EXERCICE 1

Q1 Soit u un élément non nul de E. φ_u est clairement une application de E dans E. Montrons que φ_u est linéaire.

$$\forall (x,y)\in E^2, \forall \lambda\in\mathbb{R},\ \varphi_u(\lambda x+y) = 2\frac{\langle \lambda x+y,u\rangle}{\langle u,u\rangle}u - \lambda x - y = 2\frac{\lambda\langle x,u\rangle+\langle y,u\rangle}{\langle u,u\rangle} - \lambda x - y$$

$$\forall (x,y)\in E^2, \forall \lambda\in\mathbb{R},\ \varphi_u(\lambda x+y) = \lambda\left(\frac{\langle x,u\rangle}{\langle u,u\rangle} - x\right) + \frac{\langle y,u\rangle}{\langle u,u\rangle} - y = \lambda\varphi_u(x)+\varphi_u(y).$$

Donc φ_u est un endomorphisme de E. Montrons que φ_u est involutif.

Soit $x\in E$. $\langle \varphi_u(x),u\rangle = \langle 2\frac{\langle x,u\rangle}{\langle u,u\rangle}u - x, u\rangle = 2\frac{\langle x,u\rangle}{\langle u,u\rangle}\langle u,u\rangle - \langle x,u\rangle = \langle x,u\rangle$

Par conséquent :

$$\varphi_u(\varphi_u(x)) = 2\frac{\langle \varphi_u(x),u\rangle}{\langle u,u\rangle}u - \varphi_u(x) = 2\frac{\langle x,u\rangle}{\langle u,u\rangle}u - \left(2\frac{\langle x,u\rangle}{\langle u,u\rangle}u - x\right) = x.$$

$\forall x\in E,\ (\varphi_u\circ\varphi_u)(x) = x$. $\varphi_u\circ\varphi_u = id_E$. <u>$\varphi_u$ est un endomorphisme involutif de E.</u>

Q2 Soit u un élément non nul de E. $\varphi_u(u) = 2\frac{\langle u,u\rangle}{\langle u,u\rangle}u - u = u$

<u>$u\neq 0_E$ et $\varphi_u(u)=u$. u est un vecteur propre de φ_u associé à la valeur propre 1.</u>

Q3 u est un élément non nul de E. Soit $(x_1,x_2)\in E^2$.

$$\langle \varphi_u(x_1),\varphi_u(x_2)\rangle = \langle 2\frac{\langle u,x_1\rangle}{\langle u,u\rangle}u - x_1,\ 2\frac{\langle u,x_2\rangle}{\langle u,u\rangle}u - x_2\rangle$$

$$\langle \varphi_u(x_1),\varphi_u(x_2)\rangle = 2\frac{\langle u,x_1\rangle}{\langle u,u\rangle}\,2\frac{\langle u,x_2\rangle}{\langle u,u\rangle}\langle u,u\rangle - 2\frac{\langle u,x_1\rangle}{\langle u,u\rangle}\langle u,x_2\rangle - 2\frac{\langle u,x_2\rangle}{\langle u,u\rangle}\langle x_1,u\rangle + \langle x_1,x_2\rangle$$

$$\text{Donc } \langle \varphi_u(x_1),\varphi_u(x_2)\rangle = 4\frac{\langle u,x_1\rangle\langle u,x_2\rangle}{\langle u,u\rangle} - 2\frac{\langle u,x_1\rangle\langle u,x_2\rangle}{\langle u,u\rangle} - 2\frac{\langle u,x_1\rangle\langle u,x_2\rangle}{\langle u,u\rangle} + \langle x_1,x_2\rangle = \langle x_1,x_2\rangle$$

<u>$\forall (x_1,x_2)\in E^2,\ \langle \varphi_u(x_1),\varphi_u(x_2)\rangle = \langle x_1,x_2\rangle$.</u>

$\forall x\in E,\ \|\varphi_u(x)\| = \sqrt{\langle \varphi_u(x),\varphi_u(x)\rangle} = \sqrt{\langle x,x\rangle} = \|x\|$. <u>$\forall x\in E,\ \|\varphi_u(x)\| = \|x\|$.</u>

Q4) $u \in E$ et $u \neq 0_E$. a) Soit x un élément de E.

$$\varphi_u(x) = -x \iff 2\,\frac{\langle x,u\rangle}{\langle u,u\rangle}\,u = 0_E \underset{u\neq 0_E}{\iff} \langle x,u\rangle = 0 \iff x \in (\mathrm{Vect}(u))^{\perp} \iff x \in D_u^{\perp} = H_u$$

donc $\mathrm{Ker}(\varphi_u + \mathrm{Id}_E) = H_u$. Notons que $H_u \neq \{0_E\}$ car $\dim H_u = n-1 \geqslant 1$.

H_u est le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 pour φ_u.

b) $E = D_u \overset{\perp}{\oplus} H_u$. Si B_1 est une base de D_u et B_2 une base de H_u alors

1°.. $B =$ "$B_1 \cup B_2$" est une base de E

2°.. les éléments de B sont des vecteurs propres de φ_u car B_1 est une base de $D_u = \mathrm{Vect}(u)$ et B_2 une base de $\mathrm{Ker}(\varphi_u + \mathrm{Id}_E)$.

B est donc une base de E constituée de vecteurs propres de φ_u ; φ_u est diagonalisable.

c) Soit $t \in \mathbb{R}^*$. $\forall x \in E$, $\varphi_{tu}(x) = 2\,\frac{\langle x,tu\rangle}{\langle tu,tu\rangle}\,tu - x = 2\,\frac{t^2}{t^2}\,\frac{\langle x,u\rangle}{\langle u,u\rangle}\,u - x = \varphi_u(x)$.

$\forall x \in E$, $\varphi_{tu}(x) = \varphi_u(x)$. $\varphi_{tu} = \varphi_u$.

