1.1 Etude préliminaire

Q1.. $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $f(x)=e^{x\ln x}$

f est donc continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car $x\mapsto x\ln x$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $x\mapsto e^x$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to0^+}(x\ln x)=0$, $\lim\limits_{x\to0^+} e^{x\ln x}=1=f(0)$. f est continue (à droite) en 0.

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{e^{x\ln x}-1}{x}$; $\dfrac{e^{x\ln x}-1}{x}\underset{0}{\sim}\dfrac{x\ln x}{x}=\ln x$ car $\lim\limits_{x\to0^+}(x\ln x)=0$

Par conséquent $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$

f n'est pas dérivable en 0.

Donc f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Q2.. $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $f(x)=e^{x\ln x}$ et $f'(x)=(1\times\ln x+x\times\frac{1}{x})e^{x\ln x}=(\ln x+1)e^{x\ln x}$

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $f'(x)=(\ln x-\ln\frac{1}{e})e^{x\ln x}$, le signe de f' est celui de $x\mapsto\ln x-\ln\frac{1}{e}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $f(\frac{1}{e})=e^{-1/e}$

x	0		$1/e$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$e^{-1/e}$	$\nearrow$	$+\infty$

Q3.. Une équation de la tangente (T) à C au point d'abscisse 1 est :

$y=f'(1)(x-1)+f(1)=x-1+1=x$ car $f'(1)=f(1)=1$.

Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $f(x)\geq x$

- C'est clair pour $x=0$.
- Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. $(x-1)\ln x\geq0$; $x\ln x\geq\ln x$; $e^{x\ln x}\geq e^{\ln x}$; $f(x)\geq x$.

$\forall x\in\mathbb{R}_+$, $f(x)\geq x$. (C) est au-dessus de (T).

Remarque.. On pouvait aussi remarquer que f est convexe sur $\mathbb{R}_+$.

Q4.. g est continue sur $I=[\frac{1}{e},+\infty[$ et strictement croissante ($g'(1/e)=0$ et $\forall x\in]\frac{1}{e},+\infty[,\ g'(x)>0$) ; g définit alors une bijection de l'intervalle $I=[\frac{1}{e},+\infty[$ sur l'intervalle $g(I)=g([\frac{1}{e},+\infty[)=[g(\frac{1}{e}),\lim_{+\infty} g[=[e^{-1/e},+\infty[$

<u>g réalise donc une bijection de $I=[\frac{1}{e},+\infty[$ sur $J=[e^{-1/e},+\infty[$.</u>

1.2 Etude d'une fonction

Q1.. Soit φ une application de J sur I.

$\forall x\in J,\ \varphi(x)^{\varphi(x)}=x \Leftrightarrow \forall x\in J,\ f(\varphi(x))=x \overset{\varphi(x)\in I}{\Leftrightarrow} \forall x\in J,\ g(\varphi(x))=x$

$\forall x\in J,\ \varphi(x)^{\varphi(x)}=x \Leftrightarrow \forall x\in J,\ g(\varphi(x))=x \Leftrightarrow \forall x\in J,\ \varphi(x)=g^{-1}(x)$.

g^{-1} étant une application de J sur I nous pouvons alors dire qu'<u>il existe une application φ, de J sur I et une seule telle que : $\forall x\in J,\ \varphi(x)^{\varphi(x)}=x$. $\varphi=g^{-1}$.</u>

Q2.. Soit $x\in J$. $\varphi(x)^{\varphi(x)}=x$; $\varphi(x)\ln(\varphi(x))=\ln x$; $\frac{\ln x}{\varphi(x)}=\ln\varphi(x)$.

$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}g^{-1}(x)=+\infty$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\varphi(x)}=\lim_{x\to+\infty}(\ln\varphi(x))=+\infty$

donc $\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{\ln x}=0$; <u>φ est négligeable devant $\ln$ en $+\infty$.</u>

Q3.. $\varphi=g^{-1}$. g est dérivable sur $[\frac{1}{e},+\infty[$
$g'(1/e)=0$ et $\forall x\in]\frac{1}{e},+\infty[,\ g'(x)\neq 0$

donc $\varphi=g^{-1}$ est dérivable en tout point de $]e^{-1/e},+\infty[$ et n'est pas dérivable en $g(\frac{1}{e})=e^{-1/e}$.

Par conséquent <u>$K=]e^{-1/e},+\infty[$.</u>

Soit $x\in K$. $\varphi'(x)=(g^{-1})'(x)=\dfrac{1}{g'(g^{-1}(x))}=\dfrac{1}{(1+\ln(\varphi(x)))\,e^{\varphi(x)\ln\varphi(x)}}$

$\varphi(x)^{\varphi(x)}=x$; $\varphi(x)\ln(\varphi(x))=\ln x$ donc $\varphi'(x)=\dfrac{1}{(1+\frac{\ln x}{\varphi(x)})\,e^{\ln x}}=\dfrac{\varphi(x)}{x(\varphi(x)+\ln x)}$

$\forall x \in K, \quad \varphi'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x\,\varphi(x) + \ln x}$.

Q4. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \in K$.

