n+1}=a_n(1-p)+b_n p=(1-p)a_n+p\,b_n$

De même :

$b_{n+1}=p(Z_{n+1}=1)=p\left(\left(\{Z_n=-1\}\cap\{X_{n+1}=-1\}\right)\cup\left(\{Z_n=1\}\cap\{X_{n+1}=1\}\right)\right)$

$b_{n+1}=p(Z_n=-1)p(X_{n+1}=-1)+p(Z_n=1)p(X_{n+1}=1)=a_n p+b_n(1-p)=p\,a_n+(1-p)b_n$

Donc $\begin{pmatrix}a_{n+1}\\ b_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1-p)a_n+p\,b_n\\ p\,a_n+(1-p)b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-p & p\\ p & 1-p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}$.

Ainsi : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\begin{pmatrix}a_{n+1}\\ b_{n+1}\end{pmatrix}=\mathcal{G}\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}$ où $\mathcal{G}=\begin{pmatrix}1-p & p\\ p & 1-p\end{pmatrix}$.

Q2 a) On doit (!) montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \exists!\, p_n\in]0,1[,\ \mathcal{G}^n=\begin{pmatrix}1-p_n & p_n\\ p_n & 1-p_n\end{pmatrix}$.

Montrons l'existence par récurrence.

→ C'est clair pour $n=1$ en posant $p_1=p$ et en rappelant que : $0<p<1$.

→ Supposons que, pour n dans $\mathbb{N}^*$, il existe p_n dans $]0,1[$ tel que $\mathcal{G}^n=\begin{pmatrix}1-p_n & p_n\\ p_n & 1-p_n\end{pmatrix}$.

Montrons que ceci vaut encore pour $n+1$.

$\mathcal{G}^{n+1}=\mathcal{G}^n\mathcal{G}=\begin{pmatrix}1-p_n & p_n\\ p_n & 1-p_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-p & p\\ p & 1-p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1-p_n)(1-p)+p_n p & (1-p_n)p+p_n(1-p)\\ p_n(1-p)+(1-p_n)p & p_n p+(1-p_n)(1-p)\end{pmatrix}$

$$Q^{n+1}=\begin{pmatrix}1-p_n-p+2pp_n & p_n+p-2pp_n\\ p_n+p-2pp_n & 1-p_n-p+2pp_n\end{pmatrix}$$

Il suffit de poser $p_{n+1}=p_n+p-2pp_n$; $Q^{n+1}=\begin{pmatrix}1-p_{n+1} & p_{n+1}\\ p_{n+1} & 1-p_{n+1}\end{pmatrix}$.

Vérifions que $p_{n+1}\in]0,1[$.

$0<p_n<1$ et $1-p>0$ donc $0<p_n(1-p)<1-p$;

$0<1-p_n<1$ et $p>0$ donc $0<(1-p_n)p<p$;

En ajoutant il vient : $0<p_n(1-p)+(1-p_n)p<1-p+p$, c'est à dire :

$0<p_n+p-2pp_n<1$ c'est à dire $0<p_{n+1}<1$. Ainsi s'achève la récurrence.

$\forall n\in\mathbb{N}^*, \exists\, p_n\in]0,1[,\ Q^n=\begin{pmatrix}1-p_n & p_n\\ p_n & 1-p_n\end{pmatrix}$.

L'unicité est claire ; en effet soit $n\in\mathbb{N}^*$. Supposons que

$Q^n=\begin{pmatrix}1-p_n & p_n\\ p_n & 1-p_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\hat{p}_n & \hat{p}_n\\ \hat{p}_n & 1-\hat{p}_n\end{pmatrix}$ avec $p_n\in]0,1[$ et $\hat{p}_n\in]0,1[$

clairement : $p_n=\hat{p}_n$.

Ainsi : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \exists!\, p_n\in]0,1[,\ Q^n=\begin{pmatrix}1-p_n & p_n\\ p_n & 1-p_n\end{pmatrix}$.

---

b) Ce qui précède a montré que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ p_{n+1}=(1-2p)p_n+p$

$(p_n)_{n\geq 1}$ est une suite arithmético-géométrique.

Notons que $\forall x\in\mathbb{R}$: $x=(1-2p)x+p \iff x=\frac{1}{2}$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $p_{n+1}-\frac{1}{2}=(1-2p)p_n+p-(1-2p)\times\frac{1}{2}+p=(1-2p)(p_n-\frac{1}{2})$.

$(p_n-\frac{1}{2})_{n\geq 1}$ est géométrique de raison $1-2p$ et de premier terme $p_1-\frac{1}{2}=p-\frac{1}{2}$.

Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $p_n-\frac{1}{2}=(1-2p)^{n-1}(p-\frac{1}{2})$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = (1-2p)^{n-1}\left(p-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}.$$

c) $p \in]0,1[$, donc $-1 < 2p-1 < 1$; $|2p-1| < 1$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \left((1-2p)^{n-1}\right) = 0$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \frac{1}{2}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = Q^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p_{n-1} & p_{n-1} \\ p_{n-1} & 1-p_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ 1-p \end{pmatrix}$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = (1-p_{n-1})p + p_{n-1}(1-p)$ et $b_n = p_{n-1}p + (1-p_{n-1})(1-p)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} p_{n-1} = \frac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = (1-\frac{1}{2})p + \frac{1}{2}(1-p) = \frac{1}{2}$ et

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{1}{2}p + (1-\frac{1}{2})(1-p) = \frac{1}{2}.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} p(Z_n = -1) = \lim\limits_{n\to+\infty} p(Z_n = 1) = \frac{1}{2}$.

Ainsi la suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.

Q3) $Z_1 = X_1$ et $Z_2 = X_1 X_2$

Supposons Z_1 et Z_2 indépendantes.