Remarque.. Ne nous cachons pas que φ_u est la symétrie orthogonale de base la droite D_u.

Q5) ψ est la symétrie orthogonale de base Δ !

a) Soit $x \in E$. $\exists!(y,z) \in \Delta \times \Delta^{\perp}$, $x = y+z$.

$\psi(x) = \psi(y+z) = \psi(y) + \psi(z) = y - z = y + (-z)$.

$y \in \Delta$ et $-z \in \Delta^{\perp}$ donc $\psi(\psi(x)) = \psi(y+(-z)) = \psi(y) + \psi(-z) = y - (-z) = y + z = x$.

$\forall x \in E$, $\psi(\psi(x)) = x$. $\psi \circ \psi = \mathrm{id}_E$. ψ est involutive.

Soit $(x,x') \in E^2$. $\exists!(y,z) \in \Delta\times\Delta^{\perp}$, $x = y+z$ et $\exists!(y',z') \in \Delta\times\Delta^{\perp}$, $x' = y'+z'$.

$\langle \psi(x), \psi(x')\rangle = \langle y-z, y'-z'\rangle = \langle y,y'\rangle - \langle z,y'\rangle - \langle y,z'\rangle + \langle z,z'\rangle = \langle y,y'\rangle + \langle z,z'\rangle$

$\langle x,x'\rangle = \langle y+z, y'+z'\rangle = \langle y,y'\rangle + \langle y,z'\rangle + \langle z,y'\rangle + \langle z,z'\rangle = \langle y,y'\rangle + \langle z,z'\rangle$; z et y' sont orthogonaux et y et z' aussi.

$\forall (x,x') \in E^2$, $\langle \psi(x), \psi(x')\rangle = \langle x,x'\rangle$. ψ conserve le produit scalaire.

b) Soit u un élément non nul de Δ. $\Delta = \mathrm{Vect}(u)$.
Montrons que : $\varphi = \varphi_u$
Soit $x \in E$. $\exists!(y,z) \in \Delta \times \Delta^\perp$, $x = y + z$. $\exists! \alpha \in \mathbb{R}$, $y = \alpha u$. $x = \alpha u + z$.
$$\varphi_u(x) = 2\frac{\langle \alpha u + z, u\rangle}{\langle u,u\rangle}u - (\alpha u + z) = 2\underbrace{\frac{\alpha\langle u,u\rangle + \langle z,u\rangle}{\langle u,u\rangle}}_{=\alpha \text{ car } \langle z,u\rangle = 0}u - \alpha u - z = 2\alpha u - \alpha u - z = \alpha u - z$$
$\varphi_u(x) = \alpha u - z = y - z = \varphi(y) + \varphi(z) = \varphi(y+z) = \varphi(x)$.
$\forall x \in E$, $\varphi_u(x) = \varphi(x)$. $\varphi_u = \varphi$.
$\exists u \in \Delta - \{0_E\}$, $\varphi = \varphi_u$.

c) Supposons que $\mathcal{M} = (m_{ij})$.
Alors $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_{ki}\, m_{kj}$.
Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.
$$\langle \varphi(e_i), \varphi(e_j)\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} m_{ki} e_k, \sum_{l=1}^{n} m_{lj} e_l \right\rangle = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} m_{ki}\, m_{lj}\, \underbrace{\langle e_k, e_l\rangle}$$
donc
$$\langle \varphi(e_i), \varphi(e_j)\rangle = \sum_{k=1}^{n} m_{ki}\, m_{kj} = a_{ij}$$
$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{ij} = \langle \varphi(e_i), \varphi(e_j)\rangle$.

Or $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\langle \varphi(e_i), \varphi(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$

donc $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$. ${}^t\mathcal{M}\mathcal{M} = I_n$.

Exercice : Montrer que si la matrice $\widetilde{\mathcal{M}}$, dans la base orthonormée $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ d'un endomorphisme $\hat{\varphi}$ de E vérifie ${}^t\widetilde{\mathcal{M}}\widetilde{\mathcal{M}} = I_n$ alors $\hat{\varphi}$ conserve le produit scalaire et réciproquement.

EXERCICE 2

Notons que le second exercice de 1994 d'ECRICOME consistait à montrer que

$$\int_0^1 x^{-x}\,dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^k} \;!!$$

Q1 a) f est continue sur $]0,1]$ donc f est localement intégrable sur $]0,1]$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^{-x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(e^{-x\ln x}\right) = 1$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} (x\ln x) = 0$.

f est donc prolongeable par continuité en 0. Donc $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge.

b) $\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $|u_n| \leq \frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{n^2}$.

La convergence de la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ et les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent la convergence de la série de terme général $|u_n|$.

La série de terme général u_n est absolument convergente donc est convergente.

Q2 a) Soit $(p,k) \in \mathbb{N}^2$. Posons $\forall x \in]0,1]$, $f_{p,k}(x) = x^p(\ln x)^k$

$f_{p,k}$ est continue sur $]0,1]$ donc localement intégrable sur cet intervalle.

1er cas.. $p \geq 1$. $\lim\limits_{x\to 0^+} f_{p,k}(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^p(\ln x)^k = 0$; $f_{p,k}$ est prolongeable par continuité en 0. Par conséquent $K_{p,k} = \int_0^1 f_{p,k}(x)\,dx$ converge.

2e cas.. $p=0$ $\quad \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\sqrt{x}\, f_{p,k}(x)\right) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\sqrt{x}(\ln x)^k\right) = 0$.

$\exists \alpha \in]0,1[$, $\forall x \in]0,\alpha]$, $|\sqrt{x}\, f_{p,k}(x)| \leq 1$. $\forall x \in]0,\alpha]$, $|f_{p,k}(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$

La convergence de $\int_0^\alpha \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ (Riemann...) et la positivité de $|f_{p,k}|$ indiquent que $\int_0^\alpha f_{p,k}(x)\,dx$ est absolument convergente donc convergente. $J_{p,k} = \int_0^1 f_{p,k}(x)\,dx$ converge également.