$y = \varphi'(n)(x-n) + \varphi(n)$ est une équation de (T_n)

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(n)(x-n) + \varphi(n) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{n\varphi'(n) - \varphi(n)}{\varphi'(n)} = n - \dfrac{\varphi(n)}{\varphi'(n)}$.

Donc $\underline{\underline{u_n = n - \dfrac{\varphi(n)}{\varphi'(n)}}}$.

$\varphi'(n) = \dfrac{\varphi(n)}{n[\varphi(n) + \ln n]}$; $\quad n\varphi(n) + \ln n = \dfrac{\varphi(n)}{\varphi'(n)}$. $\quad \underline{\underline{u_n = n - n\varphi(n) - n\ln n}}$

b) Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$

$u_n = n \ln n \left[\dfrac{1}{\ln n} - \dfrac{\varphi(n)}{\ln n} - 1 \right]$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\ln n} = \lim \dfrac{\varphi(n)}{\ln n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[\dfrac{1}{\ln n} - \dfrac{\varphi(n)}{\ln n} - 1 \right] = -1$

Par conséquent : $\underline{\underline{u_n \sim -n\ln n}}$.

EXERCICE 4

Q1.. a) Si $Q \in \mathbb{R}[X]$, $Q(X)+Q(X+1) \in \mathbb{R}[X]$ donc $\phi[Q(X)] \in \mathbb{R}[X]$.

ϕ est donc une application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (Q_1,Q_2) \in \mathbb{R}[X]^2$, $\phi[(\lambda Q_1+Q_2)(X)] = (\lambda Q_1+Q_2)(X)+(\lambda Q_1+Q_2)(X+1)$

$= \lambda(Q_1(X)+Q_1(X+1)) + Q_2(X)+Q_2(X+1)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (Q_1,Q_2) \in \mathbb{R}[X]^2$, $\phi[(\lambda Q_1+Q_2)(X)] = \lambda \phi[Q_1(X)] + \phi[Q_2(X)]$.

ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

b) i) Soit $Q \in \mathbb{R}_p[X]$.

$Q(X+1) \in \mathbb{R}_p[X]$ donc $\phi_p[Q(X)] \in \mathbb{R}_p[X]$.

ϕ_p est donc une application de $\mathbb{R}_p[X]$ dans $\mathbb{R}_p[X]$ linéaire comme restriction d'une application linéaire.

ϕ_p est un endomorphisme de $\mathbb{R}_p[X]$.

ii)

$\forall k \in [\![0,p]\!]$, $\phi_p(X^k) = X^k+(X+1)^k = 2X^k + \sum_{i=0}^{k-1} C_k^i X^i$

donc pour tout $k \in [\![0,p]\!]$, $\phi_p(X^k)$ est combinaison linéaire de $1, X, X^2, \dots, X^k$ et le coefficient de X^k dans cette combinaison linéaire est 2.

Ceci indique que la matrice de ϕ_p dans la base $\mathcal{B}_p$ est triangulaire supérieure et que sa diagonale est constituée de 2.

iii)

Cette matrice inversible car elle est triangulaire supérieure sans 0 sur sa diagonale.

ϕ_p est donc un automorphisme de $\mathbb{R}_p[X]$.

c) Soit $Q \in \operatorname{Ker} \phi$. $\exists p \in \mathbb{N}, Q \in \mathbb{R}_p[X]$.

$\phi_p(Q) = \phi(Q) = 0$; $Q \in \operatorname{Ker} \phi_p = \{0\}$; $Q = 0$.

Par conséquent : $\operatorname{Ker} \phi = \{0\}$. ϕ est injective.

Montrons que ϕ est surjective.

Soit $S \in \mathbb{R}[X]$. $\exists p \in \mathbb{N}$, $S \in \mathbb{R}_p[X]$. Comme ϕ_p est surjective, il existe $Q \in \mathbb{R}_p[X]$ tel que $\phi_p(Q) = S$ donc tel que $\phi(Q) = S$.

$\forall S \in \mathbb{R}[X], \exists Q \in \mathbb{R}[X], \phi(Q) = S$; ϕ est surjective.

Finalement ϕ est une application linéaire bijective de $\mathbb{R}[X]$ sur $\mathbb{R}[X]$.

ϕ est un automorphisme de E.

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. $2X^n \in \mathbb{R}[X]$ donc il existe un unique élément E_n de $\mathbb{R}[X]$ tel que $\phi(E_n) = 2X^n$ donc tel que $E_n(X) + E_n(X+1) = 2X^n$.

E_n n'est pas nul. Soit q son degré et a_q le coefficient de X^q dans E_n.

$E_n(X) + E_n(X+1)$ est de degré au plus q et le coefficient de X^q dans ce polynôme est $2a_q$.

Comme $2a_q$ n'est pas nul $E_n(X) + E_n(X+1)$ est exactement de degré q.

Or $E_n(X) + E_n(X+1) = 2X^n$ donc $q = n$ et $2a_q = 2$.

Finalement E_n est de degré n et est unitaire.

