Exercice 1.. (Q1) - f est clairement une application de E dans E.

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $(P,S) \in E^2$

$f(\lambda P+S) = (2X+1)(\lambda P+S)(X) - (X^2-1)(\lambda P+S)'(X)$. Comme $(\lambda P+S)' = \lambda P' + S'$ il vient :

$f(\lambda P+S) = \lambda\left[(2X+1)P(X) - (X^2-1)P'(X)\right] + \left[(2X+1)S(X) - (X^2-1)S'(X)\right]$, c'est à dire :

$f(\lambda P+S) = \lambda f(P) + f(S)$.

Ceci achève de montrer que <u>f est un endomorphisme de E</u>.

(Q2) a) Notons r le degré de B ($r \in \mathbb{N}$ car $B \neq 0$). Notons a_r le coefficient de X^r dans B

le coefficient de X^{r+1} dans $f(B)$ est : $2a_r - ra_r$.

le coefficient de X^{r+1} dans λB est 0.

$f(B) = \lambda B$ donne alors : $2a_r - ra_r = 0$, soit $r = 2$ car a_r n'est pas nul.

Par conséquent <u>le degré de B est nécessairement 2</u>.

<u>b)</u> <u>$\lambda = 3$</u>. $(2X+1)B(X) - (X^2-1)B'(X) = 3B(X)$.

En prenant la valeur en -1 il vient : $-B(-1) - 0 = 3B(-1)$; donc $B(-1) = 0$;

-1 est racine de B.

$B(X) = (X+1)^k A(X)$ avec $A(-1) \neq 0$. Notons que $k = 1$ ou 2.

$f(B) = 3B$ donne : $(2X+1)(X+1)^k A(X) - (X^2-1)\left(k(X+1)^{k-1}A(X) + (X+1)^k A'(X)\right) = 3(X+1)^k A(X)$

En divisant par $(X+1)^k$ il vient :

$(2X+1)A(X) - (X-1)kA(X) - (X^2-1)A'(X) = 3A(X)$. En prenant la valeur en -1 et en divisant par $A(-1)$ ($A(-1) \neq 0$!) on obtient $-1 + 2k = 3$ c'est à dire $k = 2$.

$B(X) = (X+1)^2 A(X)$. Comme le degré de B est 2, A est constant.

$\exists \alpha \in \mathbb{R}$, $B(X) = \alpha(X+1)^2$.

Nous venons de montrer que : $B \neq 0$ et $f(B) = 3B \Rightarrow B \in \mathrm{Vect}\left((X+1)^2\right)$.

Ceci permet de dire que $\mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Vect}\left((X+1)^2\right)$. Cela ne permet pas de dire que 3 est valeur propre de f !

Pour montrer cela montrons que : $\mathrm{Vect}\left((X+1)^2\right) \subset \mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id}_E)$. Il suffit de prouver que : $f\left((X+1)^2\right) = 3(X+1)^2$.

$f\left((X+1)^2\right) = (2X+1)(X+1)^2 - (X^2-1)(2(X+1)) = (X+1)^2\left(2X+1 - 2(X-1)\right) = 3(X+1)^2$

Finalement : $\mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}\left((X+1)^2\right)$. Donc <u>$3$ est valeur propre de f et le sous-espace propre associé est la droite vectorielle engendrée par $(X+1)^2$.</u>

c) Ici $\lambda = -1$. $f(B) = -B$

$(2X+1)B(X) - (X^2-1)B'(X) = -B(X)$

En prenant la valeur en 1 on obtient : $3B(1) - 0 = -B(1)$, $B(1)=0$.

Soit p l'ordre de multiplicité de 1 dans B.

$\exists C \in E$, $B(X) = (X-1)^p C(X)$ avec $C(1) \neq 0$.

$f(B) = -B$ donc $(2X+1)(X-1)^p C(X) - (X^2-1)p(X-1)^{p-1}C(X) - (X^2-1)(X-1)^p C'(X) = -(X-1)^p C(X)$

En divisant par $(X-1)^p$ il vient :

$(2X+1)C(X) - (X+1)p\,C(X) - (X^2-1)C'(X) = -C(X)$; donc :

$3C(1) - 2p\,C(1) - 0 = -C(1)$. Comme $C(1) \neq 0$: $3-2p = -1$; $p = 2$

$B(X) = (X-1)^2 C(X)$. Comme $\deg B = 2$: C est constant

Par conséquent $B \in \mathrm{Vect}((X-1)^2)$, donc $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Vect}((X-1)^2)$

Réciproquement : $f((X-1)^2) = (2X+1)(X-1)^2 - (X^2-1)2(X-1) = (X-1)^2(2X+1-2(X+1)) = -(X-1)^2$

Donc $\mathrm{Vect}((X-1)^2) \subset \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$.

Finalement : $\mathrm{Ker}(f+\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}((X-1)^2)$. <u>$-1$ est alors valeur propre de f et le sous-espace propre associé est la droite vectorielle engendrée par $(X-1)^2$.</u>

d) $\lambda \neq 3$ et $\lambda \neq -1$.

$(2X+1)B(X) - (X^2-1)B'(X) = \lambda B(X)$

En prenant la valeur en 1 il vient $3B(1) = \lambda B(1)$ et donc $B(1) = 0$ car $\lambda \neq 3$

" " " -1 il vient $-B(-1) = \lambda B(-1)$ et donc $B(-1) = 0$ car $\lambda \neq -1$

Donc 1 et -1 sont racines de B comme $\deg B = 2$:

$\exists \delta \in \mathbb{R}$, $B(X) = \delta(X+1)(X-1) = \delta(X^2-1)$. δ n'est pas nul car B ne l'est pas.

Calculons, ainsi que pour s'amuser $f(X^2-1)$!

