

Q2 a) u (resp. v) est de dans \mathcal{C}^∞ sur $(\mathbb{R}-\{1\})$ (resp. $(\mathbb{R}-\{2\})$) comme fonction rationnelle.

montrons par récurrence que: $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall x \in (\mathbb{R}-\{2\})$, $u^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p p!}{(1+x)^{p+1}}$ et

$$\forall x \in (\mathbb{R}-\{1\}), v^{(p)}(x) = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}.$$

- B'at doit pour $p=0$.

- Supposons la propriété vraie pour $p \in \mathbb{N}$ et montrons la pour $p+1$.

$$\forall x \in (\mathbb{R}-\{2\}), u^{(p)}(x) = (-1)^p p! (1+x)^{-p-1} \text{ donc } \forall x \in (\mathbb{R}-\{2\}), u^{(p+1)}(x) = (-1)^{p+1} p! (-p-1)(1+x)^{-p-2}$$

$$\text{donc } \forall x \in (\mathbb{R}-\{2\}), u^{(p+1)}(x) = \frac{(-1)^{p+1} p! (-p-1)}{(1+x)^{p+2}} = \frac{(-1)^{p+1} (p+1)!}{(1+x)^{p+2}}.$$

$$\text{De même } \forall x \in (\mathbb{R}-\{1\}), v^{(p)}(x) = p! (1-x)^{-p-1} \text{ donc } \forall x \in (\mathbb{R}-\{1\}), v^{(p+1)}(x) = p! (-1)(-p-1)(1-x)^{-p-2}$$

$$\text{donc } \forall x \in (\mathbb{R}-\{1\}), v^{(p+1)}(x) = \frac{p!(p+1)}{(1-x)^{p+2}} = \frac{(p+1)!}{(1-x)^{p+2}} \text{ ce qui achève la récurrence.}$$

$$\text{donc } \forall x \in (\mathbb{R}-\{2\}), u^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p p!}{(1+x)^{p+1}} \text{ et } \forall x \in (\mathbb{R}-\{1\}), v^{(p)}(x) = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}} \text{ et}$$

ceci pour tout p donné.

b) $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid 1+x \neq 0 \text{ et } \frac{1-x}{1+x} > 0\}$ donc $D_f =]-1, 1[$.

$$\forall x \in D_f, f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \ln(1-x) - \ln(1+x) \quad (1-x > 0 \text{ et } 1+x > 0).$$

Par conséquent f est dérivable sur D_f comme différence de deux fonctions dérivables sur D_f .

$$\forall x \in D_f, f'(x) = \frac{-1}{1-x} - \frac{1}{1+x}. \quad \underline{\underline{\forall x \in D_f, f'(x) = -u(x) - v(x).}}$$

u et v est de dans \mathcal{C}^∞ sur D_f , f' est de dans \mathcal{C}^∞ sur D_f . Par conséquent:

f est de dans \mathcal{C}^∞ sur D_f .

soit $p \in \mathbb{N}^*$. $\forall x \in D_f, f'(x) = -u(x) - v(x)$

$\forall x \in D_f, f^{(p)}(x) = -u^{(p-1)}(x) - v^{(p-1)}(x) = -\frac{(-1)^{p-1}(p-1)!}{(1+x)^p} - \frac{(p-1)!}{(1-x)^p}$

$\forall x \in D_f, f^{(p)}(x) = (p-1)! \left[\frac{(-1)^p}{(1+x)^p} - \frac{1}{(1-x)^p} \right]$

c) $\forall k=0, f^{(k)}(0) = f(0) = 0$. $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $f^{(2k)}(0) = (2k-1)! \left[\frac{(-1)^{2k}}{(1+0)^{2k}} - \frac{1}{(1-0)^{2k}} \right] = 0$

donc $\forall k \in \mathbb{N}, f^{(2k)}(0) = 0$.

Remarque... Ceci est pas une surprise. En effet f est impaire sur $]-1, 1[$ donc $f^{(p)}$ est impaire (resp. paire) sur D_f si p est pair (resp. impair).

soit $k \in \mathbb{N}$. $f^{(2k+1)}(0) = (2k)! \left[\frac{(-1)^{2k+1}}{(1+0)^{2k+1}} - \frac{1}{(1-0)^{2k+1}} \right] = (2k)!(-1-1) = -2(2k)!$

$\forall k \in \mathbb{N}, f^{(2k+1)}(0) = -2(2k)!$

soit $x \in]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$.

on fait dy a egalite !!

