(Q1) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1er cas... $k \geq 2$. f est continue et décroissante sur $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$.

$\forall t \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$, $f(t) \geq f(\frac{k}{n})$ et $\frac{k-1}{n} \leq \frac{k}{n}$. En intégrant il vient :

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)\,dt \geq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(\tfrac{k}{n})\,dt = (\tfrac{k}{n} - \tfrac{k-1}{n}) f(\tfrac{k}{n}) = \tfrac{1}{n} f(\tfrac{k}{n}).$$

2e cas... $k=1$. Soit $\varepsilon \in]0, \frac{1}{n}]$. f est continue et décroissante sur $[\varepsilon, \frac{1}{n}]$.

$\forall t \in [\varepsilon, \frac{1}{n}]$, $f(t) \geq f(\frac{1}{n})$ et $\varepsilon \leq \frac{1}{n}$. En intégrant il vient

$$\int_{\varepsilon}^{1/n} f(t)\,dt \geq \int_{\varepsilon}^{1/n} f(\tfrac{1}{n})\,dt = (\tfrac{1}{n} - \varepsilon) f(\tfrac{1}{n}).$$ Or $\int_0^1 f(t)\,dt$ converge.

Ainsi en faisant tendre ε vers 0 par valeurs supérieures on obtient :

$$\int_0^{1/n} f(t)\,dt \geq \frac{1}{n} f(\tfrac{1}{n}) \text{ c'est-à-dire } \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)\,dt \geq \frac{1}{n} f(\tfrac{k}{n}).$$

Finalement $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\frac{1}{n} f(\frac{k}{n}) \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)\,dt$. (1)

(ii) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. f est continue et décroissante sur $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$

$\forall t \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, $f(t) \leq f(\frac{k}{n})$ et $\frac{k}{n} \leq \frac{k+1}{n}$. En intégrant entre $\frac{k}{n}$ et $\frac{k+1}{n}$ il vient:

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(\tfrac{k}{n})\,dt = (\tfrac{k+1}{n} - \tfrac{k}{n}) f(\tfrac{k}{n}) = \tfrac{1}{n} f(\tfrac{k}{n}).$$

$\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt \leq \frac{1}{n} f(\frac{k}{n})$. (2)

(iii) En sommant (1) de 1 à n on obtient $S_n \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt$.

En sommant (2) de 1 à $n-1$ il vient $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(\frac{k}{n}) \geq \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt = \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,dt$.

Alors $S_n - \frac{1}{n} f(1) \geq \int_{1/n}^1 f(t)\,dt$ ou $S_n \geq \frac{f(1)}{n} + \int_{1/n}^1 f(t)\,dt$.

Finalement : $\frac{f(1)}{n} + \int_{1/n}^1 f(t)\,dt \leq S_n \leq \int_0^1 f(t)\,dt$ et ceci pour tout n dans $[\![2, +\infty[\![$.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{f(1)}{n}+\int_{1/n}^{1}f(t)\,dt\right)=0+\int_0^1 f(t)\,dt=\int_0^1 f(t)\,dt \text{ car } \int_0^1 f(t)\,dt \text{ converge.}$$

Alors, par encadrement, on obtient $\underline{\underline{\lim_{n\to+\infty} S_n=\int_0^1 f(t)\,dt}}$.

Remarque.. ceci "généralise" le résultat que nous avions sur les sommes de Riemann associées à une fonction continue sur $[0,1]$

(Q2) c) Posons $\forall u\in[1,+\infty[$, $g(u)=\frac{\ln u}{u^{3/2}}$. g est continue sur $[1,+\infty[$.

$$\lim_{u\to+\infty}\left(u^{5/4}\,\frac{\ln u}{u^{3/2}}\right)=\lim_{u\to+\infty}\left(\frac{\ln u}{u^{3/2-5/4}}\right)=\lim_{u\to+\infty}\left(\frac{\ln u}{u^{1/4}}\right)=0 \text{ par croissance comparée.}$$

Alors $\lim_{u\to+\infty}\left(\frac{g(u)}{1/u^{5/4}}\right)=0$

1) $g(u)\underset{u\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{u^{5/4}}\right)$.

2) $\forall u\in[1,+\infty[$, $g(u)\geqslant 0$ et $\frac{1}{u^{5/4}}\geqslant 0$

3) $\int_1^{+\infty}\frac{du}{u^{5/4}}$ converge car $5/4>1$.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\int_1^{+\infty}g(u)\,du$ converge.

$\underline{\underline{\int_1^{+\infty}\frac{\ln u}{u^{3/2}}\,du \text{ converge.}}}$

Soit $A\in[1,+\infty[$. Posons $\forall u\in[1,+\infty[$, $\varphi(u)=\ln u$ et $\psi(u)=-2u^{-1/2}$.