Q2. a) $E_n(X+1) + E_n(X) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} X^k + \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}(X+1)^k = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} X^k + \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} \sum_{j=0}^{k} C_k^j X^j$

$$E_n(X) + E_n(X+1) = \sum_{j=0}^{n} a_{n,j} X^j + \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k=j}^{n} a_{n,k} C_k^j \right) X^j$$

$$E_n(X) + E_n(X+1) = \sum_{j=0}^{n} \left[a_{n,j} + \sum_{k=j}^{n} C_k^j a_{n,k} \right] X^j .$$

b) Comme $E_n(X) + E_n(X+1) = 2X^n$

On a : $\begin{cases} a_{nn} + \sum_{k=n}^{n} C_k^n a_{n,k} = 2 & (\text{ie } 2a_{nn} = 2) \\ \text{et} \\ \forall j \in [\![0, n-1]\!], \ a_{nj} + \sum_{k=j}^{n} C_k^j a_{n,k} = 0 \end{cases}$

$a_{nn} = 1$ et $\forall j \in [\![0, n-1]\!], \ a_{nj} + \sum_{k=j}^{n} C_k^j a_{n,k} = 0$.

c) $\deg E_0 = 0$ et E_0 est unitaire donc $E_0 = 1$

$\deg E_1 = 1$ et E_1 est unitaire. $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $E_1 = X + \lambda$

$2X = E_1(X+1) + E_1(X) = X + 1 + \lambda + X + \lambda$; $2\lambda + 1 = 0$; $\lambda = -1/2$. $E_1 = X - \frac{1}{2}$.

$\deg E_2 = 2$ et E_2 est unitaire. $\exists (b,c) \in \mathbb{R}^2$, $E_2 = X^2 + bX + C$.

$2X^2 = E_2(X+1) + E_2(X) = (X+1)^2 + b(X+1) + C + X^2 + bX + C = 2X^2 + (2+b+b)X + 1 + b + 2C$

Donc $2+2b = 1+b+2C = 0$. $b = -1$ et $C = 0$. $\underline{E_2 = X^2 - X}$.

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $E_n(X+1) + E_n(X) = 2X^n$.

En dérivant : $E_n'(X+1) + E_n'(X) = 2nX^{n-1}$

Donc : $\frac{1}{n}E_n'(X+1) + \frac{1}{n}E_n'(X) = 2X^{n-1}$; $\left(\frac{1}{n}E_n'\right)(X+1) + \left(\frac{1}{n}E_n'\right)(X) = 2X^{n-1}$.

Par conséquent : $E_{n-1}(X) = \frac{1}{n}E_n'(X)$ car E_{n-1} est l'unique élément de $\mathbb{R}[X]$

tel que : $E_{n-1}(X+1) + E_{n-1}(X) = 2X^{n-1}$.

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E_n'(X) = n E_{n-1}(X)$

Soit $n \in \mathbb{N}$. $\forall k \in [\![n+1, +\infty [\![$, $E_n^{(k)}(X) = 0$ ($\deg E_n = n$).

Montrons par récurrence que : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $E_n^{(k)}(X) = \frac{n!}{(n-k)!} E_{n-k}(X)$

→ c'est vrai pour $k=0$

→ Supposons la propriété vraie pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ et montrons la pour $k+1$.

$$E_n^{(k+1)}(X) = \left(E_n^{(k)}(X)\right)' \underset{HR}{=} \left(\frac{n!}{(n-k)!} E_{n-k}(X)\right)' = \frac{n!}{(n-k)!} E_{n-k}'(X) \underset{n-k \geq 1}{=} \frac{n!}{(n-k)!}(n-k)\, E_{n-(k+1)}(X).$$

$E_n^{(k+1)}(X) = \frac{n!}{(n-k-1)!} E_{n-(k+1)}(X) = \frac{n!}{(n-(k+1))!} E_{n-(k+1)}(X)$. Ceci achève la récurrence.

$\underline{\forall k \in [\![0, n]\!],\ E_n^{(k)}(X) = \frac{n!}{(n-k)!} E_{n-k}(X) \text{ et } \forall k \in [\![n+1, +\infty [\![,\ E_n^{(k)}(X) = 0}$.

c) Pour prouver que $E_n(X) = (-1)^n E_n(1-X)$ il suffit de montrer que le polynôme $T_n(X) = (-1)^n E_n(1-X)$ vérifie $T_n(X) + T_n(X+1) = 2X^n$.

$T_n(X) + T_n(X+1) = (-1)^n E_n(1-X) + (-1)^n E_n(1-(X+1)) = (-1)^n \left[E_n((-X)+1) + E_n(-X)\right]$

$T_n(X) + T_n(X+1) = (-1)^n \left[2(-X)^n\right] = 2(-1)^n (-1)^n X^n = 2X^n$. C'est ce qu'il fallait prouver.

Donc $\underline{E_n(X) = (-1)^n E_n(1-X)}$.

Si n est pair et strictement positif : $\begin{cases} E_n(0)+E_n(1)=2\,0^n=0 \\ E_n(0)=(-1)^n E(1-0)=E_n(1) \end{cases}$ donc $E_n(0)=E_n(1)=0$

Si n est pair et strictement positif : $E_n(0)=E_n(1)=0$.