$|f^{(2n+1)}(x)| = (2n)! \left| \frac{(-1)^{2n+1}}{(1+x)^{2n+1}} - \frac{1}{(1-x)^{2n+1}} \right| \leq (2n)! \left[\frac{1}{(1+x)^{2n+1}} + \frac{1}{(1-x)^{2n+1}} \right]$

$x \in]0, 1[$ donc $(1+x)^{2n+1} \geq 1$ et $(1-x)^{2n+1} \leq (1-1/3)^{2n+1} = (\frac{2}{3})^{2n+1}$

donc $|f^{(2n+1)}(x)| \leq (2n)! \left[\frac{1}{1} + \frac{1}{(\frac{2}{3})^{2n+1}} \right] = (2n)! \left(1 + \left(\frac{3}{2}\right)^{2n+1} \right) \leq (2n)! \left(2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{2n+1} \right)$

$|f^{(2n+1)}(x)| \leq (2n)! \times \frac{3^{2n+1}}{2^{2n+1}} = (2n)! \frac{3^{2n+1}}{2^{2n+1}} = (2n)! \frac{3^{2n+1}}{4^{n+1}}$ $1 \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{2n+1}$, ça va? **

donc $\forall x \in]0, 1[$, $|f^{(2n+1)}(x)| \leq (2n)! \frac{3^{2n+1}}{4^{n+1}}$ et ceci pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) f est au voisin de classe C^{2n+1} sur $]0, 1[$. L'inégalité de Taylor-Lagrange donne

alors: $\forall x \in]0, 1[$, $|f(x) - \sum_{k=0}^{2n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \max_{t \in]0, x[} |f^{(2n+1)}(t)|$

Notons que $f^{(2k)}(0) = 0$ et $f^{(2k+1)}(0) = -2(2k)!$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

de plus: $\max_{t \in]0, x[} |f^{(2n+1)}(t)| \leq \max_{t \in]0, 1[} |f^{(2n+1)}(t)| \leq (2n)! \frac{3^{2n+1}}{4^{n+1}}$ pour tout $x \in]0, 1[$.

Ainsi $\forall x \in]0, 1[$, $|f(x) - \sum_{k=0}^{2n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} (-2(2k)!)| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \times (2n+2)! \frac{3^{2n+1}}{4^{n+1}}$

donc $\forall x \in]0, 1[$, $|f(x) + 2 \sum_{k=0}^{2n} \frac{(2k)!}{(2k+1)!} x^{2k+1}| \leq \frac{13|x|^{2n+1}}{2^{2n+1}} \times \frac{1}{4^{n+1}} \leq \frac{1}{(2n+3)4^{n+1}}$

$$\text{Si } \forall x \in [0, \frac{1}{3}], |f(x) + 2 \sum_{k=0}^n \frac{1}{4^{k+1}} x^{4^{k+1}}| \leq \frac{1}{4^{n+1}(4+3)}$$

$$\text{Si } \forall x \in [0, \frac{1}{3}], |f(x) + 2S_n(x)| \leq \frac{1}{4^{n+1}(4+3)}$$

$$\textcircled{a)} \text{ a) } \forall a \in [3, 4]. \quad x = \frac{a-1}{a+1} = \frac{a+1-2}{a+1} = 1 - \frac{2}{a+1}$$

$$2 \leq a+1 \leq 3; \quad \frac{2}{3} \leq \frac{2}{a+1} \leq 1; \quad 1-1 \leq x = 1 - \frac{2}{a+1} \leq 1 - \frac{2}{3} \quad \text{si } x \in [0, \frac{1}{3}]$$

$$\text{Ainsi: } |f(x) + 2S_n(x)| \leq \frac{1}{4^{n+1}(4+3)}$$

$$f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x} = \ln \left(\frac{1 - \frac{a-1}{a+1}}{1 + \frac{a-1}{a+1}} \right) = \ln \left(\frac{a+1-a+1}{a+1+a-1} \right) = \ln \frac{2}{2a} = \ln(1/a) = -\ln a$$

$$\text{Si } |-\ln a - 2S_n(x)| = |-\ln a + 2S_n(x)| = |f(x) + 2S_n(x)| \leq \frac{1}{4^{n+1}(4+3)}$$

$$\text{Si } |\ln a - 2S_n(x)| \leq \frac{1}{4^{n+1}(4+3)}$$

b) d'utiliser de la machine pocket de dire que la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $\frac{1}{4^{n+1}(4+3)} < 5 \times 10^{-4}$ est $n=3$.

c)

k	0	1	2	3
$\frac{x^{4^{k+1}}}{4^{k+1}}$	1	$\frac{1}{375}$	$\frac{1}{15625}$	$\frac{1}{146875}$

$$a = \frac{3}{2}; \quad x = \frac{\frac{3}{2}-1}{\frac{3}{2}+1} = \frac{1}{5}$$

$$2S_3(x) = 2 \left(1 + \frac{1}{375} + \frac{1}{15625} + \frac{1}{146875} \right) = \frac{665\,216}{1640625}$$

$$2S_3(x) \approx 0,405\,464\,9905 \quad \ln \frac{3}{2} \approx 0,405\,465\,1081$$

$\ln \frac{3}{2} - 2S_3(x) \approx 1,2 \times 10^{-4}$. C'est mieux que prévu! Normal avec son rajout de marmouste!