$p(\{Z_1=1\}\cap\{Z_2=1\}) = p(Z_1=1)p(Z_2=1)$

$p(\{X_1=1\}\cap\{X_1X_2=1\}) = b_1 b_2 = (1-p)\left[p\times p + (1-p)(1-p)\right]$

$\hookrightarrow p(\{X_1=1\}\cap\{X_2=1\}) = (1-p)(p^2+1-2p+p^2) = (1-p)(2p^2-2p+1)$

Comme X_1 et X_2 sont indépendantes :

$(1-p)^2 = p(X_1=1)p(X_2=1) = (1-p)(2p^2-2p+1)$; $p \in]0,1[$ donc $1-p = 2p^2-2p+1$.

Ainsi $0 = 2p^2 - p = p(2p-1)$. donc $p = 1/2$.

Réciproquement supposons $p=1/2$. $a_1=b_1=\frac{1}{2}$. $\begin{pmatrix}a_2\\b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\1/2 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{a_1+b_1}{2}\\\frac{a_1+b_1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}$

Donc $a_1=b_1=a_2=b_2=1/2$. Rappelons que $Z_2=X_1X_2$

$p(\{Z_1=1\}\cap\{Z_2=1\})=p(\{X_1=1\}\cap\{X_2=1\})=p(X_1=1)p(X_2=1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=p(Z_1=1)p(Z_2=1)$.

$p(\{Z_1=1\}\cap\{Z_2=-1\})=p(\{X_1=1\}\cap\{X_2=-1\})=p(X_1=1)p(X_2=-1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=p(Z_1=1)p(Z_2=-1)$

On montre de la même manière que : $p(\{Z_1=-1\}\cap\{Z_2=1\})=p(Z_1=-1)p(Z_2=1)$ et

$p(\{Z_1=-1\}\cap\{Z_2=-1\})=p(Z_1=-1)p(Z_2=-1)$. Ainsi Z_1 et Z_2 sont indépendantes

Finalement <u>Z_1 et Z_2 sont indépendantes si et seulement si $p=1/2$.</u>

Remarque. On pouvait se contenter de montrer que $p(\{Z_1=1\}\cap\{Z_2=1\})=p(Z_1=1)p(Z_2=1)\Leftrightarrow p=\frac{1}{2}$ ...

On pouvait aussi remarquer que $Q=\begin{pmatrix}p(Z_2=-1/Z_1=-1) & p(Z_2=-1/Z_1=1)\\ p(Z_2=1/Z_1=-1) & p(Z_2=1/Z_1=1)\end{pmatrix}$

On suppose que $p=1/2$. <u>$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $a_n=b_n=1/2$.</u> (d'après la formule de Q2 <u>b</u>)

Rappelons que $\forall i\in\mathbb{N}^*$, $Z_{i+1}=Z_iX_{i+1}$ ou $X_{i+1}=\frac{Z_{i+1}}{Z_i}$ et que $Z_1=X_1$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^n$

$p(Z_1=\varepsilon_1,Z_2=\varepsilon_2,\dots,Z_n=\varepsilon_n)=p\left(X_1=\varepsilon_1,X_2=\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1},X_3=\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2},\dots,X_n=\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}}\right)$

Par indépendance mutuelle :

$p(Z_1=\varepsilon_1,Z_2=\varepsilon_2,\dots,Z_n=\varepsilon_n)=p(X_1=\varepsilon_1)p\left(X_2=\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)\dots p\left(X_n=\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}}\right)$. Remarquons que :

$\varepsilon_1\in\{-1,1\}$, $\varepsilon_2/\varepsilon_1\in\{-1,1\}$, ..., $\varepsilon_n/\varepsilon_{n-1}\in\{-1,1\}$.

Ainsi <u>$p(Z_1=\varepsilon_1,Z_2=\varepsilon_2,\dots,Z_n=\varepsilon_n)=\frac{1}{2^n}$.</u>

Notons que, pour $i\in[\![1,n]\!]$, $p(Z_i=\varepsilon_i)=\frac{1}{2}$

Ainsi si $p=\frac{1}{2}$: $\forall(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^n$, $p(Z_1=\varepsilon_1,Z_2=\varepsilon_2,\dots,Z_n=\varepsilon_n)=p(Z_1=\varepsilon_1)p(Z_2=\varepsilon_2)\dots p(Z_n=\varepsilon_n)$.

donc, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $(Z_1,Z_2,\dots,Z_n)$ sont indépendantes.

Si $p=\frac{1}{2}$, <u>$(Z_n)_{n\geq1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes.</u>

Recap <u>$(Z_n)_{n\geq1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes si et seulement si $p=\frac{1}{2}$.</u>

EXERCICE 2

Q1) Soit $f \in E$. Notons φ_f une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $\int_x^{x+1} f(t)\,dt$ [existe] puisque f est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[x, x+1]$.

Par conséquent F est définie sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \varphi_f(x+1) - \varphi_f(x)$.

φ_f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\varphi'_f = f$; par une composition banale, $x \mapsto \varphi_f(x+1)$ est alors dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée $x \mapsto \varphi'_f(x+1)$. Par soustraction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \varphi'_f(x+1) - \varphi'_f(x) = f(x+1) - f(x)$, en particulier F est continue sur $\mathbb{R}$.

Finalement <u>1°.. F est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.</u>

<u>2°.. $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x+1) - f(x)$.</u>

Q2) a) $f : x \mapsto \sin(2\pi x)$. Notons que f est continue sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \int_x^{x+1} \sin(2\pi t)\,dt = -\frac{1}{2\pi}\left[\cos(2\pi t)\right]_x^{x+1} = -\frac{1}{2\pi}\left[\cos(2\pi(x+1)) - \cos(2\pi x)\right]$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = -\frac{1}{2\pi}\left[\cos(2\pi x + 2\pi) - \cos(2\pi x)\right] = 0.$$

<u>Si $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(2\pi x)$ alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,dt = 0$.</u>

b) $\forall x \in \,]-\infty, 1[$, $f(x) = 1 - x$ et $\forall x \in [1, +\infty[$, $f(x) = \sqrt{x-1}$. Ainsi :

$\forall x \in \,]-\infty, 1]$, $f(x) = 1 - x$ et $\forall x \in [1, +\infty[$, $f(x) = \sqrt{x-1}$.