Finalement $K_{p,k}$ existe pour tout élément (p,k) de $\mathbb{N}^2$; en particulier $J_n = K_{n,n}$ existe pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Soit $(p,\ell)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$.

$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle\int_\varepsilon^1 x^p(\ln x)^\ell\,dx = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}(\ln x)^\ell\right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{x^{p+1}}{p+1}\times\ell\times\frac{1}{x}(\ln x)^{\ell-1}\,dx$

$\begin{cases} u'(x)=x^p \\ v(x)=(\ln x)^\ell \end{cases}$

$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle\int_\varepsilon^1 x^p(\ln x)^\ell\,dx = -\frac{\varepsilon^{p+1}(\ln\varepsilon)^\ell}{p+1} - \frac{\ell}{p+1}\int_\varepsilon^1 x^p(\ln x)^{\ell-1}\,dx$

$K_{p,\ell}$ et $K_{p,\ell-1}$ existent, et $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\varepsilon^{p+1}(\ln\varepsilon)^\ell\right)=0$

Par conséquent : $\underline{K_{p,\ell} = -\dfrac{\ell}{p+1}K_{p,\ell-1}}$

c) Fixons p dans $\mathbb{N}$. $\forall\ell\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{K_{p,\ell}}{\ell!} = -\dfrac{1}{p+1}\,\dfrac{K_{p,\ell-1}}{(\ell-1)!}$; la suite $\left(\dfrac{K_{p,\ell}}{\ell!}\right)_{\ell\geq0}$ est

donc une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{p+1}$; son premier terme est $K_{p,0}=\displaystyle\int_0^1 x^p\,dx = \frac{1}{p+1}$.

Par conséquent : $\forall\ell\in\mathbb{N}$, $\dfrac{K_{p,\ell}}{\ell!} = \left(-\dfrac{1}{p+1}\right)^\ell\dfrac{1}{p+1} = \dfrac{(-1)^\ell}{(p+1)^{\ell+1}}$

donc $\underline{\forall(p,\ell)\in\mathbb{N}^2,\ K_{p,\ell} = \dfrac{(-1)^\ell\,\ell!}{(p+1)^{\ell+1}}}$; et donc $\underline{\forall n\in\mathbb{N},\ J_n = \dfrac{(-1)^n\,n!}{(n+1)^{n+1}}}$.

(Q3) Calcul de I.

a) Étudions la fonction φ définie par $\forall x\in\,]0,1]$, $\varphi(x)=x\ln x$

φ est dérivable sur $]0,1]$ et $\forall x\in\,]0,1]$, $\varphi'(x)=\ln x+1=\ln x-\ln\frac{1}{e}$

x	0		$1/e$		1
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	0	$\searrow$	$-1/e$	$\nearrow$	0

$\displaystyle\lim_{x\to0^+}\varphi(x)=0$. De cette étude il résulte que :

$\forall x\in\,]0,1]$, $-\frac{1}{e}\leq x\ln x\leq 0$

donc $\underline{\forall x\in\,]0,1],\ |x\ln x|\leq 1/e}$.

Remarque : $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\varphi(x)=0$. φ est donc prolongeable par continuité en 0. Nous notons

$\hat{\varphi}$ son prolongement par continuité. $\forall x\in[0,1]$, $\hat{\varphi}(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x=0\\ x\ln x & \text{si } x\in\,]0,1]\end{cases}$.

b) Notons pour éclaircir le début que : $\forall n\in\mathbb{N},\ I-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}J_k=\int_0^1\left(e^{x\ln x}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(x\ln x)^k}{k!}\right)dx$

$h: u\mapsto e^u$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. $\forall n\in\mathbb{N},\ h^{(n)}=h$.

L'inégalité de Taylor indique alors que :

$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall u\in\mathbb{R},\ \left|h(u)-\sum_{k=0}^{n}\frac{h^{(k)}(0)}{k!}u^k\right|\leq\frac{|u-0|^{n+1}}{(n+1)!}\max_{t\in[0,u]}|h^{(n+1)}(t)|$

$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall u\in\mathbb{R},\ \left|e^u-\sum_{k=0}^{n}\frac{u^k}{k!}\right|\leq\frac{|u|^{n+1}}{(n+1)!}\max_{t\in[0,u]}|e^t|$. En particulier

$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in]0,1],\ \left|e^{x\ln x}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(x\ln x)^k}{k!}\right|\leq\frac{|x\ln x|^{n+1}}{(n+1)!}\max_{t\in[x\ln x,0]}e^t\leq\frac{(1/e)^{n+1}}{(n+1)!}\times 1$

$|x\ln x|\leq 1/e$ et $e^t\leq 1$ si $t\in[x\ln x,0]$

Donc $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in]0,1],\ \left|e^{x\ln x}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(x\ln x)^k}{k!}\right|\leq\frac{(1/e)^{n+1}}{(n+1)!}$.

ce qui s'écrit encore $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0,1],\ \left|e^{\hat\varphi(x)}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(\hat\varphi(x))^k}{k!}\right|\leq\frac{(1/e)^{n+1}}{(n+1)!}$.

Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$\left|I-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}J_k\right|=\left|\int_0^1\left(e^{x\ln x}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(x\ln x)^k}{k!}\right)dx\right|=\left|\int_0^1\left(e^{\hat\varphi(x)}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(\hat\varphi(x))^k}{k!}\right)dx\right|\leq\int_0^1\left|e^{\hat\varphi(x)}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(\hat\varphi(x))^k}{k!}\right|dx\leq\underbrace{\int_0^1\frac{(1/e)^{n+1}}{(n+1)!}dx}_{=\frac{(1/e)^{n+1}}{(n+1)!}}$$

Finalement : $\forall n\in\mathbb{N},\ \left|I-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}J_k\right|\leq\frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{e^{n+1}}$.