(**)

Q1) g est dérivable sur $]0, 1[$ et $\forall x \in]0, 1[$, $g'(x) = -bx - x \frac{1}{x} = -bx - 1$.

$$\forall x \in]0, 1[, g'(x) = -bx + b \frac{1}{x}.$$

$$\forall x \in]0, \frac{1}{e}], g'(x) \geq 0 \text{ et } \forall x \in [\frac{1}{e}, 1[, g'(x) \leq 0.$$

g est croissante sur $]0, \frac{1}{e}]$ et décroissante sur $[\frac{1}{e}, 1[$.

$$\text{Ainsi } \forall x \in]0, 1[, 0 \leq -x \& b x = g(x) \leq g(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e} b (\frac{1}{e}) = \frac{1}{e}.$$

$$\text{Donc } \forall x \in]0, 1[, 0 \leq g(x) \leq \frac{1}{e}. \quad \forall x \in]0, 1[, |g(x)| \leq \frac{1}{e}.$$

Q2) $p: x \mapsto e^x$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R} . de plus $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, p^{(n)}(x) = e^x$.

soit $u \in \mathbb{R}$. la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à p à l'ordre n

$$\text{donne : } \forall u \in \mathbb{R}, p(u) = \sum_{k=0}^n \frac{u^k}{k!} p^{(k)}(0) + \int_0^u \frac{(u-t)^n}{n!} p^{(n+1)}(t) dt.$$

$$\text{donc } \forall u \in \mathbb{R}, e^u = \sum_{k=0}^n \frac{u^k}{k!} 1 + \int_0^u \frac{(u-t)^n}{n!} e^t dt = \sum_{k=0}^n \frac{u^k}{k!} + \int_0^u \frac{(u-t)^n}{n!} e^t dt.$$

$$\text{Prenons } \forall u \in \mathbb{R}, R_n(u) = e^u - \sum_{k=0}^n \frac{u^k}{k!}. \quad \forall u \in \mathbb{R}, e^u = \sum_{k=0}^n \frac{u^k}{k!} + R_n(u)$$

1) R_n est continue sur \mathbb{R} comme combinaison linéaire de fonctions continues sur \mathbb{R} .

$$2) \forall u \in \mathbb{R}, R_n(u) = \int_0^u \frac{(u-t)^n}{n!} e^t dt.$$

$$\text{soit } u \in \mathbb{R}^+. \quad \forall t \in]0, u[, 0 \leq e^t \leq e^u \text{ et } \frac{(u-t)^n}{n!} \geq 0. \quad \forall t \in]0, u[, 0 \leq \frac{(u-t)^n}{n!} e^t \leq \frac{(u-t)^n}{n!} e^u.$$

$$\text{en intégrant entre 0 et } u \text{ on voit } 0 \leq R_n(u) \leq e^u \int_0^u \frac{(u-t)^n}{n!} dt \text{ car } 0 \leq u.$$

$$\text{à } \int_0^u \frac{(u-t)^n}{n!} dt = \left[-\frac{(u-t)^{n+1}}{(n+1)n!} \right]_0^u = \frac{u^{n+1}}{(n+1)!}. \quad \text{donc } 0 \leq R_n(u) \leq \frac{u^{n+1}}{(n+1)!} e^u$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in \mathbb{R}, e^u = \sum_{k=0}^n \frac{u^k}{k!} + R_n(u), \text{ où } R_n \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ et vérifie :}$$

$$\forall u \in \mathbb{R}^+, 0 \leq R_n(u) \leq \frac{u^{n+1}}{(n+1)!} e^u.$$

Q3 a) et b) Version 1 Avec la fonction Gamma.

$P: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ est définie sur \mathbb{R}_+^0 et $\forall n \in \mathbb{N}^0$, $P(n) = (n-1)!$

Alors $\int_0^{+\infty} t^{(n+1)-1} e^{-t} dt$ existe et vaut $(n+1-1)!$ pour tout n dans \mathbb{N} .

Donc Γ_n existe et vaut $n!$ pour tout n dans \mathbb{N} .

Version 2... On suit la leçon. Soit $n \in \mathbb{N}$.

* $u \mapsto e^{-u} u^n$ est continue sur $[0, +\infty[$.