Ainsi f est continue sur $]-\infty, 1]$ et sur $[1, +\infty[$ car $x \mapsto 1 - x$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \sqrt{x-1}$ est continue sur $[1, +\infty[$.

Donc f est continue en tout point de $]-\infty, 1[$ et de $]1, +\infty[$ et f est continue à droite et à gauche en 1.

Finalement f est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

ie <u>f est continue sur $\mathbb{R}$.</u>

Il reste à déterminer F. Observons que

- Si $x \in \,]-\infty, 0[$, $[x, x+1] \subset \,]-\infty, 1[$
- Si $x \in [1, +\infty[$, $[x, x+1] \subset [1, +\infty[$
- Si $x \in [0, 1[$, $x < 1 \leq x+1$

Rappelons encore que $x \mapsto -\frac{1}{2}(1-x)^2$ est une primitive de $x \mapsto 1-x$ sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \frac{2}{3}(x-1)^{3/2}$ est une primitive de $x \mapsto \sqrt{x-1}$ sur $[1,+\infty[$

Soit $x \in \,]-\infty,0[$ (ou $]-\infty,0]$!)

$F(x)=\int_x^{x+1} f(t)dt = \int_x^{x+1}(1-t)dt = \left[-\frac{1}{2}(1-t)^2\right]_x^{x+1} = -\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}(1-x)^2.$

Soit $x \in [1,+\infty[$

$F(x)=\int_x^{x+1} f(t)dt = \int_x^{x+1}\sqrt{t-1}\,dt = \left[\frac{2}{3}(t-1)^{3/2}\right]_x^{x+1} = \frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{2}{3}(x-1)^{3/2}.$

Soit $x \in [0,1[$.

$F(x)=\int_x^{x+1} f(t)dt = \int_x^{1} f(t)dt + \int_1^{x+1} f(t)dt = \left[-\frac{1}{2}(1-t)^2\right]_x^1 + \left[\frac{2}{3}(t-1)^{3/2}\right]_1^{x+1}$

$F(x)= \frac{1}{2}(1-x)^2 + \frac{2}{3}x^{3/2}$

Finalement $\forall x\in\mathbb{R},\ F(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}(1-x)^2 \text{ si } x\in\,]-\infty,0[\text{ ou }]-\infty,0] \\ \frac{1}{2}(1-x)^2+\frac{2}{3}x^{3/2} \text{ si } x\in[0,1[\text{ ou } [0,1] \\ \frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{2}{3}(x-1)^{3/2} \text{ si } x\in[1,+\infty[. \end{cases}$

(Q3) a) Soient f et g deux éléments de E et λ un réel.

$\forall x\in\mathbb{R},\ T(\lambda f+g)(x)=\int_x^{x+1}(\lambda f+g)(t)dt = \lambda\int_x^{x+1}f(t)dt+\int_x^{x+1}g(t)dt = \lambda T(f)(x)+T(g)(x)$

$\forall x\in\mathbb{R},\ T(\lambda f+g)(x)=(\lambda T(f)+T(g))(x)$; $T(\lambda f+g)=\lambda T(f)+T(g)$.

Ainsi T est une application linéaire de E dans E (d'après Q1, $\forall f\in E,\ T(f)\in E$).

b) D'après Q2 a) si l'on pose $\forall x\in\mathbb{R},\ f_0(x)=\sin(2\pi x)$:

$f_0\in E$, $f_0\neq 0_E$ et $T(f_0)=0_E$. Ainsi $\operatorname{Ker} T\neq\{0_E\}$.

<u>T n'est pas injective.</u>

D'après Q1, si f est un élément de E, $T(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Ainsi $\operatorname{Im} T$ est contenu dans l'espace vectoriel E_1 des applications dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

$h : x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ et pas dérivable en 0. Donc $h \in \mathcal{I}$ et $h \notin C_1$, ainsi $h \in E$ et $h \notin \operatorname{Im} T$.

<u>T n'est pas surjective.</u>

Q4) <u>a)</u> T n'est pas injective donc <u>0 est valeur propre de T.</u>

<u>b)</u> Soit $a \in \mathbb{R}$. Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_a(x) = e^{ax}$. $f_a \in E$ et $f_a \neq 0_E$. <u>Supposons $a \neq 0$.</u>

$\forall x \in \mathbb{R}$, $T(f_a)(x) = \int_x^{x+1} e^{at}\,dt = \left[\frac{1}{a} e^{at}\right]_x^{x+1} = \frac{1}{a}\left[e^{a(x+1)} - e^{ax}\right] = \frac{1}{a}(e^a - 1)e^{ax}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $T(f_a)(x) = \frac{1}{a}(e^a - 1) f_a(x)$; $f_a \neq 0_E$ et $T(f_a) = \frac{e^a - 1}{a} f_a$

Ainsi $f_a : x \mapsto e^{ax}$ est une fonction propre de T associée à la valeur $\frac{e^a - 1}{a}$ si $a \in \mathbb{R}^*$

<u>Supposons $a = 0$.</u>

$\forall x \in \mathbb{R}$, $T(f_a)(x) = \int_x^{x+1} 1\,dt = 1 = 1 \times f_0(x)$; $T(f_0) = 1 \times f_0$ et $f_0 \neq 0_E$

Ainsi $f_0 : x \mapsto 1$ est une fonction propre de T associée à la valeur propre 1.