$f(X^2-1) = (2X+1)(X^2-1) - (X^2-1)2X = (X^2-1)(2X+1-2X) = (X^2-1)$

Donc $f(B) = f(\delta(X^2-1)) = \delta f(X^2-1) = \delta(X^2-1) = B$ or $f(B) = \lambda B$ et $B \neq 0$ donc $\lambda = 1$

Ceci prouve que :

1°. Si λ est une valeur propre de f distincte de 3 et -1 alors $\lambda = 1$

2°. $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Vect}(X^2-1)$

Or nous avons vu que $f(X^2-1) = X^2-1$ donc $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(X^2-1)$

<u>1 est effectivement valeur propre de f et le sous-espace propre associé est la droite vectorielle engendrée par X^2-1.</u>

Résumons même si cela n'est pas demandé.

1°.. Spec $f = \{-1, 1, 3\}$

2°.. Les sous-espaces propres associés sont respectivement : $\mathrm{Vect}((X-1)^2)$, $\mathrm{Vect}((X-1)(X+1))$, $\mathrm{Vect}((X+1)^2)$.

Q3 .. a) Soit $P \in F = \mathbb{R}_2[X]$

$g(P) = (2X+1)P(X) - (X^2-1)P'(X)$ donc $g(P)$ est de degré au plus 3

Soit a le coefficient de X^2 dans P

Le coefficient de X^3 dans $g(P)$ est : $2a - 2a = 0$. Finalement $g(P)$ est de degré au plus 2.

$\forall P \in F$, $g(P) \in F$.

De plus : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (P,S) \in F^2$, $g(\lambda P + S) = f(\lambda P + S) = \lambda f(P) + f(S) = \lambda g(P) + g(S)$.

g est un endomorphisme de F.

b) $g(1) = (2X+1) = 1 + 2X$

$g(X) = (2X+1)X - (X^2-1) = X^2 + X + 1 = 1 + X + X^2$

$g(X^2) = (2X+1)X^2 - (X^2-1)2X = X^2 + 2X = 2X + X^2$

Finalement : $M_B(g) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Notons encore que $(X-1)^2$, $(X-1)(X+1)$ et $(X+1)^2$ sont des éléments de F et : $\begin{cases} g((X-1)^2) = f((X-1)^2) = -(X-1)^2 \\ g((X-1)(X+1)) = f((X-1)(X+1)) = (X-1)(X+1) \\ g((X+1)^2) = 3(X+1)^2 \end{cases}$

c) Posons $\mathcal{B}' = ((X-1)^2, (X-1)(X+1), (X+1)^2)$

$\mathcal{B}'$ est une famille libre de F car elle constituée de vecteurs propres de g associés à des valeurs propres distinctes, comme $\dim F = 3$, $\mathcal{B}'$ est une base de F comme famille libre de trois éléments de F.

La matrice de g dans $\mathcal{B}'$ est $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. g et A sont diagonalisables.

Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

1°.. $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

2°.. $D = P^{-1}AP$ ou $A = PDP^{-1}$

Une récurrence simple montre alors que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$ et achève la question.

d) P^{-1} n'est autre que la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ et

$(X-1)^2 = X^2-2X+1$, $X^2-1 = X^2-1$! , $(X+1)^2 = X^2+2X+1$.

$$X = \frac{1}{4}\left[(X+1)^2-(X-1)^2\right] = -\frac{1}{4}(X-1)^2+\frac{1}{4}(X+1)^2$$

$$1 = \frac{1}{4}\left[X^2+2X+1+X^2-2X+1-2(X^2-1)\right] = \frac{1}{4}(X-1)^2-\frac{1}{2}(X^2-1)+\frac{1}{4}(X+1)^2$$

$$X^2 = \frac{1}{4}\left[X^2+2X+1+X^2-2X+1+2(X^2-1)\right] = \frac{1}{4}(X-1)^2+\frac{1}{2}(X^2-1)+\frac{1}{4}(X+1)^2$$

Finalement $$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 & 1/4 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix}\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^n = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (-1)^n & -(-1)^n & (-1)^n \\ -2 & 0 & 2 \\ 3^n & 3^n & 3^n \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} (-1)^n+2+3^n & -(-1)^n+3^n & (-1)^n-2+3^n \\ -2(-1)^n+2\times 3^n & 2(-1)^n+2\times 3^n & -2(-1)^n+2\times 3^n \\ (-1)^n-2+3^n & -(-1)^n+3^n & (-1)^n+2+3^n \end{bmatrix}$$

(Q1) a) Le critère de Riemann indique que la série de terme général $u_n(x) = \frac{1}{n^x}$ converge si et seulement si $x > 1$.

Par conséquent $f(x)$ a un sens pour tout réel x appartenant à $]1,+\infty[$.

b) Soit $x \in]1,+\infty[$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n^{\frac{x+1}{2}} \ln^2 n\ u_n(x) = \frac{\ln^2 n}{n^{x-\frac{x+1}{2}}} = \frac{\ln^2 n}{n^{\frac{x-1}{2}}} = \left(\frac{\ln n}{n^{\frac{x-1}{4}}}\right)^2$

Or $\frac{x-1}{4} > 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln n}{n^{\frac{x-1}{4}}} = 0$ $\quad (\forall \beta \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln n = o(n^\beta))$

Finalement : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[n^{\frac{x+1}{2}} \ln^2 n\ u_n(x)\right] = 0.$

Il en résulte que : $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ n \geqslant n_0 \Rightarrow n^{\frac{x+1}{2}} \ln^2 n\ u_n(x) \leqslant 1$

ce qui donne : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n \geqslant n_0 \Rightarrow 0 \leqslant \ln^2 n\ u_n(x) \leqslant \frac{1}{n^{\frac{x+1}{2}}} = u_n\left(\frac{x+1}{2}\right)$