---

c) La série de terme général $\frac{(1/e)^n}{n!}$ est convergente donc $\lim_{n\to+\infty}\frac{(1/e)^n}{n!}=0$, par conséquent : $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{e^{n+1}}=0$. L'inégalité précédente et le théorème d'encadrement donnent alors $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}J_k=I$.

Donc la série de terme général $\frac{1}{k!}J_k$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}J_k=I$

Or $\forall k\in\mathbb{N},\ \frac{1}{k!}J_k=\frac{(-1)^k k!}{k!(k+1)^{k+1}}=\frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}}$. Donc $I=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}}$.

---

d) $\forall n\in\mathbb{N},\ \left|I-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}}\right|\leq\frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{e^{n+1}}$; $\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}}$ est une valeur approchée de I à $\frac{1}{(n+1)!e^{n+1}}$ près pour tout $n\in\mathbb{N}$. $\left(\frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{e^{n+1}}\right)_{n\geq 0}$ est décroissante et son terme d'indice 6 est $1,7\times10^{-7}$ et son terme d'indice 7 est $9,3\times10^{-9}$. Donc $\sum_{k=0}^{7}\frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}}$ est une valeur approchée de I à 10^{-7} près

... donc $I\simeq 0,783\,43052$ et [illegible] valeur approchée de I à 1×10^{-7}

PROBLÈME

3.1 Etude de deux guichets

3.1.1. Etude d'un évènement.

Rappel. Si Y est une v.a.r. sur $(\Omega,\mathcal{B},P)$ et si Y suit une loi uniforme sur $[a,b]$:

$$\forall y\in\mathbb{R},\ F_Y(y)=\begin{cases}0 & \text{si } y\in\,]-\infty,a[\ (\text{ou }]-\infty,a])\\ \dfrac{y-a}{b-a} & \text{si } y\in[a,b]\\ 1 & \text{si } y\in\,]b,+\infty[\ (\text{ou } [b,+\infty[)\end{cases}$$ et on peut prendre :

$$\forall y\in\mathbb{R},\ f_Y(y)=\begin{cases}0 & \text{si } y\notin[a,b]\\ \dfrac{1}{b-a} & \text{si } y\in[a,b]\end{cases}$$

En particulier pour $a=0$ et $b=1$ on obtient, $\forall y\in\mathbb{R},\ F_Y(y)=\begin{cases}0 & \text{si } y\in\,]-\infty,0[\\ y & \text{si } y\in[0,1]\\ 1 & \text{si } y\in[1,+\infty[\end{cases}$ et

$\forall y\in\mathbb{R},\ f_Y(y)=\begin{cases}0 & \text{si } y\notin[0,1]\\ 1 & \text{si } y\in[0,1]\end{cases}$

Pour $a=-1$ et $b=0$ on obtient : $\forall y\in\mathbb{R},\ F_Y(y)=\begin{cases}0 & \text{si } y\in\,]-\infty,-1[\\ y+1 & \text{si } y\in[-1,0]\\ 1 & \text{si } y\in[0,+\infty[\end{cases}$ et $\forall y\in\mathbb{R},\ f_Y(y)=\begin{cases}0 & \text{si } y\notin[-1,0]\\ 1 & \text{si } y\in[-1,0]\end{cases}$

Q1 Soit $x\in\mathbb{R}$. $F_{X'_2}(x)=P(X'_2\le x)=P(-X_2\le x)=P(X_2\ge -x)=1-P(X_2<-x)=1-P(X_2\le -x)=1-F_{X_2}(-x)$

Si $-x<0$ alors $F_{X'_2}(x)=1-0=1$, si $-x\in[0,1]$, $F_{X'_2}(x)=1-(-x)$, si $-x\in\,]1,+\infty[$, $F_{X'_2}(x)=1-1$

donc $F_{X'_2}(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\in\,]-\infty,-1[\\ 1+x & \text{si } x\in[-1,0]\\ 1 & \text{si } x\in\,]0,+\infty[\end{cases}$. donc X'_2 suit une loi uniforme sur $[-1,0]$.

Nous obtenons $\forall x\in\mathbb{R},\ f_{X'_2}(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\notin[-1,0]\\ 1 & \text{si } x\in[-1,0]\end{cases}$.

Q2 Posons $\forall t\in\mathbb{R},\ \varphi_1(t)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x)\,f_{X'_2}(t-x)\,dx$. φ_1 est une densité de Y_1 car

$Y_1=X_1+X'_2$, et X_1 et X'_2 sont indépendantes.

$u=t-x$; $du=-dx$

$f_{X_1}(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\notin[0,1]\\ 1 & \text{si } x\in[0,1]\end{cases}$ donc $\forall t\in\mathbb{R},\ \varphi_1(t)=\displaystyle\int_0^1 f_{X'_2}(t-x)\,dx = \int_t^{t-1} f_{X'_2}(u)(-du)$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi_1(t) = \displaystyle\int_{t-1}^{t} f_{X'_2}(u)\,du$. Notons que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $t-1 < t$!

Rappelons que $f_{X'_2}(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \notin [-1,0] \\ 1 & \text{si } u \in [-1,0] \end{cases}$. Envisageons alors quatre cas.

1er cas.. $t \in]-\infty,-1[$: $[t-1,t] \subset]-\infty,-1[$. $\varphi_1(t) = \displaystyle\int_{t-1}^{t} 0\,du = 0$.

2ème cas.. $t \in [-1,0[$. Alors : $t-1 < -1$. $\varphi_1(t) = \displaystyle\int_{-1}^{t} 1\,du = t-(-1) = t+1 = 1-|t|$

3ème cas.. $t \in [0,1[$. Alors : $-1 \leq t-1 < 0$. $\varphi_1(t) = \displaystyle\int_{t-1}^{0} 1\,du = -(t-1) = 1-t = 1-|t|$

4ème cas.. $t \in [1,+\infty[$. Alors : $0 \leq t-1$. $\varphi_1(t) = \displaystyle\int_{t-1}^{t} 0\,du = 0$

à un point près !