<u>Finalement $f_a : x \mapsto e^{ax}$ est une fonction propre de T associée à la valeur propre</u>

$$\lambda(a) = \begin{cases} \frac{e^a - 1}{a} & \text{si } a \neq 0 \\ 1 & \text{si } a = 0 \end{cases}.$$

<u>c)</u> λ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. $\lim_{a \to 0} \lambda(a) = \lim_{a \to 0} \frac{e^a - 1}{a} = 1 = \lambda(0)$

$\forall a \in \mathbb{R}^*$, $\lambda'(a) = \frac{1}{a^2}\left[e^a a - (e^a - 1)\right] = \frac{1}{a^2}\left[e^a a - e^a + 1\right]$.

$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2} + o(a^2)$; $e^a - 1 = a + \frac{a^2}{2} + o(a^2)$; $\frac{e^a - 1}{a} = 1 + \frac{a}{2} + o(a)$.

$\lambda(a) = 1 + \frac{a}{2} + o(a)$; $\frac{\lambda(a) - \lambda(0)}{a - 0} = \frac{1}{a}\left[1 + \frac{a}{2} - 1 + o(a)\right] = \frac{1}{2} + o(1)$.

Ainsi $\lim_{a \to 0} \frac{\lambda(a) - \lambda(0)}{a - 0} = \frac{1}{2}$; λ est dérivable en 0 et $\lambda'(0) = \frac{1}{2}$.

Pour étudier le signe de λ' sur $\mathbb{R}^*$ posons $\forall a \in \mathbb{R},\ u(a) = e^a a - e^a + 1$

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall a \in \mathbb{R},\ u'(a) = e^a a + e^a - e^a = a e^a$. Notons que $u(0) = 0$.

a	$-\infty$		0		$+\infty$
$u'(a)$		$-$	0	$+$	
$u(a)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Ainsi $\forall a \in \mathbb{R},\ u(a) \geq 0$; mieux $\forall a \in \mathbb{R}^*,\ u(a) > 0$

Donc λ' est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ car $\lambda'(0) = \frac{1}{2}$

Par conséquent λ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Notons que $\lim\limits_{a \to +\infty} \lambda(a) = \lim\limits_{a \to +\infty} \left(\frac{e^a}{a} - \frac{1}{a}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{a \to -\infty} \lambda(a) = \lim\limits_{a \to -\infty} \left(\frac{1}{a}(e^a - 1)\right) = 0$

λ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, λ définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\lambda(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$.

Par conséquent d'après b) tout élément de $]0, +\infty[$ est une valeur propre de T

Comme 0 est également une valeur propre de T : <u>tout réel positif est valeur propre de T</u>.

PROBLÈME

PARTIE A

Q1 a) Soit f une fonction ayant la propriété $\mathcal{P}$. Soit $a \in D$. Une récurrence simple donne :

$\forall n \in \mathbb{N},\ a+n \in D$ et $f(a+n) = (a+n-1)(a+n-2)\cdots a\, f(a)$.

Supposons que D contienne un entier négatif ou nul x.

Alors $\forall n \in \mathbb{N},\ x+n \in D$ et $f(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\cdots x\, f(x)$.

Posons alors $n = 1-x$. $n \in \mathbb{N}^*$ et $x+n = 1$

Ainsi $1 = f(1) = f(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\cdots x\, f(x) = 0$ car $x+n-1 = 0$!!

Ceci constitue une légère contradiction qui montre qu'une fonction ayant la propriété $\mathcal{P}$ ne peut être définie en un entier négatif ou nul.

b) $D = \mathbb{N}^*$ et $f : n \mapsto (n-1)!$

- f est définie en 1 et $f(1) = 0! = 1$
- Soit $x \in D$. $x \in \mathbb{N}^*$ donc $x+1 \in \mathbb{N}^* = D$; de plus $f(x+1) = x! = x\,(x-1)! = x\, f(x)$.

Ainsi f a la propriété $\mathcal{P}$.

Q2 a) Rappelons que le domaine de définition de Γ est $\mathbb{R}^*_+$, que $\forall x \in \mathbb{R}^*_+,\ \Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ et que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Gamma(n) = (n-1)!$

Tout ceci suffit largement pour dire que Γ possède la propriété $\mathcal{P}$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Gamma(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)\,x\,\Gamma(x)$.

- C'est clair pour $n = 1$ car $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$
- Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$.

  $\Gamma(x+n+1) = (x+n)\,\Gamma(x+n) \underset{\text{H.R.}}{=} (x+n)(x+n-1)\cdots(x+1)\,x\,\Gamma(x)$ ce qui achève la récurrence.

Q3 a) Soit $x \in \mathbb{R}^*_+$. $A_{n+1}(x) = \dfrac{\Gamma(x+n+1)}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \dfrac{(x+n)\,\Gamma(x+n)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)(x+n)} = A_n(x)$.

Ainsi la suite $(A_n(x))_{n\geq 1}$ est constante ... Q2 b) donne aussi $A_n(x) = \Gamma(x)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$.

Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n(x)$ ne dépend pas de n.

b) Soit $x \in E = \mathbb{R} - \mathbb{Z}^-$. $x+n > 0 \iff n > -x$

Si $x > 0$: $\forall n \in \mathbb{N},\ x+n > 0$; on pourra poser $N_x = 0$.

Si $x \leq 0$ on pose $N_x = E(-x)+1$

dans les deux cas pour tout $n \in [\![N_x, +\infty[\![$, $x+n>0$

$(n,p) \in \mathbb{N}^2$ et $n \geq N_x$. Ainsi $x+n+p>0$ et par conséquent : $A_{n+p}(x)$ et $A_p(x+n)$ ont un sens.

$$A_{n+p}(x) = \frac{\Gamma(x+n+p)}{x(x+1)\cdots(x+n+p-1)} = \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} \times \frac{\Gamma(x+n+p)}{(x+n)(x+n+1)\cdots(x+n+p-1)}$$

Ainsi $A_{n+p}(x) = \dfrac{1}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} A_p(x+n)$.