$\frac{x+1}{2} > 1$ donc la série de terme général $u_n\left(\frac{x+1}{2}\right)$ converge. Les règles de comparaison des séries à termes positifs assurent la convergence de la série de terme général $\ln^2 n\ u_n(x)$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 3 \Rightarrow 0 \leqslant \ln n\ u_n(x) \leqslant (\ln n)^2 u_n(x)$

$\uparrow$ $\ln n \geqslant 1$ pour $n \geqslant 3$

La convergence de la série de terme général $(\ln n)^2 u_n(x)$ et les règles de comparaison des séries à termes positifs donnent la convergence de la série de terme général $\ln n\ u_n(x)$.

c) $\forall x \in]1,+\infty[,\ u_n(x) = \frac{1}{n^x} = n^{-x} = e^{-x \ln n}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. u_n est dérivable sur $]1,+\infty[$ et $\forall x \in]1,+\infty[,\ u'_n(x) = -\ln n\ e^{-x\ln n} = -\ln n\ u_n(x)$

u'_n est dérivable sur $]1,+\infty[$ et $\forall x \in]1,+\infty[,\ u''_n(x) = (-\ln n)^2 u_n(x) = \ln^2 n\ u_n(x)$

u''_n étant continue sur $]1,+\infty[$, u_n est de classe C^2 sur $]1,+\infty[$.

Soit $(x,h) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $x \in]1,+\infty[$ et $|h| < \frac{x-1}{2}$.

Remarquons que : $-h \leqslant |h| < \frac{x-1}{2}$ donc $x+h > x - \frac{x-1}{2} = \frac{x+1}{2} > 1$

u_n est donc de classe C^2 sur le segment défini par x et $x+h$.

Appliquons sur ce segment l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 à u_n.
Il vient :

$|u_n(x+h)-u_n(x)-(x+h-x)u_n'(x)| \leq \frac{|x+h-x|^2}{2!}\max_{t\in[\overleftrightarrow{x,x+h}]}|u_n''(t)|$;

$|u_n(x+h)-u_n(x)-h(-\ln n\, u_n(x))| \leq \frac{h^2}{2}\max_{t\in[\overleftrightarrow{x,x+h}]}|(\ln n)^2 u_n(t)| = \frac{h^2}{2}(\ln n)^2 \max_{t\in[\overleftrightarrow{x,x+h}]}\frac{1}{n^t}$.

Notons que si $t\in[\overleftrightarrow{x,x+h}]$: $|t-x|\leq|h|$; $x-t\leq|h|\leq\frac{x-1}{2}$; $t\geq x-\frac{x-1}{2}=\frac{x+1}{2}$.

Donc : $\forall t\in[\overleftrightarrow{x,x+h}]$, $\frac{1}{n^t}\leq\frac{1}{n^{\frac{x+1}{2}}}$; $\max_{t\in[\overleftrightarrow{x,x+h}]}\frac{1}{n^t}\leq\frac{1}{n^{\frac{x+1}{2}}}=u_n\left(\frac{x+1}{2}\right)$.

Finalement :

$|u_n(x+h)-u_n(x)+h\ln n\, u_n(x)| \leq \frac{h^2}{2}(\ln n)^2 u_n\left(\frac{x+1}{2}\right)$.

Sommons ! Mais justifions d'abord.

$\frac{x+1}{2}>1$, la série de terme général $\frac{h^2}{2}(\ln n)^2 u_n\left(\frac{x+1}{2}\right)$ converge d'après Q1b

ceci assure l'absolue convergence de la série de terme général $u_n(x+h)-u_n(x)+h\ln n\, u_n(x)$

Nous pouvons alors écrire :

$\left|\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n(x+h)-u_n(x)+h\ln n\, u_n(x))\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty}|u_n(x+h)-u_n(x)+h\ln n\, u_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{h^2}{2}(\ln n)^2 u_n\left(\frac{x+1}{2}\right)\right]$

Les séries de termes généraux $u_n(x+h)$, $u_n(x)$ et $h\ln n\, u_n(x)$ étant convergentes

il vient :

$\left|\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x+h)-\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)+h\sum_{n=1}^{+\infty}\ln n\, u_n(x)\right| \leq \frac{h^2}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(\ln n)^2 u_n\left(\frac{x+1}{2}\right)$; c'est à dire :

$\left|f(x+h)-f(x)+h\sum_{n=1}^{+\infty}\ln n\, u_n(x)\right| \leq \frac{h^2}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(\ln n)^2 u_n\left(\frac{x+1}{2}\right)$

d) Soit $x\in]1,+\infty[$. Soit $h\in\mathbb{R}$ tel que : $0<|h|<\frac{x-1}{2}$.

$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\sum_{n=1}^{+\infty}\ln n\, u_n(x)\right| \leq \frac{|h|}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(\ln n)^2 u_n\left(\frac{x+1}{2}\right)$.

$\lim_{h\to0}\left[\frac{|h|}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(\ln n)^2 u_n\left(\frac{x+1}{2}\right)\right]=0$; par encadrement on obtient : $\lim_{h\to0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\sum_{n=1}^{+\infty}\ln n\, u_n(x)\right]=0$

C'est à dire : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln n \; u_n(x)$.

f est donc dérivable en x et $f'(x) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln n \; u_n(x)$ et ceci pour tout $x \in]1,+\infty[$.

Remarque. Nous avons justifié la dérivation terme à terme de la série de terme général $u_n(x)$, OK ?!

Q2 a) Soit $x \in]1,+\infty[$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$t \mapsto \dfrac{1}{t^x}$ est décroissante sur $[k,k+1]$ donc : $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{(k+1)^x} \underset{①}{\le} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^x} \underset{②}{\le} \int_k^{k+1} \frac{dt}{k^x}$

donc : $\displaystyle\frac{1}{(k+1)^x} \le \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^x} \le \frac{1}{k^x}$.