Par conséquent : $\forall t \in]-\infty,-1[\cup [1,+\infty[$, $\varphi_1(t) = 0$ et $\forall t \in [-1,1[$, $\varphi_1(t) = 1-|t|$.

Nous pouvons encore écrire que :

$\forall t \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, $\varphi_1(t) = 0$ et $\forall t \in [-1,1]$, $\varphi_1(t) = 1-|t|$. On peut encore écrire $\begin{cases} \forall t \in [-1,1], \ \varphi_1(t) = 1-|t| \\ \forall t \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[, \ \varphi_1(t) = 0 \end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\Phi_1(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \varphi_1(t)\,dt$

1er cas.. $x \in]-\infty,-1[$. $\Phi_1(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$.

2ème cas.. $x \in [-1,0[$. $\Phi_1(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} \varphi_1(t)\,dt = \int_{-1}^{x} (1-|t|)\,dt = \int_{-1}^{x} (1+t)\,dt = \left[\frac{(1+t)^2}{2}\right]_{-1}^{x} = \frac{(1+x)^2}{2}$

3ème cas.. $x \in [0,1[$. $\Phi_1(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} \varphi_1(t)\,dt = \int_{-1}^{x} (1-|t|)\,dt = \int_{-1}^{0} (1+t)\,dt + \int_{0}^{x} (1-t)\,dt = \left[\frac{(1+t)^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{(1-t)^2}{2}\right]_{0}^{x}$

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{2} - \frac{(1-x)^2}{2} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{(1-x)^2}{2}$$

4ème cas.. $x \in [1,+\infty[$. $\Phi_1(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \varphi_1(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(t)\,dt = 1$

$\varphi_1(t) = 0$ si $t > 1$ et même pour $t \geq 1$

Résumons :

$\forall x\in]-\infty,-1[,\ \Phi_1(x)=0,\ \forall x\in[-1,0[,\ \Phi_1(x)=\frac{(1+x)^2}{2},\ \forall x\in[0,1[,\ \Phi_1(x)=1-\frac{(1-x)^2}{2}$ et

$\forall x\in[1,+\infty[,\ \Phi_1(x)=1$. On peut encore écrire la fonction en remplaçant $]-\infty,-1[$, $[-1,0[$, $[0,1[$ et $[1,+\infty[$ par $]-\infty,-1]$, $[-1,0]$, $[0,1]$, $[1,+\infty[$.

Q3 Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\Phi_2(x)=p(Z_2\leq x)=p(|Y_1|\leq x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ p(-x\leq Y_1\leq x) & \text{si } x\geq 0\end{cases}$$

Si $x\in\mathbb{R}^*_-$, $\Phi_2(x)=0$. Supposons x élément de $\mathbb{R}_+$.

$\Phi_2(x)=p(-x\leq Y_1\leq x)=\Phi_1(x)-\Phi_1(-x)$ $\quad -x\in]-1,0]$

$\Phi_2(x)$: * $x<1$. $\Phi_2(x)=\Phi_1(x)-\Phi_1(-x)=1-\frac{(1-x)^2}{2}-\frac{(1+(-x))^2}{2}=1-(1-x)^2=2x-x^2$

* $x\geq 1$. $\Phi_2(x)=\Phi_1(x)-\Phi_1(-x)=1-0=1$

Résumons.. $\forall x\in]-\infty,0[,\ \Phi_2(x)=0$; $\forall x\in[0,1[,\ \Phi_2(x)=2x-x^2$; $\forall x\in[1,+\infty[,\ \Phi_2(x)=1$.

Nous pouvons encore écrire: $\forall x\in]-\infty,0],\ \Phi_2(x)=0$, $\forall x\in[0,1],\ \Phi_2(x)=2x-x^2$ et $\forall x\in[1,+\infty[,\ \Phi_2(x)=1$

Φ_2 est alors continue et dérivable sur $]-\infty,0]$, $[0,1]$ et $[1,+\infty[$.

Φ_2 est donc continue sur $\mathbb{R}$ et au moins dérivable sur $\mathbb{R}-\{0,1\}$.

$\forall x\in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[,\ \Phi_2'(x)=0$ et $\forall x\in]0,1[,\ \Phi_2'(x)=2-2x$.

Φ_2' est continue sur $\mathbb{R}-\{0,1\}$.

Tout ceci permet de dire que 1°. Z_2 est une variable aléatoire à densité

2°. si l'on pose $\forall x\in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$ $\varphi_2(x)=0$ et $\forall x\in[0,1]$, $\varphi_2(x)=2-2x$ on obtient une densité de Z_2.

$\forall x\in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[,\ \varphi_2(x)=0$ et $\forall x\in[0,1],\ \varphi_2(x)=2-2x$.

Q4 Z_2 et $-X_3$ sont indépendantes. Nous pouvons donc:

$$\forall t\in\mathbb{R},\ \varphi_3(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_2(x)\,f_{-X_3}(t-x)\,dx$$ en ayant posé:

$\forall u\in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[,\ f_{-X_3}(u)=0$ et $\forall u\in[-1,0],\ f_{-X_3}(u)=1$ car $-X_3\hookrightarrow U([-1,0])$ d'après 3.1.1.Q1.

Donc $\forall t\in\mathbb{R}$, $\varphi_3(t)=\int_0^1 (2-2x)\, f_{-X_3}(t-x)\,dx = \int_t^{t-1} (2-2(t-u))\, f_{-X_3}(u)(-du) = \int_{t-1}^{t} (2-2t+2u)\, f_{-X_3}(u)\,du$

$u=t-x$
$x=t-u$
$dx=-du$

1er cas... $t<-1$. $\varphi_3(t)=\int_{t-1}^{t}(2-2t+2u)\times 0\,du=0$

2e cas... $-1\le t<0$; $t-1<-1$; $\varphi_3(t)=\int_{-1}^{t}(2-2t+2u)\,du=\left[(2-2t)u+u^2\right]_{-1}^{t}=(2-2t)t+t^2+2-2t-1$

$\varphi_3(t)=1-t^2$.