Or $A_p(x+n)$ ne dépend pas de p car $x+n>0$; par conséquent $A_p(x+n) = A_1(x+n)$

ou encore : $A_p(x+n) = \dfrac{\Gamma(x+n+1)}{x+n}$.

Donc $A_{n+p}(x) = \dfrac{1}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} \times \dfrac{\Gamma(x+n+1)}{x+n} = \dfrac{(x+n)\,\Gamma(x+n)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)(x+n)} = A_n(x)$

Ainsi $\forall n \in [\![N_x, +\infty[\![$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $A_{n+p}(x) = A_n(x)$.

c) $D = E$, ainsi si $x \in D$, $x+1 \in D$.

Soit $x \in E$. Choisissons n dans $\mathbb{N}$ tel que : $n > N_x$ et $n > N_{x+1}$

$$\tilde{\Gamma}(x+1) = A_n(x+1) = \frac{\Gamma(x+1+n)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} = \frac{(x+n)\,\Gamma(x+n)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} = x\,\frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}$$

$\tilde{\Gamma}(x+1) = x\,A_n(x) = x\,\tilde{\Gamma}(x)$.

Ne reste plus qu'à remarquer que $1 \in D$ et que $\tilde{\Gamma}(1) \overset{n > N_1}{=} A_n(1) = \dfrac{\Gamma(n+1)}{1(2)\cdots(1+n-1)} = \dfrac{n!}{n!} = 1$

Donc $\tilde{\Gamma}$ a la propriété $\mathcal{P}$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $x+1>0$ donc $\tilde{\Gamma}(x) = A_1(x) = \dfrac{\Gamma(x+1)}{x} = \dfrac{x\,\Gamma(x)}{x} = \Gamma(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\tilde{\Gamma}(x) = \Gamma(x)$.

Soit $x\in E$. Soit $p\in\mathbb{N}^*$ tel que : $x+p>0$.

$\tilde{\Gamma}(x) = A_p(x) = \dfrac{\Gamma(x+p)}{x(x+1)\cdots(x+p-1)}$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $x+n+p>0$ donc $\tilde{\Gamma}(x+n) = A_p(x+n) = \dfrac{\Gamma(x+n+p)}{(x+n)(x+n+1)\cdots(x+n+p-1)}$

Notons que d'après Q2 b) : $\Gamma(x+n+p) = (x+n+p-1)(x+n+p-2)\cdots(x+p)\,\Gamma(x+p)$

Ainsi :

$$\tilde{\Gamma}(x+n) = \frac{(x+n+p-1)(x+n+p-2)\cdots(x+p)}{(x+n)(x+n+1)\cdots(x+n+p-1)}\,\Gamma(x+p) \quad \text{or} \quad \Gamma(x+p) = x(x+1)\cdots(x+p-1)\,\tilde{\Gamma}(x)$$

$$\tilde{\Gamma}(x+n) = \frac{(x+n+p-1)(x+n+p-2)\cdots(x+p)(x+p-1)\cdots(x+1)x}{(x+n+p-1)(x+n+p-2)\cdots(x+n+1)(x+n)}\,\tilde{\Gamma}(x) = (x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)x\,\tilde{\Gamma}(x)$$

donc $\forall x\in E,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \tilde{\Gamma}(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)x\,\tilde{\Gamma}(x)$.

Q4 a) Posons $\forall t\in\,]0,1],\ u(t) = \dfrac{\ln t}{\sqrt{t}}$ et $\forall t\in[1,+\infty[,\ v(t) = t\ln t\, e^{-t}$

. u est continue sur $]0,1]$.

$\lim_{t\to0^+}\left(t^{3/4}\dfrac{\ln t}{\sqrt{t}}\right) = \lim_{t\to0^+}\left(t^{1/4}\ln t\right) = 0$, ainsi :

$\exists\alpha\in\,]0,1],\ \forall t\in\,]0,\alpha],\ \left|t^{3/4}\dfrac{\ln t}{\sqrt{t}}\right|\le 1$; $\forall t\in\,]0,\alpha],\ \left|\dfrac{\ln t}{\sqrt{t}}\right|\le\dfrac{1}{t^{3/4}}$

La convergence de $\int_0^\alpha \dfrac{dt}{t^{3/4}}$ et la positivité de $t\mapsto\left|\dfrac{\ln t}{\sqrt{t}}\right|$ donnent la convergence

de $\int_0^\alpha\left|\dfrac{\ln t}{\sqrt{t}}\right|dt$ et donc de $\int_0^1\left|\dfrac{\ln t}{\sqrt{t}}\right|dt$

$\int_0^1\dfrac{\ln t}{\sqrt{t}}\,dt$ est absolument convergente donc convergente.

. v est continue et positive sur $[1,+\infty[$.

De plus :

$$\lim_{t\to+\infty}\left(t^2 v(t)\right) = \lim_{t\to+\infty}\left(t^3\ln t\, e^{-t}\right) = 0 \quad \text{par croissance comparée}.$$

Donc $\exists A\in[1,+\infty[,\ \forall t\in[A,+\infty[,\ 0\le t^3\ln t\,e^{-t}\le 1$ ou $0\le v(t)\le\dfrac{1}{t^2}$.

La convergence de $\int_A^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$ et la positivité de v montrent alors la convergence de $\int_A^{+\infty} v(t)dt$ et donc la convergence de $\int_1^{+\infty} v(t)dt$.

Comme v est positive sur $[1,+\infty[$ on a ainsi l'absolue convergence de $\int_1^{+\infty} v(t)dt$

Ainsi : $\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt t}dt$ et $\int_1^{+\infty} t\ln t\, e^{-t}dt$ sont absolument convergentes.

b) * Fixons t dans $]0,1[$.

Posons alors $\forall x\in]\frac12,\frac32[,\ h_t(x)=h(t,x)=t^{x-1}=e^{(x-1)\ln t}$

h_t est continue et dérivable sur $]\frac12,\frac32[$.