Soit $N \in \mathbb{N} - \{0,1\}$.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{(k+1)^x} \underset{①}{\le} \sum_{k=1}^{N-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^x} = \int_1^N \frac{dt}{t^x}$; donc : $\displaystyle\sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k^x} \le \int_1^N \frac{dt}{t^x}$.

$\displaystyle\sum_{k=2}^{N} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^x} \underset{②}{\le} \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k^x}$; donc $\displaystyle\int_2^{N+1} \frac{dt}{t^x} \le \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k^x}$.

Finalement : $\displaystyle\int_2^{N+1} \frac{dt}{t^x} \le \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^x} \le \int_1^N \frac{dt}{t^x}$ pour $N \in \mathbb{N}$ et $N > 1$.

b) Soit $x \in]1,+\infty[$. Soit $N \in \mathbb{N}$ et $N > 1$.

$$\int_2^{N+1} \frac{dt}{t^x} = \left[\frac{t^{-x+1}}{-x+1}\right]_2^{N+1} = \frac{1}{-x+1}\left[t^{-x+1}\right]_2^{N+1} = \frac{1}{x-1}\left[t^{-x+1}\right]_{N+1}^{2} = \frac{1}{x-1}\left[\frac{1}{2^{x-1}} - \frac{1}{(N+1)^{x-1}}\right].$$

Donc $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_2^{N+1} \frac{dt}{t^x} = \frac{1}{x-1}\,\frac{1}{2^{x-1}} = \frac{1}{(x-1)2^{x-1}}$

De même : $\displaystyle\int_1^N \frac{dt}{t^x} = \frac{1}{x-1}\left[t^{-x+1}\right]_1^N = \frac{1}{x-1}\left[1 - \frac{1}{N^{x-1}}\right]$; $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_1^N \frac{dt}{t^x} = \frac{1}{x-1}$.

En faisant tendre N vers $+\infty$ dans les inégalités de a) il vient :

$\displaystyle\frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \le \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = f(x) - 1 \le \frac{1}{x-1}$; donc : $\displaystyle 1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \le f(x) \le 1 + \frac{1}{x-1}$

c) Soit $x \in]1,+\infty[$; $f(x) \geq 1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}}$.

Or $\lim_{x\to 1^+}\left[1+\frac{1}{(x-1)2^{x-1}}\right] = +\infty$ donc : $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$

Remarque - $\forall x\in]1,+\infty[$, $(x-1)+\frac{1}{2^{x-1}} \leq (x-1)f(x) \leq (x-1)+1$

Par encadrement il vient : $\lim_{x\to 1^+}[(x-1)f(x)]=1$; $f(x) \underset{1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}$.

$\lim_{x\to+\infty}(x-1)2^{x-1} = +\infty$. $\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{(x-1)2^{x-1}} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right) = 1$

En utilisant l'encadrement du b) il vient : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$.

d) $\forall x\in]1,+\infty[$, $f'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \ln n \; u_n(x) < 0$.

f est strictement décroissante sur $]1,+\infty[$

x	1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1

Les droites d'équation $x=1$ et $y=1$ sont asymptotes à la courbe représentative de f.

Pour la courbe...

Remarques... . f est la fonction dzêta.

. $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $f(2k) = \frac{(-1)^{k+1}2^{2k-1}\pi^{2k}b_{2k}}{(2k)!}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ étant la suite des nombres de Bernoulli ($b_0=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k b_k=0$; donc $b_0=1$, $b_1=-\frac{1}{2}$, $\forall k\in\mathbb{N}^*$ $b_{2k+1}=0$, $b_2=+\frac{1}{6}$, $b_4=-\frac{1}{30}$, $b_6=\frac{1}{42}$, $b_8=-\frac{1}{30}$, $b_{10}=\frac{5}{66}$, $b_{12}=-\frac{691}{2730}$, ...)

Ruine du joueur et du crédit du concepteur !

PARTIE A — Etude d'une suite récurrente.

Q1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$p(U_{n+1}-U_n) = pU_{n+1} - pU_n = U_n - qU_{n-1} - pU_n = (1-p)U_n - qU_{n-1} \overset{1-p=q}{=} q(U_n - U_{n-1})$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p(U_{n+1}-U_n) = q(U_n - U_{n-1})$

Q2 $\underline{p=q}$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p(U_{n+1}-U_n) = q(U_n-U_{n-1}) = p(U_n-U_{n-1})$. Comme p n'est pas nul :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_{n+1}-U_n = U_n - U_{n-1}$

Cela signifie que la suite $(U_{n+1}-U_n)_{n\geq 0}$ est constante donc que la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est arithmétique. Notons r la raison de cette suite.

$\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = U_0 + nr$. En particulier : $U_{a+b} = U_0 + (a+b)r$.

Ceci donne : $r = \dfrac{U_{a+b}-U_0}{a+b}$. Il vient alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = U_0 + n\,\frac{U_{a+b}-U_0}{a+b}.$$

Q3 V1.. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} - \frac{1}{p}U_n + \frac{q}{p}U_{n-1} = 0$. $(U_n)_{n\geq 0}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique :

$z \in \mathbb{C}$ et $z^2 - \frac{1}{p}z + \frac{q}{p} = 0$.

$$\Delta = \frac{1}{p^2} - 4\frac{q}{p} = \frac{1}{p^2}(1-4pq) = \frac{1}{p^2}(1-4p(1-p)) = \frac{1}{p^2}(4p^2-4p+1) = \left(\frac{2p-1}{p}\right)^2 \underset{p\neq q \Rightarrow p \neq \frac{1}{2}}{>} 0$$

Cette équation admet deux solutions : $\dfrac{\frac{1}{p}+\frac{2p-1}{p}}{2} = \underline{1}$ et $\dfrac{\frac{1}{p}-\frac{2p-1}{p}}{2} = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p} = \frac{q}{p} = \underline{x}$.

$x \neq 1$ car $p \neq q$.