3e cas... $0\le t<1$; $t-1<0$; $\varphi_3(t)=\int_{t-1}^{0}(2-2t+2u)\,du=\left[(2-2t)u+u^2\right]_{t-1}^{0}=-(2-2t)(t-1)-(t-1)^2$

$\varphi_3(t)=(t-1)^2$.

4e cas... $1\le t$; $\varphi_3(t)=\int_{t-1}^{t}(2-2t+2u)\, f_{-X_3}(u)\,du=\int_{t-1}^{t}(2-2t+2u)\times 0\,du=0$

$\varphi_3(t)=0$.

Résumons : $\forall t\in]-\infty,-1[$, $\varphi_3(t)=0$; $\forall t\in[-1,0[$, $\varphi_3(t)=1-t^2$; $\forall t\in[0,1[$, $\varphi_3(t)=(t-1)^2$; $\forall t\in[1,+\infty[$, $\varphi_3(t)=0$ ... ou $\forall t\in]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$, $\varphi_3(t)=0$; $\forall t\in[-1,0]$, $\varphi_3(t)=1-t^2$; $\forall t\in[0,1]$, $\varphi_3(t)=(t-1)^2$

b) $P([Z_3-X_3\le 0])=\int_{-\infty}^{0}\varphi_3(t)\,dt=\int_{-1}^{0}(1-t^2)\,dt=\left(t-\frac{t^3}{3}\right)_{-1}^{0}=0-\left(-1+\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}$.

$P([Z_3-X_3\le 0])=\frac{2}{3}$.

c) E est l'événement A_3 quitte la maison en dernier signifie exactement que X_3 prend une valeur supérieure (ou égale ?) à $Z=|X_1-X_2|$

Donc $P(E)=\frac{2}{3}$.

3.1.2. Etude d'une variable aléatoire.

(Q1) T_3 n'est autre que le temps* passé par A_3 à la mairie.

* Temps minimum ... il se peut que A_3 ait une très bonne copine à la mairie

(Q2) Soit $x \in \mathbb{R}$. $F(x) = p(\inf(X_1,X_2) \leq x) = 1 - p(\inf(X_1,X_2) > x) = 1 - p(X_1 > x \cap X_2 > x)$

$F(x) = 1 - p(X_1 > x)\,p(X_2 > x)$ car X_1 et X_2 sont indépendantes.

$F(x) = 1 - (1-p(X_1 \leq x))(1-p(X_2 \leq x)) = 1 - (1-F_{X_1}(x))(1-F_{X_2}(x)) \underset{F_{X_1} = F_{X_2}}{=} 1 - (1-F_{X_1}(x))^2$

$\forall x \in]-\infty, 0[$, $F(x) = 1 - (1-0)^2 = 0$

$\forall x \in [0,1[$, $F(x) = 1 - (1-x)^2 = 2x - x^2$

$\forall x \in [1,+\infty[$, $F(x) = 1 - (1-1)^2 = 1$

$\forall x \in]-\infty,0[$, $F(x) = 0$, $\forall x \in [0,1[$, $F(x) = 2x - x^2$, $\forall x \in [1,+\infty[$, $F(x) = 1$

Notons que : $F = \Phi_2$.

Ainsi nous prenons $f = \varphi_2$.

$\forall x \in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$, $f(x) = 0$ et $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = 2 - 2x$.

(Q3) Notons encore que $\inf(X_1,X_2)$ et X_3 sont indépendantes, par conséquent on pose

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) f_{X_3}(t-x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-x) f_{X_3}(x)\,dx$ on définit une densité de T_3.

$f_{X_3}(x) = 1$ si $x \in [0,1]$ et 0 si $x \notin [0,1]$. Donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \int_0^1 f(t-x)\,dx \underset{t-x=u}{=} \int_t^{t-1} f(u)(-du) = \int_{t-1}^{t} f(u)\,du$

1er cas. Soit $t \in]-\infty,0[$. $\varphi(t) = \int_{t-1}^{t} 0\,du = 0$

2e cas. Soit $t \in [0,1[$. $t-1 < 0$

$\varphi(t) = \int_0^t (2-2u)\,du = [2u-u^2]_0^t = 2t - t^2$

3e cas. Soit $t \in [1,2[$. $0 \leq t-1$. $\varphi(t) = \int_{t-1}^{1} (2-2u)\,du = [2u-u^2]_{t-1}^{1} = 1 - (2(t-1)-(t-1)^2) = t^2-4t+4 = (t-2)^2$

4e cas. Soit $t \in [2,+\infty[$, $1 \leq t-1$. $\varphi(t) = \int_{t-1}^{t} 0\,du = 0$

Finalement : $\forall t \in]-\infty,0[\cup [2,+\infty[$, $\varphi(t) = 0$. $\forall t \in [0,1[$, $\varphi(t) = 2t - t^2$. $\forall t \in [1,2[$, $\varphi(t) = (t-2)^2$

Résumé $\forall t \in]-\infty,0] \cup [2,+\infty[$, $\varphi(t) = 0$. $\forall t \in [0,1]$, $\varphi(t) = 2t-t^2$. $\forall t \in [1,2]$, $\varphi(t) = (t-2)^2$

Remarque : On pouvait aussi procéder de la manière suivante.