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} (u^n (e^{-u} u^n)) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(\frac{u^{2n}}{e^u} \right) = 0 \text{ par croissance comparée.}$$

$$\text{Alors } \forall \epsilon > 0 \quad \exists \frac{1}{u_0} > 0$$

$$\forall u \in [1, +\infty[, e^{-u} u^n \geq 0 \text{ et } \frac{1}{u^2} \geq 0$$

$$\text{soit } \int_1^{+\infty} \frac{du}{u^2} \text{ converge car } u \geq 1.$$

Les critères de convergence sur les intégrales impropres de fonctions positives nous assurent que

$$\int_0^{+\infty} e^{-u} u^n du \text{ converge. } \underline{\Gamma_n \text{ existe pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}.}$$

soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $A \in [0, +\infty[$.

$$\int_0^A e^{-u} u^{k+1} du = \left[(-e^{-u}) u^{k+1} \right]_0^A - \int_0^A (-e^{-u}) (k+1) u^k du = -\frac{A^{k+1}}{e^A} + (k+1) \int_0^A e^{-u} u^k du.$$

$u \mapsto (-e^{-u}) u^{k+1}$ est B'ne sur $[0, +\infty[$

$\lim_{A \rightarrow +\infty} \left(-\frac{A^{k+1}}{e^A} \right) = 0$ par croissance comparée. En faisant tendre A vers $+\infty$ il vient donc

$$\Gamma_{k+1} = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{k+1} du = 0 + (k+1) \int_0^{+\infty} e^{-u} u^k du = (k+1) \Gamma_k.$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \underline{\Gamma_{k+1} = (k+1) \Gamma_k.} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \frac{\Gamma_{k+1}}{(k+1)!} = \frac{\Gamma_k}{k!}. \text{ Alors } \left(\frac{\Gamma_k}{k!} \right)_{k \in \mathbb{N}}$$

est constante. Ainsi $\forall k \in \mathbb{N}, \frac{\Gamma_k}{k!} = \frac{\Gamma_0}{0!} = \Gamma_0 = \int_0^{+\infty} e^{-u} du = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-u} du = \lim_{A \rightarrow +\infty} [-e^{-u}]_0^A = 1.$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \frac{J_k}{k!} = 1. \quad \forall k \in \mathbb{N}, J_k = k! \quad \text{ou} \quad \underline{\underline{\forall k \in \mathbb{N}, J_k = k!}}$$

o) $x \mapsto -(k+1)x$ et de dans \mathcal{B}^1 sur $]0, +\infty[$ ce qui justifie le changement de variable $v = -(k+1)x$ dans ce qui suit.

$$\int_{\mathbb{R}} x^k (kx)^k dx = \int_{-(k+1)k\epsilon}^{-(k+1)k\epsilon} (e^{-\frac{v}{k+1}})^k \left(-\frac{v}{k+1}\right)^k \left(-\frac{1}{k+1} e^{-\frac{v}{k+1}}\right) dv.$$

" $v = -(k+1)kx,$
 $x = e^{-\frac{v}{k+1}}$ et
 $dx = -\frac{1}{k+1} e^{-\frac{v}{k+1}} dv$ "

$$\int_{\mathbb{R}} x^k (kx)^k dx = \frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}} \int_0^{-(k+1)k\epsilon} (e^{-\frac{v}{k+1}})^{k+1} v^k dv = \frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}} \int_0^{-(k+1)k\epsilon} e^{-v} v^k dv.$$

$$\underline{\underline{\int_{\mathbb{R}} x^k (kx)^k dx = \frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}} \int_0^{-(k+1)k\epsilon} e^{-v} v^k dv.}}$$

o) Reprenons k dans \mathbb{N} et remarquons que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (-(k+1)k\epsilon) = +\infty$.

$$\text{Alors } \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} x^k (kx)^k dx = \frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}} J_k = \frac{(-1)^k k!}{(k+1)^{k+1}}.$$

$$\text{Ainsi } \underline{\underline{I_k = \int_0^1 x^k (kx)^k dx \text{ converge et vaut } \frac{(-1)^k k!}{(k+1)^{k+1}}.}}$$

Q4) Remarque 1. $g:]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Nous avons vu que $\forall x \in]0, 1], 0 \leq g(x) \leq \frac{1}{e}$.
 $x \mapsto -x \ln x$

de plus g est continue sur $]0, 1]$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \tilde{g}(x) = 0$. Alors g est prolongeable par continuité à 0.

Nous \tilde{g} son prolongement par continuité à 0. $\forall x \in]0, 1], \tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Alors $\forall x \in]0, 1], 0 \leq \tilde{g}(x) \leq \frac{1}{e}$.