Par conséquent : $\exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ U_n = \lambda + \mu x^n$

V2.. Retrouvons ce résultat sans utiliser le cours sur ce type de suites.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_{n+1} - U_n = \frac{q}{p}(U_n - U_{n-1}) = x(U_n - U_{n-1})$.

$(U_{n+1}-U_n)_{n\geq 0}$ est donc une suite géométrique de raison x.

Donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $U_{n+1}-U_n = x^n(U_1-U_0)$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$

$$U_n = U_n-U_0+U_0 = \sum_{k=0}^{n-1}(U_{k+1}-U_k)+U_0 = \sum_{k=0}^{n-1}x^k(U_1-U_0)+U_0 \overset{x\neq 1}{=} (U_1-U_0)\frac{1-x^n}{1-x}+U_0$$

$U_n = \left[\frac{U_1-U_0}{1-x}+U_0\right] - \frac{U_1-U_0}{1-x}x^n$. Remarquons que ceci vaut encore pour $n=0$ et posons : $\lambda = \frac{U_1-U_0}{1-x}+U_0$ et $\mu = -\frac{U_1-U_0}{1-x}$

On obtient alors : $\forall n\in\mathbb{N}$, $U_n = \lambda+\mu x^n$. Fin de V2.

<u>Exercice</u>. V3 ! Remarquer que $(U_{n+1}-xU_n)$ est constante donc que $(U_n)_{n\geq 0}$ est arithmético-géométrique, et retrouver le résultat précédent.

Donc : $\begin{cases} U_0 = \lambda+\mu \\ U_{a+b} = \lambda+\mu x^{a+b}\end{cases}$ car $\forall n\in\mathbb{N}$, $U_n=\lambda+\mu x^n$.

Par différence il vient $\mu = \dfrac{U_0-U_{a+b}}{1-x^{a+b}} = \dfrac{U_{a+b}-U_0}{x^{a+b}-1}$.

On a alors $\lambda = U_0-\mu = U_0 - \dfrac{U_{a+b}-U_0}{x^{a+b}-1} = \dfrac{x^{a+b}U_0-U_{a+b}}{x^{a+b}-1}$.

Finalement : $\forall n\in\mathbb{N}$, $U_n = \dfrac{x^{a+b}U_0-U_{a+b}}{x^{a+b}-1} + \dfrac{U_{a+b}-U_0}{x^{a+b}-1}x^n$.

On obtient donc U_n en fonction de n, a, b, U_0, U_{a+b} ... et $\underline{\underline{x}}$!

<u>Une remarque importante</u>.

Il importe de remarquer que si $(w_n)_{n\in[\![0,a+b]\!]}$ est une suite finie de réels telle que : $\forall n\in[\![1,a+b-1]\!]$, $w_n = p\,w_{n+1}+q\,w_{n-1}$, un raisonnement analogue à celui qui précède montre que :

- pour $p=q$: $\forall n\in[\![0,a+b]\!]$, $w_n = w_0 + n\dfrac{w_{a+b}-w_0}{a+b}$
- pour $p\neq q$: $\forall n\in[\![0,a+b]\!]$, $w_n = \dfrac{x^{a+b}w_0-w_{a+b}}{x^{a+b}-1} + \dfrac{w_{a+b}-w_0}{x^{a+b}-1}x^n$ avec $x=\frac{q}{p}$.

PARTIE B | Etude de la probabilité de voir l'expérience se terminer

Il importe de remarquer que, dans ce problème, le nombre de boules est constant. Par conséquent si A contient k boules B contient $a+b-k$ boules.
Outre le fait que l'on confond un événement avec une urne l'événement "le tirage se fait dans l'urne A" n'a aucun sens. Nous lui substituerons l'événement TA_1 (!!!) le premier tirage se fait dans A. Encore un grand bravo pour la con-ception.

Q1 Soit $k \in [\![1, a+b-1]\!]$. $(TA_1, \overline{TA_1})$ est un système complet d'événements.

Donc $p(E_k) = p(E_k / TA_1)\, p(TA_1) + p(E_k / \overline{TA_1})\, p(\overline{TA_1})$.

Or $\rightarrow$ $p(TA_1) = q$ et $p(\overline{TA_1}) = 1 - p(TA_1) = 1 - q = p$.

$\rightarrow$ $p(E_k / TA_1) = p(E_{k-1})$ le premier tirage ayant été fait dans A, réaliser E_k revient alors à vider l'urne A sachant qu'elle contient $k-1$ boules.

$\rightarrow$ $p(E_k / \overline{TA_1}) = p(E_{k+1})$ le premier tirage ayant été fait dans B, réaliser E_k revient alors à vider l'urne A sachant qu'elle contient $k+1$ boules

Par conséquent : $\forall k \in [\![1, a+b-1]\!],\ p(E_k) = q\, p(E_{k-1}) + p\, p(E_{k+1}) = p\, p(E_{k+1}) + q\, p(E_{k-1})$

Q2 a) La remarque de la page précédente permet alors de conclure.

Si $p = q$: $\forall n \in [\![0, a+b]\!],\ p(E_n) = p(E_0) + n\,\dfrac{p(E_{a+b}) - p(E_0)}{a+b} = 1 - \dfrac{n}{a+b}$.

Si $p \neq q$: $\forall n \in [\![0, a+b]\!],\ p(E_n) = \dfrac{x^{a+b} p(E_0) - p(E_{a+b})}{x^{a+b} - 1} + \dfrac{p(E_{a+b}) - p(E_0)}{x^{a+b} - 1}\, x^n$;

ou $\forall n \in [\![0, a+b]\!],\ p(E_n) = \dfrac{x^{a+b}}{x^{a+b} - 1} - \dfrac{x^n}{x^{a+b} - 1}$.