$\forall x\in]\frac12,\frac32[,\ |h_t'(x)|=|\ln t\, e^{(x-1)\ln t}|=|\ln t|\, e^{(x-1)\ln t}\underset{\ln t<0 \text{ et } x-1\geq -\frac12}{\leq}|\ln t|\, e^{-\frac12\ln t}=\frac{|\ln t|}{\sqrt t}$

En appliquant l'inégalité des accroissements finis à h_t :

$\forall (x,y)\in]\frac12,\frac32[^2,\ |h_t(x)-h_t(y)|\leq\frac{|\ln t|}{\sqrt t}|x-y|$

En particulier $\forall x\in]\frac12,\frac32[,\ |h_t(x)-h_t(1)|\leq|x-1|\frac{|\ln t|}{\sqrt t}$, c'est à dire :

$\forall x\in]\frac12,\frac32[,\ |h(t,x)-h(t,1)|\leq|x-1|\ \frac{|\ln t|}{\sqrt t}$; et ceci pour tout t dans $]0,1[$.

Par conséquent : $\underline{\forall t\in]0,1[,\ \forall x\in]\frac12,\frac32[,\ |h(t,x)-h(t,1)|\leq|x-1|\ \frac{|\ln t|}{\sqrt t}}$.

* Fixons t dans $[1,+\infty[$. Posons encore : $\forall x\in]\frac12,\frac32[,\ h_t(x)=h(t,x)=e^{(x-1)\ln t}$

h_t est continue et dérivable sur $]\frac12,\frac32[$.

$\forall x\in]\frac12,\frac32[,\ |h_t'(x)|=|\ln t\, e^{(x-1)\ln t}|\underset{t\geq1}{=}\ln t\, e^{(x-1)\ln t}\underset{\ln t\geq0 \text{ et } x-1\leq1}{\leq}\ln t\, e^{\ln t}=t\ln t$

Ainsi l'inégalité des accroissements finis nous donne :

$\forall (x,y)\in]\frac12,\frac32[^2,\ |h_t(x)-h_t(y)|\leq|x-y|\, t\ln t$

En particulier $\forall x\in]\frac12,\frac32[,\ |h_t(x)-h_t(1)|\leq|x-1|\, t\ln t$; donc :

$\forall x\in]\frac12,\frac32[,\ |h(t,x)-h(t,1)|\leq|x-1|\, t\ln t$ et ceci pour tout t dans $[1,+\infty[$.

$\underline{\forall t\in[1,+\infty[,\ \forall x\in]\frac12,\frac32[,\ |h(t,x)-h(t,1)|\leq|x-1|\, t\ln t}$.

c) Soit x un élément de $]\frac{1}{2},\frac{3}{2}[$. Notons que $\Gamma(x)-\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}(t^{x-1}e^{-t}-e^{-t})\,dt$

$\forall t\in\mathbb{R}_+^*,\ |t^{x-1}e^{-t}-e^{-t}|=|f(t,x)-f(t,1)|e^{-t}$

- $\forall t\in]0,1[,\ |t^{x-1}e^{-t}-e^{-t}|\leq|x-1|\,\frac{|\ln t|}{\sqrt{t}}e^{-t}$; mieux (?) :

$\forall t\in]0,1],\ |t^{x-1}e^{-t}-e^{-t}|\leq|x-1|\,\frac{|\ln t|}{\sqrt{t}}e^{-t}$

D'après Q4a), $\int_0^1\frac{|\ln t|}{\sqrt{t}}e^{-t}dt$ converge. Comme $t\mapsto|t^{x-1}e^{-t}-e^{-t}|$ est positive sur $]0,1]$: $\int_0^1|t^{x-1}e^{-t}-e^{-t}|\,dt$ converge. Ainsi $\int_0^1(t^{x-1}e^{-t}-e^{-t})\,dt$ est absolument convergente. Nous pouvons alors écrire :

$$\left|\int_0^1(t^{x-1}e^{-t}-e^{-t})\,dt\right|\leq\int_0^1|t^{x-1}e^{-t}-e^{-t}|\,dt\leq|x-1|\int_0^1\frac{|\ln t|}{\sqrt{t}}e^{-t}dt$$

- $\forall t\in[1,+\infty[,\ |t^{x-1}e^{-t}-e^{-t}|=|f(t,x)-f(t,1)|e^{-t}\leq|x-1|\,t\ln t\,e^{-t}$

La convergence de $J=\int_1^{+\infty}(t\ln t\,e^{-t})\,dt$ et la positivité de $t\mapsto|t^{x-1}e^{-t}-e^{-t}|$ montrent l'absolue convergence de $\int_1^{+\infty}(t^{x-1}e^{-t}-e^{-t})\,dt$. Ainsi pouvons-nous écrire :

$$\left|\int_1^{+\infty}(t^{x-1}e^{-t}-e^{-t})\,dt\right|\leq\int_1^{+\infty}|t^{x-1}e^{-t}-e^{-t}|\,dt\leq|x-1|\int_1^{+\infty}t\ln t\,e^{-t}dt=|x-1|\,J$$

$$|\Gamma(x)-\Gamma(1)|=\left|\int_0^{+\infty}(t^{x-1}e^{-t}-e^{-t})\,dt\right|\leq\left|\int_0^1(t^{x-1}e^{-t}-e^{-t})\,dt\right|+\left|\int_1^{+\infty}(t^{x-1}e^{-t}-e^{-t})\,dt\right|$$

$$|\Gamma(x)-\Gamma(1)|\leq|x-1|\int_0^1\frac{|\ln t|}{\sqrt{t}}e^{-t}dt+|x-1|\int_1^{+\infty}t\ln t\,e^{-t}dt$$

Posons $K=\int_0^1\frac{|\ln t|}{\sqrt{t}}dt+\int_1^{+\infty}t\ln t\,e^{-t}dt$. $|\Gamma(x)-\Gamma(1)|\leq K|x-1|$

$$\underline{\exists K\in\mathbb{R},\ \forall x\in]\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2}[,\ |\Gamma(x)-\Gamma(1)|\leq K|x-1|.}$$

$\lim_{x\to1}(K|x-1|)=0$; il vient alors par encadrement : $\lim_{x\to1}(\Gamma(x)-\Gamma(1))=0$

donc $\lim_{x\to1}\Gamma(x)=\Gamma(1)$. <u>$\Gamma$ est continue en 1.</u>

(Q5) $\forall x\in E$, $\Gamma(x+1)=x\,\Gamma(x)$ d'après Q3 c).