Si n est impair : $E_n(1/2)=(-1)^n E_n(1-1/2)=-E_n(1/2)$; si n est impair : $\underline{\underline{E_n(\frac{1}{2})=0.}}$

f.. $E_3'(X)=3E_2(X)=3(X^2-X)=3X^2-3X$, donc $E_3(X)=X^3-\frac{3}{2}X^2+a$ où $a\in\mathbb{R}$

$0=E_3(\frac{1}{2})=\frac{1}{8}-\frac{3}{8}+a$; $a=\frac{1}{4}$. $\underline{\underline{E_3(X)=X^3-\frac{3}{2}X^2+\frac{1}{4}.}}$

$E_4'(X)=4E_3(X)=4X^3-6X^2+1$; $E_4(X)=X^4-2X^3+X+d$ où $d\in\mathbb{R}$.

$E_4(0)=0$ donc $d=0$

$E_4=X^4-2X^3+X=X(X^3-2X^2+1)=(X)(X-1)(X^2-X-1)=X(X-1)(X^2-X-1)$.

$\underline{\underline{E_4(X)=X(X-1)(X^2-X-1).}}$

3.1 Etude d'une variable aléatoire.

Q1. a) F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, $F'(x) = f(x) = \dfrac{e^x(1+e^x)-e^x e^x}{(1+e^x)^2} = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{1+1/e^x}\right) = 1$

$\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	
$F(x)$	0	$\nearrow$	1

b) $\forall x\in\mathbb{R}$, $\dfrac{F(x)+F(-x)}{2} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{e^x}{1+e^x} + \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\right] = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{e^x}{1+e^x} + \dfrac{1}{e^x+1}\right] = \dfrac{1}{2}$

donc si $x\in\mathbb{R}$, le milieu des points de coordonnées $(x,F(x))$ et $(-x,F(-x))$ est le point de coordonnées $(0,\frac{1}{2})$ c'est à dire Ω.
donc Ω est centre de symétrie de Γ.
$F'(0)=\frac{1}{4}$ et $F(0)=\frac{1}{2}$. La tangente (Δ) à (Γ) en (Ω) admet pour équation :

$$y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}.$$

c) $\forall x\in\mathbb{R}$, $\dfrac{F(x)+F(-x)}{2} = \dfrac{1}{2}$

En dérivant il vient : $\forall x\in\mathbb{R}$, $\frac{1}{2}(f(x)-f(-x)) = 0$

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=f(-x)$; f est paire sur $\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{1}{(1+e^x)^4}\left[e^x(1+e^x)^2 - e^x\,2e^x(1+e^x)\right] = \dfrac{e^x\left((1+e^x)-2e^x\right)}{(1+e^x)^3}$

$\forall x\in\mathbb{R}$, $F''(x) = \dfrac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$. donc $\forall x\in\mathbb{R}_-$, $F''(x)\geq 0$ et $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $F''(x)\leq 0$.

F est convexe sur $\mathbb{R}_-$ et concave sur $\mathbb{R}_+$.

d) Voir plus loin.

e) F est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $F(\mathbb{R}) =]0,1[$ ($\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$)

Soit $x\in]0,1[$. Calculons $y=F^{-1}(x)$.

$F(y)=x$; $\dfrac{e^y}{1+e^y}=x$; $e^y(1-x)=x$; $e^y=\dfrac{x}{1-x}$; $y=\ln\dfrac{x}{1-x}$.

F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$ et $\forall x \in]0,1[$, $F^{-1}(x) = \ln \frac{x}{1-x}$.

E) f est continue sur $\mathbb{R}$. f est paire sur $\mathbb{R}$.