Donc, pour $p = q$: $\forall n \in [\![0, a+b]\!],\ p(E_n) = 1 - \dfrac{n}{a+b}$ et $p(E_a) = 1 - \dfrac{a}{a+b} = \dfrac{b}{a+b}$;

pour $p \neq q$: $\forall n \in [\![0, a+b]\!],\ p(E_n) = \dfrac{x^{a+b} - x^n}{x^{a+b} - 1}$ et $p(E_a) = \dfrac{x^{a+b} - x^a}{x^{a+b} - 1}$.

b) Si $p=q$: $\lim\limits_{b\to+\infty} p(E_a) = \lim\limits_{b\to+\infty} \dfrac{b}{a+b} = 1.$

Supposons $p \neq q$

1er cas.. $p<q$; $x>1$; $\lim\limits_{b\to+\infty} x^{a+b} = +\infty$. $p(E_a) = \dfrac{x^{a+b}-x^a}{x^{a+b}-1} \underset{b\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^{a+b}}{x^{a+b}} = 1.$

Alors $\lim\limits_{b\to+\infty} p(E_a) = 1$

2ème cas.. $p>q$; $0<x<1$; $\lim\limits_{b\to+\infty} x^{a+b} = 0$. $\lim\limits_{b\to+\infty} p(E_a) = \lim\limits_{b\to+\infty} \dfrac{x^{a+b}-x^a}{x^{a+b}-1} = x^a$

Alors $\lim\limits_{b\to+\infty} p(E_a) = x^a$.

Remarque.. Supposons $p<q$. Il y a donc plus de chance de tirer dans A que dans B. Si le nombre b de boules contenues dans B devient très grand la probabilité de vider A s'approche de 1

c) $\lim\limits_{p\to 0,5} x = 1$. $x^{a+b}-1 = e^{(a+b)\ln x} - 1 \underset{p\to 0,5}{\sim} (a+b)\ln x \underset{p\to 0,5}{\sim} (a+b)(x-1)$

$x^{a+b}-x^a = x^a(x^{a+b-a}-1) \underset{p\to 0,5}{\sim} 1\times(x^b-1) \underset{p\to 0,5}{\sim} b(x-1)$

Donc $p(E_a) = \dfrac{x^{a+b}-x^a}{x^{a+b}-1} \underset{p\to 0,5}{\sim} \dfrac{b(x-1)}{(a+b)(x-1)} = \dfrac{b}{a+b}$.

Finalement : $\lim\limits_{p\to 0,5} p(E_a) = \dfrac{b}{a+b}$ ce qui est $p(E_a)$ lorsque $p=q$!

(Q3) Notons F_a (ou a !) la probabilité de voir l'expérience se terminer par le vidage de l'urne B (l'urne A contenant au départ a boules)
Pour obtenir $p(F_a)$ il suffit d'utiliser les résultats de Q2 en permutant les rôles de A et B. Ceci revient alors à permuter a et b ... et p et q.

Par conséquent,

- si $p=q$: $p(F_a)=\dfrac{a}{a+b}$;

- si $p\neq q$: $p(F_a)=\dfrac{\left(\frac{1}{x}\right)^{a+b}-\left(\frac{1}{x}\right)^{b}}{\left(\frac{1}{x}\right)^{a+b}-1}=\dfrac{1-x^{a}}{1-x^{a+b}}=\dfrac{x^{a}-1}{x^{a+b}-1}$.

Si $p=q$: $p(F_b)=\dfrac{a}{a+b}$, et si $p\neq q$: $p(F_b)=\dfrac{x^{a}-1}{x^{a+b}-1}$.

Q4 Notons T_a l'événement l'expérience se termine.

$T_a=E_a\cup F_a$. $p(T_a)=p(E_a)+p(F_a)$.

Si $p=q$: $p(T_a)=\dfrac{b}{a+b}+\dfrac{a}{a+b}=1$.

Si $p\neq q$: $p(T_a)=\dfrac{x^{a+b}-x^{a}}{x^{a+b}-1}+\dfrac{x^{a}-1}{x^{a+b}-1}=1$.

donc $\underline{p(T_a)=1}$; il est donc quasi-certain que l'expérience se termine.

PARTIE C Etude du nombre moyen de tirages effectués pour voir l'expérience se terminer

Remarque .. Notons que P_{A_1} et P_{B_1} sont des probabilités. ok !!

Q1 Soit $j\in\mathbb{N}^*$. Rappelons que TA_1 est l'événement le premier tirage se fait dans A.
Soit $k\in[\![1,a+b-1]\!]$.

$P_{A_1}(X_k=j)=P_{A_1}(X_k=j\,/\,TA_1)\,p(TA_1)+P_{A_1}(X_k=j\,/\,\overline{TA_1})\,p(\overline{TA_1})$

- $p(TA_1)=q$ et $p(\overline{TA_1})=1-q=p$.

- $P_{A_1}(X_k=j\,/\,TA_1)=P_{A_1}(X_{k-1}=j-1)$, sachant que l'on vide A et que le premier tirage se fait dans A
réalise $\{X_k=j\}$ c'est vider l'urne A en $j-1$ tirages sachant qu'elle contient $k-1$ boules

- $P_{A_1}(X_k=j\,/\,\overline{TA_1})=P_{A_1}(X_{k+1}=j-1)$, sachant que l'on vide A et que le premier tirage se fait dans B.
réalise $\{X_k=j\}$ C'est vider l'urne A en $j-1$ tirages sachant qu'elle contient $k+1$ boules.

Finalement : $\underline{p_{A_1}(X_k=j) = q\, p_{A_1}(X_{k-1}=j-1) + p\, p_{A_1}(X_{k+1}=j-1)}$

$p_{B_1}(X_k=j) = p_{B_1}(X_k=j\,|\,TA_1)\,p(TA_1) + p_{B_1}(X_k=j\,|\,\overline{TA_1})\,p(\overline{TA_1})$

- $p(TA_1) = q$ et $p(\overline{TA_1})=p$.
- $p_{B_1}(X_k=j\,|\,TA_1)=p_{B_1}(X_k\ =j-1)$. Sachant que le premier tirage se fait dans A, il ne reste plus qu'à vider l'urne B en $j-1$ tirages sachant que A contient $k-1$ boules.