$\forall x \in]0, 1], x^{-x} = e^{-x \ln x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x \ln x} = e^{-0} = 1$. Alors $x \mapsto x^{-x}$ est continue

sur $]0, 1]$ et prolongeable par continuité à 0. Ainsi $\underline{\underline{\int_0^1 x^{-x} dx \text{ est convergent.}}}$

$$\underline{\underline{L}} \dots \int_0^1 x^{-x} dx = \int_0^1 e^{-x \ln x} dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-x \ln x)^k}{k!} dx \stackrel{!!!}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^k x^k (\ln x)^k}{k!} dx. \quad (*)$$

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k I_k}{k!} !!$$

Sauf que (*) est illicite. D'où l'idée de montrer (*) et vérifier que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \int_0^1 \frac{(-1)^k x^k (\ln x)^k}{k!} dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-x \ln x)^k}{k!} dx \text{ ce qui revient à montrer}$$

$$\text{que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k I_k}{k!} = \int_0^1 x^{-x} dx.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. $\forall u \in \mathbb{R}_+$, $e^u = \sum_{k=0}^n \frac{u^k}{k!} + R_n(u)$ avec $0 \leq R_n(u) \leq \frac{u^{n+1}}{(n+1)!} e^u$.

$\forall x \in [0,1]$, $e^{\hat{q}(x)} = \sum_{k=0}^n \frac{(\hat{q}(x))^k}{k!} + R_n(\hat{q}(x))$. Notons que $x \mapsto R_n(\hat{q}(x))$ est

continue sur $[0,1]$ car R_n est continue sur \mathbb{R} et \hat{q} est continue sur $[0,1]$.

Alors en intégrant à droite :

$$\int_0^1 e^{\hat{q}(x)} dx = \sum_{k=0}^n \int_0^1 \frac{(\hat{q}(x))^k}{k!} dx + \int_0^1 R_n(\hat{q}(x)) dx \quad (*)$$

Posez $r_n = \int_0^1 R_n(\hat{q}(x)) dx$.

$\forall x \in [0,1]$, $\hat{q}(x) \in \mathbb{R}^+$ donc $\forall x \in [0,1]$, $0 \leq R_n(\hat{q}(x)) \leq \frac{(\hat{q}(x))^{n+1}}{(n+1)!} e^{\hat{q}(x)} \leq \frac{(\frac{1}{e})^{n+1} e^{1/e}}{(n+1)!}$.

donc $0 \leq r_n = \int_0^1 R_n(\hat{q}(x)) dx \leq \int_0^1 \frac{(\frac{1}{e})^{n+1} e^{1/e}}{(n+1)!} dx \leq \frac{(\frac{1}{e})^{n+1} e^{1/e}}{(n+1)!}$.

Alors $0 \leq r_n \leq \frac{e^{1/e}}{(n+1)! e^{n+1}}$.

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \int_0^1 e^{-x \ln x} dx = \int_0^1 e^{\hat{q}(x)} dx = \int_0^1 e^{\hat{q}(x)} dx \stackrel{(*)}{=} \sum_{k=0}^n \int_0^1 \frac{(-x \ln x)^k}{k!} dx + r_n.$$

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 x^k (\ln x)^k dx + r_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} I_k + r_n.$$

Ainsi, pour tout n dans \mathbb{N} , $\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} J_{k+r_n}$, avec $0 < r_n < \frac{e^{1/e}}{(n+1)! e^{n+1}}$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} ((n+1)! e^{n+1}) = +\infty$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{1/e}}{(n+1)! e^{n+1}} = 0$.

Alors par encadrement on obtient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 0$.

Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} J_{k+r_n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^1 x^{-x} dx - r_n \right) = \int_0^1 x^{-x} dx$.

∀ $k \in \mathbb{N}$, $\frac{(-1)^k}{k!} J_{k+r} = \frac{(-1)^k}{k!} \frac{(-1)^k k!}{(k+1)^{k+1}} = \frac{1}{(k+1)^{k+1}}$.

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^{k+1}} = \int_0^1 x^{-x} dx$. Ici d'après encore $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^k} = \int_0^1 x^{-x} dx$

Alors 14 la série de terme général $\frac{1}{k^k}$ converge.

17 $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^k} = \int_0^1 x^{-x} dx$.

Voilà sur le même thème Ericane 1987 exercice 2.

PREMIÈRE PARTIE

Q1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\bigcup_{i=1}^n A_i \subset \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i$; par croissance d'une probabilité: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) \leq P(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i)$.

Ainsi: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq u_{n+1}$. $(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante.