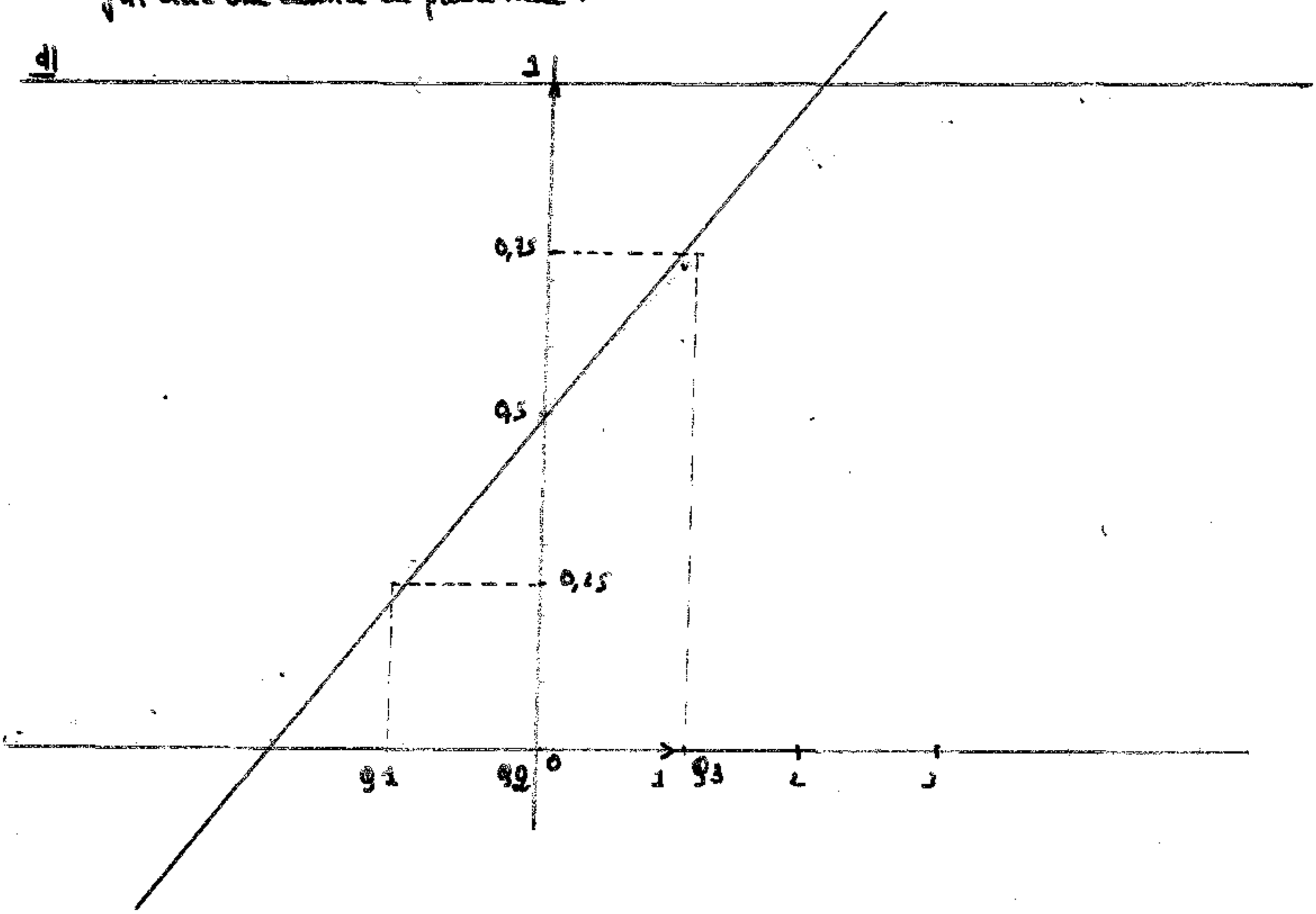
$\forall A \in \mathbb{R}_+$, $\int_0^A f(t)\,dt = F(A) - F(0) = \frac{e^A}{1+e^A} - \frac{1}{2}$

$\lim_{A \to +\infty} \int_0^A f(t)\,dt = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut $1/2$. Comme f est paire sur $\mathbb{R}$,

$\int_{-\infty}^0 f(t)\,dt$ converge et vaut $1/2$. Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut 1.

f est donc une densité de probabilité.

d)



Q2.. a) $q_i = F^{-1}(i/4) = \ln \frac{i/4}{1-i/4} = \ln \frac{i}{4-i}$. $q_1 = \ln \frac{1}{3}$. $q_2 = \ln 1 = 0$. $q_3 = \ln 3$.

$q_1 = -\ln 3$. $q_2 = 0$. $q_3 = \ln 3$.

b) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Si $\alpha < 0$: $P[|X| > \alpha] = 1 > \varepsilon$. Supposons $\alpha \geq 0$.

$p[\{|X|>\alpha\}] = p(X>\alpha)+p(X<-\alpha) = 1-p(X\leq\alpha)+p(X<-\alpha)$

$p[\{|X|>\alpha\}] = 1-\int_{-\infty}^{\alpha} f(t)\,dt + \int_{-\infty}^{-\alpha} f(t)\,dt = 1-\int_{-\alpha}^{\alpha} f(t)\,dt = 1-2\int_0^{\alpha} f(t)\,dt = 1-2(F(\alpha)-F(0))$

$p[\{|X|>\alpha\}] = 1+2F(0)-2F(\alpha) = 2-2F(\alpha)$. $\quad \frac{2-\varepsilon}{2} \in]0,1[$ et F^{-1} croissante

$p[\{|X|>\alpha\}] \leq \varepsilon \iff 2-2F(\alpha)\leq\varepsilon \iff \frac{2-\varepsilon}{2} \leq F(\alpha) \iff \alpha \geq F^{-1}\left(\frac{2-\varepsilon}{2}\right) = \ln \dfrac{\frac{2-\varepsilon}{2}}{1-\frac{2-\varepsilon}{2}}$

$p[\{|X|>\alpha\}] \leq \varepsilon \iff \alpha \geq \ln\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}$. Notons que $\ln\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon} \geq 0$ car $\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon} \geq 1$

donc le plus petit réel α tel que $p(\{|X|>\alpha\}) \leq \varepsilon$ est $\underline{\underline{\alpha = \ln\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}}}$.

c) $g : t \mapsto t f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et impaire.

$t f(t) = t\,\frac{e^t}{(1+e^t)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{t e^t}{e^{2t}} = t e^{-t}$ et $\forall t\in\mathbb{R}_+,\ t f(t) \geq 0$

Par conséquent : $\int_0^{+\infty} t f(t)\,dt$ et $\int_0^{+\infty} t e^{-t}\,dt$ sont de même nature.