- $p_{B_1}(X_k=j\,|\,\overline{TA_1}) = p_{B_1}(X_{k+1}=j-1)$ ... même type de raisonnement.

Donc $\underline{p_{B_1}(X_k=j) = q\, p_{B_1}(X_{k+1}=j-1) + p\, p_{B_1}(X_{k+1}=j-1)}$.

(A_1, B_1) est un système quasi-complet d'événements. Donc :

$p(X_k=j) = p_{A_1}(X_k=j)\,p(A_1) + p_{A_1}(X_k=j)\,p(B_1)$

$p(X_k=j) = q\,p_{A_1}(X_{k-1}=j-1)p(A_1) + p\,p_{A_1}(X_{k+1}=j-1)p(A_1) + q\,p_{B_1}(X_{k-1}=j-1)p(B_1) + p\,p_{B_1}(X_{k+1}=j-1)p(B_1)$

$p(X_k=j) = q[p_{A_1}(X_{k-1}=j-1)p(A_1) + p_{B_1}(X_{k-1}=j-1)p(B_1)] + p[p_{A_1}(X_{k+1}=j-1)p(A_1) + p_{B_1}(X_{k+1}=j-1)p(B_1)]$

soit encore : $\underline{p(X_k=j) = q\, p(X_{k-1}=j-1) + p\, p(X_{k+1}=j-1)}$ pour $k \in [\![1, a+b-1]\!]$ et $j \in \mathbb{N}^*$.

Soit $k \in [\![1, a+b-1]\!]$.

$E(X_k) = (-1)p(X_k=-1) + \sum_{j=0}^{+\infty} j\,p(X_k=j) = 0 + \sum_{j=0}^{+\infty} j\,p(X_k=j) = \sum_{j=1}^{+\infty} j\,p(X_k=j)$

$E(X_k) = \sum_{j=1}^{+\infty} j\,[q\,p(X_{k-1}=j-1) + p\,p(X_{k+1}=j-1)]$. En changeant j en $j+1$ on obtient :

$E(X_k) = \sum_{j=0}^{+\infty} (j+1)\,[q\,p(X_{k-1}=j) + p\,p(X_{k+1}=j)]$. Les séries de termes généraux $p(X_{k-1}=j)$, $j\,p(X_{k-1}=j)$, $p(X_{k+1}=j)$ et $j\,p(X_{k+1}=j)$ étant convergentes il vient :

$E(X_k) = q\sum_{j=0}^{+\infty} j\,p(X_{k-1}=j) + q\sum_{j=0}^{+\infty} p(X_{k-1}=j) + q\sum_{j=0}^{+\infty} j\,p(X_{k+1}=j) + p\sum_{j=0}^{+\infty} p(X_{k+1}=j)$

$\sum_{j=0}^{+\infty} P(X_{k+1}=j) = \sum_{j=0}^{+\infty} P(X_{k-1}=j) = 1$ car il est quasi-certain que l'expérience se termine.

Donc $E(X_k) = q\,E(X_{k-1}) + p\,E(X_{k+1}) + q + p$

Finalement : $\underline{\underline{\forall k \in [\![1, a+b-1]\!],\ E(X_k) = 1 + q\,E(X_{k-1}) + p\,E(X_{k+1})}}$.

(9.2) a) Remarquons que : $p = q = \frac{1}{2}$. Soit $k \in [\![1, a+b-1]\!]$

$E(Y_k) = E(X_k) + \alpha k^2 = \frac{1}{2} E(X_{k-1}) + \frac{1}{2} E(X_{k+1}) + 1 + \alpha k^2$

$E(Y_k) = \frac{1}{2}\left[E(Y_{k-1}) - \alpha (k-1)^2\right] + \frac{1}{2}\left[E(Y_{k+1}) - \alpha (k+1)^2\right] + 1 + \alpha k^2$

$E(Y_k) = \frac{1}{2} E(Y_{k-1}) + \frac{1}{2} E(Y_{k+1}) - \alpha \left[\underbrace{\frac{(k-1)^2}{2} + \frac{(k+1)^2}{2} - k^2}_{=1}\right] + 1$

$E(Y_k) = \frac{1}{2} E(Y_{k+1}) + \frac{1}{2} E(Y_{k-1}) - \alpha + 1$

$\underline{\underline{\text{En prenant } \alpha = 1 \text{ on obtient : } \forall k \in [\![1, a+b-1]\!],\ E(Y_k) = \frac{1}{2} E(Y_{k+1}) + \frac{1}{2} E(Y_k).}}$

b) On a encore $\forall k \in [\![1, a+b-1]\!]$, $E(Y_k) = p\,E(Y_{k+1}) + q\,E(Y_k)$ avec $p = q = \frac{1}{2}$

La partie A donne alors : $\forall n \in [\![0, a+b]\!],\ E(Y_n) = E(Y_0) + n \dfrac{E(Y_{a+b}) - E(Y_0)}{a+b}$

En particulier : $E(Y_a) = E(Y_0) + a \dfrac{E(Y_{a+b}) - E(Y_0)}{a+b}$

$E(Y_0) = E(X_0) + \alpha \times 0^2 = E(X_0) = 0$

$E(Y_{a+b}) = E(X_{a+b}) + \alpha \times (a+b)^2 = 0 + (a+b)^2 = (a+b)^2$

Finalement : $E(X_a) = E(Y_a) - \alpha a^2 = E(Y_a) - a^2 = 0 + a \dfrac{(a+b)^2 - 0}{a+b} - a^2 = a[a+b-a]$

$\underline{\underline{E(X_a) = ab}}$

Remarque - Soit $\in [\![0, a+b]\!]$

$E(Y_n) = E(Y_0) + n \dfrac{E(Y_{a+b}) - E(Y_0)}{a+b} = 0 + n \dfrac{(a+b)^2}{a+b} = n(a+b)$

$\underline{\underline{E(X_n) = n(a+b) - n^2 = n(a+b-n).}}$

(Q3) a) Soit $k \in [\![1, a+b-1]\!]$.