$\inf(X_1,X_2)$ et $Z_1=|Y_1|=|X_1-X_2|$ ont même loi, par conséquent Z_1-X_3 et $\inf(X_1,X_2)-X_3$ ont même loi (en effet Z_1 et $-X_3$ sont indépendantes et $\inf(X_1,X_2)$ et $-X_3$ sont indépendantes...). Ainsi Z_1-X_3+1 et $\inf(X_1,X_2)-X_3+1$ ont même loi ; il ne reste plus qu'à remarquer que X_3 et $1-X_3$ ont même loi donc $T_3=\inf(X_1,X_2)+X_3$ a même loi que $\inf(X_1,X_2)-X_3+1$ donc que Z_1-X_3+1. Par conséquent si φ_1 est une densité de Z_1-X_3, $t\mapsto\varphi_1(t-1)$ est une densité de T_3 ... on retrouve ainsi φ.

Notons que φ est continue sur $]-\infty,0]$, $[0,1]$, $[1,2]$ et $[2,+\infty[$ donc sur $\mathbb{R}$.
Par conséquent $t\mapsto t\varphi(t)$ et $t\mapsto t^2\varphi(t)$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et nulles sur $]-\infty,0]$ et $[2,+\infty[$.
Cela suffit pour dire que $\int_{-\infty}^{+\infty}t\varphi(t)dt$ converge et vaut $\int_0^2 t\varphi(t)dt$ et que $\int_{-\infty}^{+\infty}t^2\varphi(t)dt$ converge également et vaut $\int_0^2 t^2\varphi(t)dt$.

Par conséquent T_3 possède une espérance et une variance.

$$\int_0^2 t\varphi(t)dt=\int_0^1 t(2t-t^2)dt+\int_1^2 t(t-2)^2dt=\left[\frac{2}{3}t^3-\frac{t^4}{4}\right]_0^1+\left[\frac{t^4}{4}-\frac{4}{3}t^3+2t^2\right]_1^2=\frac{5}{12}+\frac{5}{12}=\frac{5}{6}$$

Donc $\underline{E(T_3)=\frac{5}{6}}$.

$$\int_0^2 t^2\varphi(t)dt=\int_0^1 t^2(2t-t^2)dt+\int_1^2 t^2(t-2)^2dt=\int_0^1(2t^3-t^4)dt+\int_1^2(t^4-4t^3+4t^2)dt$$

$$\int_0^2 t^2\varphi(t)dt=\left[\frac{t^4}{2}-\frac{t^5}{5}\right]_0^1+\left[\frac{t^5}{5}-t^4+\frac{4}{3}t^3\right]_1^2=\frac{3}{10}+\frac{8}{15}=\frac{5}{6}.\quad E(T_3^2)=\frac{5}{6}$$

$V(T_3)=\frac{5}{6}-\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{5}{36}$. $\underline{V(T_3)=\frac{5}{36}}$.

3. 2. Etude de n guichets.

Q1 $U_n=\inf(X_1,X_2,\dots,X_n)$.
Soit $x\in\mathbb{R}$.

$F_{U_n}(x)=P(\inf(X_1,X_2,\dots,X_n)\le x)=1-P(\inf(X_1,\dots,X_n)>x)=1-P((X_1>x)\cap(X_2>x)\cap\dots\cap(X_n>x))$

Par indépendance mutuelle : $F_{U_n}(x)=1-\prod_{k=1}^n P(X_k>x)=1-\prod_{k=1}^n(1-F_{X_k}(x))=1-(1-F_{X_1}(x))^n$

On $\forall x\in\mathbb{R}$, $F_{X_1}(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0 \text{ ou si } x\leq 0\\ 1-e^{-\lambda x} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$

Donc $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $F_{U_n}(x)= 1-(1-(1-e^{-\lambda x}))^n = 1-e^{-\lambda n x}$; $\forall x\in\mathbb{R}_-$, $F_{U_n}(x)=0$.

Ainsi U_n suit une loi exponentielle de paramètre λn.

$E(U_n)=\frac{1}{\lambda n}$ et $V(U_n)=\frac{1}{(\lambda n)^2}$.

Q2 $V_n=\max(X_1,X_2,\dots,X_n)$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $F_{V_n}(x)=p(\max(X_1,X_2,\dots,X_n)\leq x)=p((X_1\leq x)\cap(X_2\leq x)\cap\dots\cap(X_n\leq x))$

$\forall x\in\mathbb{R}$, $F_{V_n}(x)=p(X_1\leq x)p(X_2\leq x)\cdots p(X_n\leq x)$ par indépendance.

$\forall x\in]-\infty,0[$, $F_{V_n}(x)=0$ et $\forall x\in[0,+\infty[$, $F_{V_n}(x)=(1-e^{-\lambda x})^n$.

Notons que F_{V_n} est continue et dérivable sur $]-\infty,0[$ et $[0,+\infty[$. Donc F_{V_n} est continue sur $\mathbb{R}$ et au moins dérivable, en tout point de $\mathbb{R}^*$.

$\forall x\in\mathbb{R}^*_-$, $F'_{V_n}(x)=0$ et $\forall x\in\mathbb{R}^*_+$, $F'_{V_n}(x)=n(-(-\lambda)e^{-\lambda x})(1-e^{-\lambda x})^{n-1}=n\lambda e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{n-1}$

F'_{V_n} est donc continue sur $\mathbb{R}^*$.

Tout ceci permet de dire que V_n est une variable aléatoire à densité qui admet pour densité g définie par:

$\forall x\in]-\infty,0[$, $g(x)=0$ et $\forall x\in[0,+\infty[$, $g(x)=n\lambda e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{n-1}$.

Rappel.. $b\in\mathbb{R}^*_+$ et $\tau\in\mathbb{R}^*_+$ .. Si X est une variable aléatoire qui suit une loi gamma de paramètre b et τ, X admet pour densité f_X définie par

$f_X(x)=0$ si $x\in]-\infty,0]$ et $f_X(x)=\dfrac{e^{-\frac{x}{b}}x^{\tau-1}}{b^\tau\,\Gamma(\tau)}$

ceci permet d'affirmer que : $\int_0^{+\infty}e^{-x/b}x^{\tau-1}dx$ converge et vaut $b^\tau\Gamma(\tau)$.