$\forall A\in\mathbb{R}_+,\ \int_0^A \underset{u\,v'}{t\,e^{-t}}\,dt = [-te^{-t}]_0^A - \int_0^A (-e^{-t})\,dt = -Ae^{-A} - [e^{-t}]_0^A = -Ae^{-A}-e^{-A}+1$

$\lim \int_0^A te^{-t}\,dt = 1$; $\int_0^{+\infty} te^{-t}\,dt$ converge donc $\int_0^{+\infty} t f(t)\,dt$ aussi.

Par imparité $\int_{-\infty}^{0} t f(t)\,dt$ converge et vaut $-\int_0^{+\infty} t f(t)\,dt$

Par conséquent $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt$ existe et vaut 0.

X possède une espérance qui est nulle.

<u>3.2. Calcul de deux intégrales.</u>

Q1. a) $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ est continue sur $]0,1]$ et prolongeable par continuité en 0 car $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ ($\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$) ; donc $\underline{\underline{J = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx \text{ converge}}}$.

<u>b)</u> h est dérivable sur $]0,1]$ et $\forall \varepsilon \in]0,1],\ h'(\varepsilon) = -\dfrac{\ln \varepsilon}{1+\varepsilon}$ $\quad \left(h(\varepsilon) = -\displaystyle\int_1^\varepsilon \frac{\ln x}{1+x}\,dx \right)$.

$\forall \varepsilon \in]0,1],\ h'(\varepsilon) = -\dfrac{\ln \varepsilon}{1+\varepsilon} > 0$

<u>h est croissante sur $]0,1]$.</u> Soit $\varepsilon \in]0,1]$.

$\forall x \in [\varepsilon,1],\ \dfrac{1}{1+1} \leq \dfrac{1}{1+x} \leq \dfrac{1}{1+\varepsilon}$

$\forall x \in [\varepsilon,1],\ \dfrac{\ln x}{2} \geq \dfrac{\ln x}{1+x} \geq \ln x \dfrac{1}{1+\varepsilon}$; donc $\dfrac{1}{1+\varepsilon}\displaystyle\int_\varepsilon^1 \ln x\,dx \leq h(\varepsilon) \leq \frac{1}{2}\int_\varepsilon^1 \ln x\,dx$

Or $\displaystyle\int_\varepsilon^1 \ln x\,dx = [x\ln x - x]_\varepsilon^1 = -1 - \varepsilon\ln\varepsilon + \varepsilon$

donc $\dfrac{-1-\varepsilon\ln\varepsilon+\varepsilon}{1+\varepsilon} \leq h(\varepsilon) \leq \dfrac{-1-\varepsilon\ln\varepsilon+\varepsilon}{2}$.

On peut aussi écrire $0 = h(1) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{croissante}}}{\geq} h(\varepsilon) \geq -\dfrac{1}{1+\varepsilon} + \underbrace{\dfrac{\varepsilon-\varepsilon\ln\varepsilon}{1+\varepsilon}}_{\geq 0} \geq -\dfrac{1}{1+\varepsilon} \geq -1$

Finalement : $\forall \varepsilon \in]0,1],\ -1 \leq h(\varepsilon) \leq 0$. <u>$h$ est bornée sur $]0,1]$.</u>

h est croissante et minorée sur $]0,1]$ donc h admet une limite finie en 0.

Ce qui signifie que : <u>$I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x}\,dx$ converge.</u>

Q2.. Soit $x \in [0,1]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$1 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k x^k + \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x} = 1 + (-x)\frac{1-(-x)^n}{1-(-x)} + \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x} = \underbrace{\frac{1+x-x-(-x)^{n+1}+(-x)^{n+1}}{1+x}}_{\frac{1}{1+x}}$$

<u>donc $\forall x \in [0,1],\ \dfrac{1}{1+x} = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k x^k + \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.</u>

Q3.. Soit $k \in \mathbb{N}$.

$\forall \varepsilon \in]0,1],\ \displaystyle\int_\varepsilon^1 x^k \ln x\,dx = \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\ln x\right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{x^{k+1}}{k+1}\times\frac{1}{x}\,dx = -\frac{\varepsilon^{k+1}\ln\varepsilon}{k+1} - \frac{1}{k+1}\int_\varepsilon^1 x^k\,dx$

$\forall \varepsilon \in]0,1],\ \displaystyle\int_\varepsilon^1 x^k \ln x\,dx = -\frac{\varepsilon^{k+1}\ln\varepsilon}{k+1} - \frac{1}{k+1}\left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_\varepsilon^1 = -\frac{\varepsilon^{k+1}\ln\varepsilon}{k+1} - \frac{1}{(k+1)^2}(1-\varepsilon^{k+1})$

Donc $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 x^k \ln x\,dx = 0 - \frac{1}{(k+1)^2}(1-0) = -\frac{1}{(k+1)^2}$ $\quad \left(\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{k+1}\ln\varepsilon = 0\right)$

<u>donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $I_k = \displaystyle\int_0^1 x^k \ln x\,dx$ converge et vaut $-\dfrac{1}{(k+1)^2}$.</u>

Q4.. f est dérivable sur $]0,1]$.