Donc $\lim_{x\to 0}(x\Gamma(x)) = \lim_{x\to 0}\Gamma(x+1)=\Gamma(1)=0!=1$

Ainsi $\underline{\Gamma(x)\underset{0}{\sim}\frac{1}{x}}$.

Cherchons un équivalent de $\Gamma(x)$ au voisinage de $-n$ (et non pas de $x=-n$!!) pour n dans $\mathbb{N}^*$. Soit x un élément de E. Posons $y=x+n$.

$\Gamma(y)=\Gamma(x+n)=(x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)\,x\,\Gamma(x)$.

$$\Gamma(x)=\frac{\Gamma(y)}{(x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)x}=\frac{y\,\Gamma(y)}{(x+n)(x+n-1)\cdots(x+1)x}=\frac{(x+n)\Gamma(x+n)}{(x+n)(x+n-1)\cdots(x+1)x}$$

$\lim_{x\to -n}((x+n)\Gamma(x+n))=\lim_{y\to 0}(y\Gamma(y))=1$ et $\lim_{x\to -n}\frac{1}{(x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)x}=\frac{1}{(-1)(-2)\cdots(-n+1)(-n)}$

Donc $\Gamma(x)\underset{-n}{\sim}\frac{1}{(x+n)(-1)(-2)\cdots(-n+1)(-n)}=\frac{1}{(x+n)(-1)^n n!}$

$\underline{\Gamma(x)\underset{-n}{\sim}\frac{1}{(-1)^n n!}\,\frac{1}{x+n}}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et même $\mathbb{N}$.

(Q6) a) Soit $x\in\mathbb{R}$.

Pour $n\geqslant N_x$: $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^{n\ln(1+\frac{x}{n})}$ car $x+n>0$.

$\lim_{n\to+\infty}\left(n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)=x$ car $n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}n\times\frac{x}{n}=x$

donc $\underline{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x}$.

b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $n!=n\Gamma(n)\underset{n\to+\infty}{\sim}n\,n^{n-1}e^{-n}\sqrt{2\pi n}=n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$.

$\underline{n!\sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}$.

c) Soit $x \in E$

$$\Gamma(x+n) \underset{n\to+\infty}{\sim} (x+n)^{x+n-1} e^{-(x+n)} \sqrt{2\pi(x+n)} \quad \text{et} \quad \Gamma(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{n-1} e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

Donc $\displaystyle \frac{\Gamma(x+n)}{n^x\Gamma(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(x+n)^{x-1}}{n^{x-1}} \times \frac{e^{-(x+n)}}{e^{-n}} \times \frac{(x+n)^n}{n^n} \times \frac{\sqrt{2\pi(x+n)}}{\sqrt{2\pi n}}$

$$\frac{\Gamma(x+n)}{n^x\Gamma(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{x+n}{n}\right)^{x-1} \times e^{-x} \times \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \sqrt{\frac{x+n}{n}}.$$

$\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{x+n}{n}\right)^{x-1} = \lim_{n\to+\infty} e^{(x-1)\ln(1+\frac{x}{n})} = 1.$ $\displaystyle \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x.$ $\displaystyle \lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{x+n}{n}} = 1.$

Ainsi $\displaystyle \frac{\Gamma(x+n)}{n^x\Gamma(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1\times e^{-x}\times e^{x}\times 1 = 1.$ $\displaystyle \underline{\lim_{n\to+\infty} \frac{\Gamma(x+n)}{n^x\Gamma(n)} = 1.}$

d) Soit $x \in E$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Gamma(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)x\,\Gamma(x).$

$$1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\Gamma(x+n)}{n^x\Gamma(n)} = \frac{(x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)x\,\Gamma(x)}{n^x\,(n-1)!} = \frac{n}{x+n}\,\frac{(x+n)(x+n-1)\cdots(x+1)x}{n!\,n^x}\,\Gamma(x)$$

$$1 \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 \times \frac{(x+n)(x+n-1)\cdots(x+1)x}{n!\,n^x}\,\Gamma(x) \ ; \quad \frac{n!\,n^x}{(x+n)(x+n-1)\cdots(x+1)x} \underset{n\to+\infty}{\sim} \Gamma(x)$$

Donc $\forall x\in E,\ \displaystyle \underline{\lim_{n\to+\infty} \frac{n!\,n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \Gamma(x).}$

PARTIE B Q1 Soit x un réel positif. $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ q_k(x) > 0$

Notons que : $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} q_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{x/n}}{1+x/n} = 1.$

Donc $\displaystyle u_n(x) = \ln(q_n(x)) \underset{n\to+\infty}{\sim} q_n(x) - 1 = \frac{e^{x/n}-1-x/n}{1+x/n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{x/n} - 1 - \frac{x}{n}.$

$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$ au voisinage de 0.

Donc $\displaystyle e^u - 1 - u \underset{u\to 0}{\sim} \frac{u^2}{2}$; ainsi $\displaystyle u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2 = \frac{x^2}{2}\,\frac{1}{n^2}.$

$u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x^2}{2}\,\frac{1}{n^2}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{x^2}{2}\times\frac{1}{n^2}>0$ et la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge. Les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent alors que : la série de terme général $u_n(x)=\ln g_n(x)$ converge et ceci pour tout x dans E.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\ln(G_n(x)) = \sum_{k=1}^{n} \ln(g_k(x)) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$.