Q2) Soit $i \in \mathbb{N}^*$

$P(A_i) = P((X_1 = x_0) \cap (X_2 = x_1) \cap \dots \cap (X_{i+p-1} = x_{p-1}))$; par indépendance il vient:

$P(A_i) = P(X_1 = x_0) P(X_2 = x_1) \dots P(X_{i+p-1} = x_{p-1})$. Or les v.a. X_j suivent toutes la même loi

Ainsi: $P(X_1 = x_0) = P(X_2 = x_1) = \dots = P(X_{i+p-1} = x_{p-1}) = P(X_{1+p-1} = x_{p-1})$.

Donc $P(A_i) = P(X_1 = x_0) P(X_2 = x_1) \dots P(X_{i+p-1} = x_{p-1}) = P(A_1)$.

Donc $\forall i \in \mathbb{I}_1, +\infty \mathbb{I}$, $P(A_i) = P(A_1)$.

Q3) a) ENTENDANT ENTENDANT. Cette séquence est p.e.p. et $i=6$

b) ÉCRICOME ÉCRICOME. Cette séquence est s.e.p. et $i=7$!

c) FINI. Cette séquence n'est pas p.e.p.

Q4) $A_q = \{X_q = x_0\} \cap \dots \cap \{X_{q+p-1} = x_{p-1}\}$

$A_{q+r} = \{X_{q+r} = x_0\} \cap \dots \cap \{X_{q+r+p-1} = x_{p-1}\}$

Supposons A_q et A_{q+r} non compatibles. Rappelons que $r \in \mathbb{I}_{1, p-1}$.

On aurait alors la réalisation simultanée des événements $\{X_{q+r} = x_0\}, \{X_{q+r+1} = x_1, \dots, \{X_{q+r-1} = x_{p-1}\}$ (événements participant à A_{q+r}) et de $\{X_q = x_0\}, \{X_{q+1} = x_1, \dots, \{X_{q+p-1} = x_{p-1}\}$ (événements participant à A_q)

Ainsi on aurait: $x_r = x_0, x_{r+1} = x_1, \dots, x_{p-1} = x_{p-1-r}$ [événements participant à A_{q+r}]

Pour $i = r$, $i \in \mathbb{I}_{1, p-1} \cap \mathbb{I}$ et $\forall j \in \mathbb{I}_{1, p-1} \cap \mathbb{I}$, ($j \geq i \Rightarrow x_j = x_{j-i}$). x_0, x_1, \dots, x_{p-1} est rep, ce qui est impossible.

Ainsi A_q et A_{q+r} sont incompatibles.

Q5) Soit $k \in \mathbb{I}_1, +\infty \mathbb{I}$.

$$u_{k+1} = P(\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i) = P(\bigcup_{i=1}^k A_i \cup A_{k+1}) = P(\bigcup_{i=1}^k A_i) + P(A_{k+1}) - P((\bigcup_{i=1}^k A_i) \cap A_{k+1})$$

$$V_{k+1} = V_k + a - p \left(\bigcap_{i=1}^k (U A_i) \cap A_{k+1} \right) = V_k + a - p \left(\left(\bigcap_{i=1}^{k-p+1} (U A_i) \cap A_{k+1} \right) \cup \left(\bigcap_{i=k-p+2}^k (U A_i) \cap A_{k+1} \right) \right)$$

$$p \left(\bigcap_{i=k-p+2}^k (U A_i) \cap A_{k+1} \right) = \bigcup_{i=k-p+2}^k p(A_i \cap A_{k+1}) = \bigcup_{i=k-p+2}^k p(A_i \cap A_{i+(k+1-i)})$$

Remarquons alors que si $i \in [k-p+2, k]$, $k+1-i \in [1, p-1]$ et d'après la question précédente : $A_i \cap A_{i+(k+1-i)} = \emptyset$. Par conséquent : $\left(\bigcap_{i=k-p+2}^k (U A_i) \right) \cap A_{k+1} = \emptyset$

Ainsi $V_{k+1} = V_k + a - p \left(\bigcap_{i=1}^{k-p+1} (U A_i) \cap A_{k+1} \right)$ pour $k \geq p$.