$\forall x\in]0,1]$, $f'(x) = \ln x + 1$

$\forall x \in]0,\frac{1}{e}[$, $f'(x)<0$; $f'(1/e)=0$; $\forall x\in]\frac{1}{e},1]$, $f'(x)>0$.

Ce résultat et la continuité de f sur $[0,1]$ montrent que f est décroissante sur $[0,1/e]$ et croissante sur $[1/e,1]$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} (\ln x) = -\infty$; f n'est pas dérivable en 0.

x	0		$1/e$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-1/e$	$\nearrow$	0

Retenons que : $\underline{\forall x\in[0,1],\ |f(x)|\leq \frac{1}{e}}$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $x\in]0,1]$

$$\forall x\in[0,1],\ \frac{1}{1+x} = 1 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k x^k + \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}$$

$$\forall x\in]0,1],\ \frac{\ln x}{1+x} = \ln x + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k x^k \ln x + \frac{(-1)^{n+1}x^{n}}{1+x} f(x)$$

Intégrons entre 0 et 1.

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x}\,dx = I_0 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k I_k + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} f(x)\,dx$$ (toutes les intégrales sont convergentes).

$$\left|\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x}\,dx - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_k\right| = \left|\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} f(x)\,dx\right| \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}|f(x)|\,dx \underset{\substack{|f(x)|\leq 1/e \\ \frac{1}{1+x}\leq 1}}{\leq} \int_0^1 \frac{1}{e}x^n\,dx$$

Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e}x^n\,dx = \frac{1}{e(n+1)}$.

Donc $\underline{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \left|\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x}\,dx - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_k\right| \leq \frac{1}{e(n+1)}}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{e(n+1)} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_k = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x}\,dx = I$

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(-\frac{1}{(k+1)^2}\right) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^k}{k^2}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^k}{k^2} = I$. La série de terme général $\dfrac{(-1)^k}{k^2}$ converge et $\underline{\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} = I}$.

Q6.– a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$

$$\forall t\in[0,1],\quad \frac{1}{1+t}=1+\sum_{\ell=}^{n}(-1)^\ell t^\ell+\frac{(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t}$$

donc $\forall x\in[0,1]$, $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t}=\int_0^x dt+\sum_{\ell=}^{n}(-1)^\ell\int_0^x t^\ell dt+\int_0^x\frac{(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t}dt$

donc $\forall x\in[0,1]$, $\displaystyle \ln(1+x)=x+\sum_{\ell=}^{n}(-1)^\ell\frac{x^{\ell+1}}{\ell+1}+\int_0^x\frac{(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t}dt$

donc $\forall x\in]0,1]$, $\displaystyle \theta(x)=1+\sum_{\ell=1}^{n}(-1)^\ell\frac{x^\ell}{\ell+1}+\frac{1}{x}\int_0^x\frac{(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t}dt$

Posons $\forall x\in[0,1]$, $R_n(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x=0\\ \displaystyle\frac{1}{x}\int_0^x\frac{(-1)^{n+1}t^{\ell+1}}{1+t}dt & \text{si } x\in]0,1]\end{cases}$

Alors $\forall x\in]0,1]$, $\displaystyle\theta(x)=1+\sum_{\ell=1}^{n}\frac{(-1)^\ell}{\ell+1}x^\ell+R_n(x)$

mieux : $\forall x\in[0,1]$, $\displaystyle\theta(x)=1+\sum_{\ell=1}^{n}\frac{(-1)^\ell}{\ell+1}x^\ell+R_n(x)$.

Montrons alors que : $\forall x\in[0,1]$, $|R_n(x)|\leq\frac{1}{n+2}x^{n+1}$

C'est clair pour $x=0$.

Soit $x\in]0,1]$, $\displaystyle|R_n(x)|=\frac{1}{x}\int_0^x\frac{t^{n+1}}{1+t}dt\leq\frac{1}{x}\int_0^x\frac{t^{n+1}}{1+0}dt=\frac{1}{x}\frac{x^{n+2}}{n+2}=\frac{x^{n+1}}{n+2}$

donc $\forall x\in[0,1]$, $\displaystyle\theta(x)=1+\sum_{\ell=1}^{n}\frac{(-1)^\ell}{\ell+1}x^\ell+R_n(x)$ et $|R_n(x)|\leq\frac{1}{n+2}x^{n+1}$

b) Intégrons cette égalité entre 0 et 1 (toutes les fonctions qui interviennent sont continues sur $[0,1]$).

$$\int_0^1\theta(x)dx=\int_0^1 dx+\sum_{\ell=1}^{n}\frac{(-1)^\ell}{\ell+1}\int_0^1 x^\ell dx+\int_0^1 R_n(x)dx$$

$$\int_0^1\theta(x)dx=1+\sum_{\ell=1}^{n}\frac{(-1)^\ell}{(\ell+1)^2}+\int_0^1 R_n(x)dx=\sum_{\ell=0}^{n}\frac{(-1)^\ell}{(\ell+1)^2}+\int_0^1 R_n(x)dx$$

$$\left|\int_0^1\theta(x)dx-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(k+1)^2}\right|=\left|\int_0^1 R_n(x)dx\right|\leq\int_0^1|R_n(x)|dx\leq\int_0^1\frac{1}{n+2}x^{n+1}dx=\frac{1}{(n+2)^2}$$

$$\left|\int_0^1\theta(x)dx-\sum_{\ell=0}^{n}\frac{(-1)^\ell}{(\ell+1)^2}\right|\leq\frac{1}{(n+2)^2}.$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{(n+2)^2} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} \right) = \int_0^1 \theta(x)dx = J$

Par conséquent : $J = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -I$

Donc $\underline{J = -I = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}}$.