En particulier $\forall a\in\mathbb{R}^*_+$, $\forall p\in\mathbb{N}^*$, $\int_0^{+\infty}e^{-ax}x^{p-1}dx$ converge et vaut $\dfrac{\Gamma(p)}{a^p}=\dfrac{(p-1)!}{a^p}$

$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \ xg(x)=0$. $\int_{-\infty}^{0} xg(x)\,dx$ existe et vaut 0.

$\forall x \in \mathbb{R}_+, \ xg(x) = n\lambda\, x e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{n-1} = n\lambda \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k}(-1)^k x\,(e^{-\lambda x})^{k+1} = n\lambda \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k}(-1)^k x e^{-\lambda(k+1)x}$

Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda(k+1)x} x\,dx$ existe et vaut $\frac{1!}{(\lambda(k+1))^2}$.

Par conséquent $\int_0^{+\infty} xg(x)\,dx$ existe (combinaison linéaire d'intégrales convergentes) et vaut

$$n\lambda \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k}(-1)^k \frac{1}{\lambda^2(k+1)^2} = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k+1}\underbrace{\frac{n}{k+1}C_{n-1}^{k}}_{C_n^{k+1}} = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k+1}C_n^{k+1}$$

Donc <u>V_n possède une espérance et $E(V_n) = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k+1}C_n^{k+1}$.</u>

Remarque $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k+1}C_n^{k+1} = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k x^k C_n^{k+1}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{-x}\sum_{k=0}^{n-1}(-x)^{k+1}C_n^{k+1}\,dx$

$$= \int_0^1 \frac{1}{-x}\sum_{k=1}^{n}(-x)^k C_n^k\,dx = \int_0^1 \frac{(1-x)^n-1}{-x}\,dx = \int_0^1 \frac{1-(1-x)^n}{1-(1-x)}\,dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1}(1-x)^k\,dx$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 (1-x)^k\,dx = \sum_{k=0}^{n-1}\left[-\frac{(1-x)^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

Donc <u>$E(V_n) = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.</u>

Q3) Notons que la probabilité pour que A_k ait terminé sa démarche à l'instant t est : $p(X_k \le t) = F_{X_k}(t) = 1-e^{-\lambda t}$. Notons que $A_1, A_2, \dots, A_n$ accomplissent leur démarche de manière indépendante.

Par conséquent <u>W_t suit une loi binomiale de paramètres n et $1-e^{-\lambda t}$.</u>

<u>$E(W_t) = n(1-e^{-\lambda t})$.</u>

3.3. Etude d'un guichet

Q1 Soit $k\in\mathbb{N}^*$. $X_k \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ donc $X_k \hookrightarrow \Gamma(\frac{1}{\lambda},1)$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $X_k\hookrightarrow\Gamma(\frac{1}{\lambda},1)$ et $X_1,X_2,\dots,X_n$ sont mutuellement indépendantes donc : $X_1+X_2+\dots+X_n \hookrightarrow \Gamma(\frac{1}{\lambda},n)$.

Posons $\forall x\in]-\infty,0]$, $f_n(x)=0$ et $\forall x\in]0,+\infty[$, $f_n(x)=\dfrac{e^{-\lambda x}x^{n-1}}{(1/\lambda)^n\Gamma(n)}=\dfrac{\lambda^n e^{-\lambda x}x^{n-1}}{(n-1)!}$

f_n est une densité de probabilité de $X_1+X_2+\dots+X_n$

Remarque.. Posons $\forall x\in]-\infty,0[$, $\hat{f}_n(x)=0$ et $\forall x\in[0,+\infty[$, $\hat{f}_n(x)=\dfrac{\lambda^n e^{-\lambda x}x^{n-1}}{(n-1)!}$. $\hat{f}_n$ est aussi une densité de probabilité de $X_1+X_2+\dots+X_n$ (qui coïncide avec f_n pour $n\geq 2$!).

Q2 Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$.

$$p(S\leq x\,/\,N=n)=\frac{p(\{S\leq x\}\cap\{N=n\})}{p(N=n)}=\frac{p(\{X_1+X_2+\dots+X_n\leq x\}\cap\{N=n\})}{p(N=n)}=\frac{p(\sum_{i=1}^n X_i\leq x)\,p(N=n)}{p(N=n)}$$

Donc $p(S\leq x/N=n)=p(\sum_{i=1}^n X_i\leq x)=\int_0^x f_n(t)\,dt=\dfrac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_0^x e^{-\lambda t}t^{n-1}\,dt$

a) Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. $(N=n)_{n\geq 1}$ est un système complet (ou quasi-complet) d'événements.

$$p(S\leq x)=\sum_{n=1}^{+\infty}p(S\leq x/N=n)\,p(N=n)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_0^x e^{-\lambda t}t^{n-1}\,dt\;p\,q^{n-1}$$

En admettant que l'on peut permuter intégrale :

$$p(S\leq x)=p\int_0^x\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{(n-1)!}t^{n-1}q^{n-1}\Big)e^{-\lambda t}\,dt=p\lambda\int_0^x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{n!}t^nq^n e^{-\lambda t}\,dt$$

$$p(S\leq x)=p\lambda\int_0^x e^{\lambda tq-\lambda t}\,dt=\int_0^x\lambda p\,e^{-\lambda pt}\,dt=\big[-e^{-\lambda pt}\big]_0^x=1-e^{-\lambda px}$$

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $p(S\leq x)=1-e^{-\lambda px}$. Quant à $\forall x\in\mathbb{R}_-$, $p(S\leq x)=0$

Par conséquent S suit une loi exponentielle de paramètre λp.

b) $E(S)=\dfrac{1}{\lambda p}=E(X_1)E(N)$! Exercice.. Justifier la permutation.