Q6) Soit $\{X_j : j \in \mathbb{N}^*\}$ les variables intervenant dans A_i soit : $X_1, X_{k+1}, \dots, X_{k+p-1}$.

les variables intervenant dans $\bigcup_{i=1}^{k-p+1} A_i$ soit : $X_1, X_2, \dots, X_{k-p+1+p-1}$ c'est à dire X_1, X_2, \dots, X_k .

les variables X_j intervenant dans $\bigcup_{i=1}^{k-p+1} A_i$ soit : X_1, X_2, \dots, X_k .

les variables X_j intervenant dans A_{k+1} soit : $X_{k+2}, X_{k+3}, \dots, X_{k+p}$

les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_k, X_{k+2}, X_{k+3}, \dots, X_{k+p}$ étant indépendantes les événements $\bigcup_{i=1}^{k-p+1} A_i$ et A_{k+1} le sont aussi.

ceci permet d'écrire que : $p \left(\left(\bigcup_{i=1}^{k-p+1} A_i \right) \cap A_{k+1} \right) = p \left(\bigcup_{i=1}^{k-p+1} A_i \right) p(A_{k+1}) = V_{k-p+1} \times a$

Ainsi $V_{k+1} = V_k + a - a V_{k-p+1}$.

Q7) Soit $k \in [1, p]$. A_1, A_2, \dots, A_k sont deux à deux incompatibles d'après Q6

Par conséquent $V_k = p \left(\bigcup_{i=1}^k A_i \right) = \sum_{i=1}^k p(A_i) = ka$.

$\forall k \in [1, p], V_k = ka$

Q8) $(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = p \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) \in [0, 1]$ donc $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in [0, 1]$ (en effet $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1 - v_n$).

$\forall k \in [1, p], u_k = 1 - v_k = 1 - ka$. $\forall k \in [p, +\infty[$, $u_{k+1} = 1 - v_{k+1} = 1 - v_k - a + a v_{k-p+1}$

$\forall k \in [p, +\infty[$, $u_{k+1} = u_k - a + a(1 - v_{k-p+1}) = u_k - a v_{k-p+1}$

$\forall k \in [1, p], u_k = 1 - ka$ et $\forall k \in [p, +\infty[$, $u_{k+1} = u_k - a v_{k-p+1}$

PARTIE II

Q1 la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante et minorée par 1 ; elle est donc convergente.

Notons l sa limite. $\forall k \in \mathbb{N}, +\infty[$, $u_{k+1} = u_k - a u_{k+1}$; en faisant tendre k vers $+\infty$ il vient : $l = l - a l$. $a l = 0$. $l = 0$ car $a \neq 0$.

Ainsi $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0 et $(v_n)_{n \geq 1}$ converge vers 1.

Ainsi $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0 et $(v_n)_{n \geq 1}$ converge vers 1.

Notons \hat{A} l'événement : Pe met ou bleu apparaît au moins une fois.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\hat{A}_i \subset \hat{A}$. Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = P(\hat{A}_i) \leq P(\hat{A}) \leq 1$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq P(\hat{A}) \leq 1$. Par passage à la limite : $1 \leq P(\hat{A}) \leq 1$. $P(\hat{A}) = 1$.

Not donc quasi-certain pour qu'un met précis apparaisse au moins une fois dans le texte.

Q2 Notons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, +\infty[$, $u_n \leq (1-a)^{n-p} (1-pa)$.

* $u_p = 1-pa \leq 1-pa = (1-a)^{p-p} (1-pa)$; la propriété est vraie pour $n=p$.

* Supposons l'inégalité vraie pour n (énoncé de $\mathbb{N}, +\infty[$ et montrons la pour $n+1$.

$$u_{n+1} = u_n - a u_{n-p+1} \leq u_n - a u_n = (1-a) u_n \leq (1-a) (1-a)^{n-p} (1-pa) = (1-a)^{n+1-p} (1-pa)$$

(la suite est décroissante donc $u_{n-p+1} \geq u_n$)

H.E. $\oplus 1-a \geq 0$

$\forall n \in \mathbb{N}, +\infty[$, $u_n \leq (1-a)^{n-p} (1-pa)$.

$a = P(A)$, et $a \neq 0$. Donc $a \in]0, 1[$; $1-a \in]0, 1[$. Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1-a)^{n+1-p} = 0$

de plus $\forall n \in \mathbb{N}, +\infty[$, $0 \leq u_n \leq (1-a)^{n-p} (1-pa)$.

Par encadrement on obtient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$... avec en prime une petite idée sur la vitesse de convergence.

Q3 a) $\forall k \in \mathbb{N}, +\infty[$, $u_k = 1 - k \times \frac{4}{25}$. $u_1 = \frac{21}{25}$, $u_2 = \frac{17}{25}$.

$$\forall k \in \mathbb{N}, +\infty[$$
, $u_{k+1} = u_k - \frac{4}{25} u_{k-1}$.

Donc $u_1 = \frac{21}{25}$, $u_2 = \frac{17}{25}$ et $\forall k \in \mathbb{N}, +\infty[$, $u_{k+1} = u_k - \frac{4}{25} u_{k-1}$

$(u_n)_{n \geq 1}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique

$x \in \mathbb{R}$ et $x^2 - x + \frac{4}{25} = 0$ qui admet deux racines réelles distinctes: $\frac{1}{5}$ et $\frac{4}{5}$.