Q7.– Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

En ajoutant nous obtenons : $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k^2} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

En faisant tendre n vers $+\infty$ il vient : $I + \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi^2}{6}$; $I = -\frac{\pi^2}{12}$

Donc . $\underline{J = -I = \frac{\pi^2}{12}}$.

3.3. Calcul de la variance de X.

Q 1.– Notons que $E(X^2)$ existe c'est à dire que : $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt$ existe.

$t \mapsto t^2 f(t)dt$ il suffit de prouver que $\int_0^{+\infty} t^2 f(t)dt$ existe.

$\forall t \in \mathbb{R}$, $t^2 f(t) = \frac{t^2 e^t}{(e^t+1)^2} \underset{+\infty}{\sim} t^2 \frac{e^t}{e^{2t}} = t^2 e^{-t}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $t^2 f(t) \geq 0$.

Par conséquent $\int_0^{+\infty} t^2 f(t)dt$ est de même nature que $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t}dt$

$\lim\limits_{t \to \infty} t^4 e^{-t} = 0$. $\exists A \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $t \geq A \Rightarrow t^4 e^{-t} \leq 1$.

$\forall t \in [A, +\infty[$, $0 \leq t^2 e^{-t} \leq \frac{1}{t^2}$

Comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge il en est de même de $\int_1^{+\infty} t^2 e^{-t} dt$ donc de $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt$ et de $\int_0^{+\infty} t^2 f(t) dt$.

$\int_0^{+\infty} t^2 f(t)dt$ converge ; par parité $\int_{-\infty}^0 t^2 f(t)dt$ aussi.

$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt$ converge et X possède une variance.

Q2. $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X^2)$ car $E(X)=0$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt = 2\int_0^{+\infty} t^2 \frac{e^t}{(e^t+1)^2}dt$$

$\forall A\in\mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle\int_0^A t^2 \frac{e^t}{(e^t+1)^2}dt \underset{\substack{u=e^{-t} \\ t=-\ln u}}{=} \int_1^{e^{-A}} (-\ln u)^2 \frac{\frac{1}{u}}{(\frac{1}{u}+1)^2}\left(-\frac{1}{u}\right)du = \int_{e^{-A}}^1 \frac{(\ln u)^2}{(1+u)^2}du$

En faisant tendre A vers $+\infty$ il vient : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 \frac{e^t}{(e^t+1)^2}dt = \int_0^1 \frac{(\ln u)^2}{(1+u)^2}du = \int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{(1+x)^2}dx$

Donc $\displaystyle V(X) = 2\int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{(1+x)^2}dx$.

Q3. φ est dérivable sur $]0,1]$ et :

$\forall x\in]0,1]$, $\displaystyle\varphi'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}\left[(\ln x+1)(1+x) - x\ln x\right] - \frac{1}{1+x} = \frac{1}{(1+x)^2}\left[\ln x + 1 + x\ln x + x - x\ln x - 1 - x\right]$

$\forall x\in]0,1]$, $\displaystyle\varphi'(x) = \frac{\ln x}{(1+x)^2}$.

$\forall x\in]0,1]$, $\displaystyle\ln x\,\varphi(x) = \frac{x(\ln x)^2}{1+x} - \ln x\,\ln(1+x)$.

$\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x(\ln x)^2}{1+x} = 0$. $\ln x\,\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x\ln x$, $\displaystyle\lim_{x\to0}(\ln x\,\ln(1+x)) = \lim_{x\to0}(x\ln x) = 0$

Finalement : $\displaystyle\lim_{x\to0}(\ln x\,\varphi(x)) = 0$.

Q4. Soit $\varepsilon\in]0,1]$. $\displaystyle\int_\varepsilon^1 \frac{(\ln x)^2}{(1+x)^2}dx = \int_\varepsilon^1 \varphi'(x)\ln x\,dx = [\varphi(x)\ln x]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \varphi(x)\,\frac{1}{x}\,dx$

$\displaystyle\int_\varepsilon^1 \frac{(\ln x)^2}{(1+x)^2}dx = -\varphi(\varepsilon)\ln\varepsilon - \int_\varepsilon^1 \frac{\ln x}{1+x}dx + \int_\varepsilon^1 \frac{\ln(1+x)}{x}dx$. En faisant tendre ε vers 0

il vient : $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{(1+x)^2}dx = 0 - I + J$. Donc $V(X) = 2(J-I) = 4J$

$V(X) = \frac{\pi^2}{3}$.