La série de terme général $u_n(x)$ étant convergente, la suite de terme général $\ln(G_n(x))$ converge. La fonction exponentielle étant continue sur $\mathbb{R}$, la suite de terme général $G_n(x)$ converge.

Pour tout x dans $\mathbb{R}_+$ $\lim_{n\to+\infty} G_n(x)$ existe ... et est finie ... et même strictement positive.

Q2 Soit $x\in E\cap\,]-\infty,0[$. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $g_n(x)=\frac{e^{x/n}}{1+x/n}$

Si $x+n>0$: $g_n(x)>0$ donc $\forall n\in[\![N_x,+\infty[\![$, $g_n(x)>0$.

$\forall n\in[\![N_x,+\infty[\![$, $G_n(x)=\prod_{k=1}^{N_x-1} g_k(x)\times\prod_{k=N_x}^{n} g_k(x)$

Un raisonnement analogue au précédent permet de prouver que $\left(\prod_{k=N_x}^{n} g_k(x)\right)_{n\geq N_x}$ converge. Ainsi la suite $(G_n(x))_{n\geq 1}$ converge pour tout x dans $E\cap\,]-\infty,0[$.

Bilan $(G_n(x))_{n\geq1}$ converge pour tout x dans E.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$

Q3 $\ln G_n(1)=\ln\left[\prod_{k=1}^{n} g_k(1)\right]=\ln\left[\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{e^{1/k}}{1+1/k}\right)\right]$

$\ln(G_n(1))=\ln\left(e^{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}\right)+\ln\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\ln\frac{1}{n+1}$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\ln(G_n(1))=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n+1)$.

Notons γ la limite de la suite $\left(\ln(G_n(1))\right)_{n\geq 1}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n = \ln(G_n(1)) + \ln(n+1) - \ln n = \ln(G_n(1)) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right) = \gamma + 0 = \gamma$

Reste à prouver que : $\gamma > 0$.

Commençons par montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $e^x > x+1$.

$\varphi : x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Le théorème des accroissements finis donne alors :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists c_x \in]0,x[$, $\dfrac{e^x - e^0}{x-0} = e^{c_x}$ $\quad (\varphi' = \varphi\ !)$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $\exists c_x \in]0,x[$, $\dfrac{e^x-1}{x} = e^{c_x} > 1$; $e^x - 1 > x$; $e^x > x+1$.

Ainsi $\underline{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ e^x > x+1.}$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\dfrac{G_{n+1}(x)}{G_n(x)} = g_{n+1}(x) = \dfrac{e^{x/(n+1)}}{1+\frac{x}{n+1}} > 1$ $\quad \frac{x}{n+1} > 0$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $G_n(x) > 0$ et $\dfrac{G_{n+1}(x)}{G_n(x)} > 1$; ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $G_{n+1}(x) > G_n(x)$.

La suite $(G_n(x))_{n\geq 1}$ est donc strictement croissante. $\ln$ étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ on obtient alors la stricte croissance de $(\ln(G_n(x)))_{n\geq 1}$.

Donc $\displaystyle\gamma = \lim_{n\to+\infty} \ln(G_n(1)) \underset{\text{strict croiss...}}{>} \ln G_1(1) = \ln g_1(1) = \ln\frac{e}{2} = 1 - \ln 2$

Donc $\underline{\gamma > 0}$

<u>Remarque</u>.. Il est aisé de montrer que $(v_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante. Ainsi

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(G_n(1)) < \gamma < v_n$; $1 - \ln 2 < \gamma < 1$!

Notons que $\gamma \simeq 0,577$

Q4 Soit $x \in E$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$\Gamma(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)\,x\,\Gamma(x) =$

$(x+n)\Gamma(x+n) = \left(\prod_{k=1}^{n}(x+k)\right)\left(x\,\Gamma(x)\right)$. $\quad \dfrac{x\,\Gamma(x)}{(x+n)\Gamma(x+n)} = \prod_{k=1}^{n}\dfrac{1}{x+k}$

Or $G_n(x) = \prod_{k=1}^{n}\dfrac{e^{x/k}}{1+x/k} = \left(\prod_{k=1}^{n} k\right)\left(\prod_{k=1}^{n}\dfrac{1}{x+k}\right) e^{\sum_{k=1}^{n}\frac{x}{k}} = n!\,\dfrac{x\,\Gamma(x)}{(x+n)\Gamma(x+n)}\, e^{x\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$

donc $\forall x \in E, \forall n \in \mathbb{N}^*$, $G_n(x) = x\,\Gamma(x)\,\dfrac{n!\,e^{x\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}}{(x+n)\Gamma(x+n)}$.

Q5 Soit $x \in E$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$\Gamma(x) = G_n(x) \times \dfrac{\Gamma(x+n)}{n^x\,\Gamma(n)} \times \dfrac{\Gamma(n)}{n!} \times (x+n) \times e^{-x\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}} \times n^x \times \dfrac{1}{x}$

Remarquons que $\dfrac{\Gamma(n)}{n!} = \dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$ et que $e^{-x\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}\,n^x = e^{-x\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right)}$

donc $\Gamma(x) = G_n(x)\,\dfrac{\Gamma(x+n)}{n^x\,\Gamma(n)} \times \dfrac{x+n}{n} \times e^{-x v_n} \times \dfrac{1}{x}$.

$\lim_{n\to+\infty} G_n(x) = G(x)$, $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{\Gamma(x+n)}{n^x\,\Gamma(n)} = 1$ et $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{x+n}{n} = 1$ et $\lim_{n\to+\infty}\left(e^{-x v_n}\right) = e^{-\gamma x}$.

Ainsi, pour tout x dans E, $\Gamma(x) = \dfrac{e^{-\gamma x}}{x}\,G(x)$.