$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \lambda \left(\frac{1}{5}\right)^n + \mu \left(\frac{4}{5}\right)^n.$

$$\begin{cases} \frac{21}{25} = \frac{\lambda}{5} + \frac{4\mu}{5} \\ \frac{17}{25} = \frac{\lambda}{25} + \frac{36\mu}{25} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda + 4\mu = \frac{21}{5} \\ \lambda + 36\mu = \frac{17}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{21}{5} - 4\mu \\ 12\mu = \frac{17}{5} - \frac{21}{5} = -\frac{6}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = -\frac{6}{5} \cdot \frac{1}{12} = -\frac{1}{10} \\ \lambda = \frac{21}{5} - \frac{6}{10} = \frac{42}{10} - \frac{6}{10} = \frac{36}{10} = \frac{18}{5} \end{cases}$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = -\frac{1}{10} \left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{18}{5} \left(\frac{4}{5}\right)^n = \frac{4}{3} \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}.$

b) $P(A_3) = P(X_3=1)P(X_2=5) = P(X_3=1)P(X_2=5) = \frac{40}{75} \times \frac{3}{30} = \frac{4 \times 3}{3 \times 75} = \frac{4}{25}.$

$P(A_3) = \frac{4}{25}.$

Rappelons que U_n est la probabilité pour que A s'apparaisse au moins une fois dans la suite des $n+1-3 = n+1$ premiers caractères imprimés.

La probabilité cherchée est donc $U_{50} = 1 - u_{50} = 1 - \frac{4}{3} \left(\frac{4}{5}\right)^{51} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5}\right)^{51}.$

donc $U_{50} \approx 0,999924776.$

Q4) a) $n \in \mathbb{N}^*$, soit $k \in \mathbb{Z}, +\infty$.
$$\begin{bmatrix} u_{k+1} \\ u_k \\ u_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_k - a u_{k-2} \\ u_k \\ u_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ u_{k-1} \\ u_{k-2} \end{bmatrix}$$

Pour $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$

$\forall k \in \mathbb{Z}, +\infty, U_{k-1} = AU_{k-2}.$ une récurrence simple d'une valeur:

$\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = A^{n-1}U_1.$

b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}, A - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & -a \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix};$ cherchons une réduite de Gauss de cette matrice

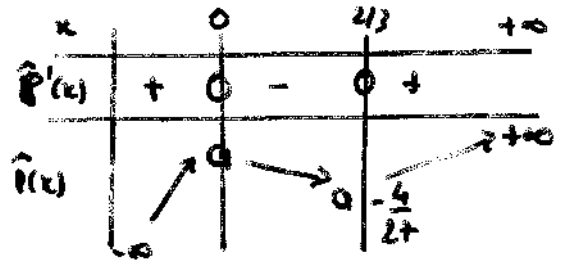
$l_1 \leftrightarrow l_2$ donne $\begin{bmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 1-\lambda & 0 & -a \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix};$ $l_2 \leftarrow l_2 + (\lambda-1)l_1$ donne $\begin{bmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda(\lambda-1) & -a \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix};$ $\begin{bmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & -\lambda(\lambda-1) & -a \end{bmatrix}$ avec $l_2 \leftrightarrow l_3$

enfin $l_3 \leftarrow l_3 + \lambda(\lambda-1)l_2$ donne $\begin{bmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & P(\lambda) \end{bmatrix}$ avec $P(\lambda) = -\lambda^2(\lambda-1) + a = \lambda^3 + \lambda^2 - a.$

$$\lambda \in S_p(A) \Leftrightarrow A - \lambda I_3 \text{ n'a pas d'inverse} \Leftrightarrow P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + \lambda^2 - a = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - \lambda^2 + a = 0$$

Ainsi $\underline{S_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda^3 - \lambda^2 + a = 0\}}$. Posons alors $\hat{P} = -P$. $\forall x \in \mathbb{R}, \hat{P}(x) = x^3 - x^2 + a$

C) \hat{P} est dérivable sur \mathbb{R} . $\forall x \in \mathbb{R}, \hat{P}'(x) = 3x^2 - 2x = 3x(x - \frac{2}{3})$



Rappelons que : $a > 0$ et $a < \frac{2^2}{3^3} = \frac{4}{27}$

En appliquant le théorème de la bijection aux restrictions de \hat{P} à $] -\infty, 0]$, $] 0, \frac{2}{3}]$ et $] \frac{2}{3}, +\infty [$ on voit que \hat{P} admet exactement trois racines.