$E(Z_k) = E(X_k) + \beta k = q\,E(X_{k-1}) + p\,E(X_{k+1}) + \beta k + 1$

$E(Z_k) = q\left(E(Z_{k-1}) - \beta(k-1)\right) + p\left(E(Z_{k+1}) - \beta(k+1)\right) + \beta k + 1$

$E(Z_k) = q\,E(Z_{k-1}) + p\,E(Z_{k+1}) - \beta\,(qk - q + pk + p - k) + 1$

$E(Z_k) = q\,E(Z_{k-1}) + p\,E(Z_{k+1}) - \beta\,(p-q) + 1$.

En posant $\beta = \frac{1}{p-q}$ il vient alors : $\forall k \in [\![0, a+b]\!]$, $E(Z_k) = q\,E(Z_{k-1}) + p\,E(Z_{k+1})$.

b) 9) donne alors : $\forall n \in [\![0, a+b]\!]$, $E(Z_n) = \frac{x^{a+b}E(Z_0) - E(Z_{a+b})}{x^{a+b}-1} + \frac{E(Z_{a+b}) - E(Z_0)}{x^{a+b}-1}\, x^n$

$E(Z_0) = E(X_0) + \beta \times 0 = 0$. $E(Z_{a+b}) = E(X_{a+b}) + \beta(a+b) = \frac{a+b}{p-q}$

$\forall n \in [\![0, a+b]\!]$, $E(X_n) = E(Z_n) - \frac{n}{p-q} = \frac{x^{a+b}\times 0 - \frac{a+b}{p-q}}{x^{a+b}-1} + \frac{\frac{a+b}{p-q} - 0}{x^{a+b}-1} \times x^n - \frac{n}{p-q}$

$\forall n \in [\![0, a+b]\!]$, $E(X_n) = \frac{1}{p-q}\left[\frac{(a+b)(x^n-1)}{x^{a+b}-1} - n\right]$

En particulier : $E(X_a) = \frac{1}{p-q}\left[\frac{(a+b)(x^a-1)}{x^{a+b}-1} - a\right]$

c) Parions que nous allons trouver $\lim\limits_{p\to 0,5} E(X_a) = ab$!

Posons $y = x - 1$

$\lim\limits_{p\to 0,5} y = 0$.

$E(X_a) = \frac{1}{p(1-\frac{q}{p})}\,\frac{1}{(y+1)^{a+b}-1}\left[(a+b)(y+1)^a - a(y+1)^{a+b} - b\right]$

$\frac{1}{p(1-\frac{q}{p})} = \frac{1}{p(1-x)} = -\frac{1}{py} \underset{p\to 0,5}{\sim} -\frac{2}{y}$. $\frac{1}{(y+1)^{a+b}-1} = \frac{1}{e^{(a+b)\ln(1+y)}-1} \underset{p\to 0,5}{\sim} \frac{1}{(a+b)\ln(1+y)} \sim \frac{1}{(a+b)y}$

Donc $E(X_a) \underset{p\to 0,5}{\sim} -\frac{2}{(a+b)y^2}\left[(a+b)(y+1)^a - a(y+1)^{a+b} - b\right]$

$(y+1)^a = 1 + ay + \frac{a(a-1)}{2}y^2 + o(y^2)$ et $(y+1)^{a+b} = 1 + (a+b)y + \frac{(a+b)(a+b-1)}{2}y^2 + o(y^2)$

$(a+b)(y+1)^a - a(y+1)^{a+b} - b = (a+b) + a(a+b)y + (a+b)\frac{a(a-1)}{2}y^2 - a - a(a+b)y - \frac{a(a+b)(a+b-1)}{2}y^2 - b + o(y^2)$

$$(a+b)(y+1)^a - a(y+1)^{a+b} - b = \frac{a(a+b)}{2}[a-1-(a+b-1)]y^2 + o(y^2) = -\frac{ab(a+b)}{2}y^2 + o(y^2).$$

Donc $(a+b)(y+1)^a - a(y+1)^{a+b} - b \underset{p\mapsto 0,5}{\sim} -\frac{ab(a+b)}{2}y^2$

$$E(X_a) \underset{p\mapsto 0,5}{\sim} -\frac{2}{(a+b)y^2} \times \left(-\frac{ab(a+b)}{2}y^2\right) = ab.$$

$$\lim_{p\mapsto 0,5} E(X_a) = ab \; .$$

d) $p < q$. $\quad \dfrac{(a+b)(x^a-1)}{x^{a+b}-1} \underset{b\mapsto+\infty}{\sim} (x^a-1)\dfrac{b}{x^{a+b}} = (x^a-1)\dfrac{b}{e^{(a+b)\ln x}}$ $\quad x = \frac{q}{p} > 1$

$$\lim_{b\mapsto+\infty} (x^a-1)\frac{b}{e^{(a+b)\ln x}} = 0 \quad \text{car } x > 1 .$$

Donc $\displaystyle\lim_{b\mapsto+\infty} E(X_a) = \lim_{b\mapsto+\infty} \frac{1}{p-q}\left[\frac{(a+b)(x^a-1)}{x^{a+b}-1} - a\right] = -\frac{a}{p-q} = \frac{a}{q-p}$.

$$\lim_{b\mapsto+\infty} E(X_a) = \frac{a}{q-p} = \frac{a}{1-2p} .$$