φ et ψ sont de classe C^1 sur $[1,+\infty[$ et $\forall u\in[1,+\infty[$, $\varphi'(u)=\frac{1}{u}$ et $\psi'(u)=\frac{1}{u^{3/2}}$.

ceci justifie l'intégration par parties suivante.

$$\int_1^A\frac{\ln u}{u^{3/2}}\,du=\left[-2u^{-1/2}\ln u\right]_1^A-\int_1^A\left(-2u^{-1/2}\right)\frac{1}{u}\,du=-2\frac{\ln A}{A^{1/2}}+2\int_1^A\frac{du}{u^{3/2}}.$$

$$\int_1^A\frac{\ln u}{u^{3/2}}\,du=-2\frac{\ln A}{A^{1/2}}+2\left[\frac{u^{-3/2+1}}{-3/2+1}\right]_1^A=-2\frac{\ln A}{u^{1/2}}-4\frac{1}{A^{1/2}}+4.$$

$\lim_{A\to+\infty} \frac{1}{A^{1/2}} = 0$ et $\lim_{A\to+\infty} \frac{\ln A}{A^{1/2}} = 0$ par croissance comparée.

Alors $\lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{\ln u}{u^{3/2}}\,du = 4$.

1) Nous retrouvons la convergence de $I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln u}{u^{3/2}}\,du$.

2) $I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln u}{u^{3/2}}\,du = 4$.

b) Soit $\varepsilon \in]0,1]$. $x \mapsto \frac{1}{x}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Cela justifie le changement de variable $u = \frac{1}{x}$ dans ce qui suit.

$$\int_\varepsilon^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = \int_{1/\varepsilon}^1 \frac{\ln 1/u}{\sqrt{1/u}}\left(-\frac{1}{u^2}\right)du = -\int_1^{1/\varepsilon} \frac{\ln u}{u^2} \times \sqrt{u}\,du = -\int_1^{1/\varepsilon} \frac{\ln u}{u^{3/2}}\,du.$$

$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\varepsilon} = +\infty$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\ln u}{u^{3/2}}\,du$ converge et vaut 4.

Alors $\lim_{x\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = -4$. $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$ converge et vaut -4.

Ainsi $-\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = 4$. **Exercice** .. retrouver ce résultat directement en deux lignes...

Q3) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\ln P_n = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{1}{\sqrt{kn}}}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{1}{\sqrt{kn}}}$.

$\ln P_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{k}} \ln \frac{n}{k}$.

ou $n-1$!

$\ln P_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \ln\left(\frac{n}{k}\right)$ ... donc $P_n = e^{\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \ln\left(\frac{n}{k}\right)}$.

Pour calculer P_n nous commencerons donc à calculer $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \ln\left(\frac{n}{k}\right)$ et même $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}} (\ln n - \ln k)$. En multipliant par $\sqrt{n}$ et en prenant l'exponentielle nous aurons P_n

```
program Ecricome_1993_exercice_1;
var k,n:integer;t,s:real;
begin
write('Donner n. n=');readln(n);
s:=0;t:=ln(n);
for k:=1 to n-1 do s:=s+(t-ln(k))/sqrt(k);
writeln('P',n,'=',exp(s/sqrt(n)));
end.
```

← évite de recalculer ln n...

b) $P_{20} \simeq 8,5371$ $\quad P_{50} \simeq 13,9753$ $\quad P_{100} \simeq 18,8254$.

c) Posons $\forall x \in]0,1]$, $h(x) = -\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$. h est continue sur $]0,1]$ et prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

h est dérivable sur $]0,1]$ et $\forall x \in]0,1]$, $h'(x) = -\dfrac{1}{(\sqrt{x})^2}\left[\dfrac{1}{x}\sqrt{x} - (\ln x)\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right] = \dfrac{1}{2x\sqrt{x}}\left[\ln x - 2\right]$

$\forall x \in]0,1]$, $\ln x - 2 \leq 0$ et $\dfrac{1}{2x\sqrt{x}} \geq 0$. $\forall x \in]0,1]$, $h'(x) \leq 0$. h est décroissante sur $]0,1]$.

En appliquant Q1 on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} h\left(\dfrac{k}{n}\right)\right) = \displaystyle\int_0^1 h(x)\,dx = I = 4$.

Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} h\left(\dfrac{k}{n}\right) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(-\dfrac{\ln k/n}{\sqrt{k/n}}\right) = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{kn}}\ln\left(\dfrac{n}{k}\right) = \sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(\dfrac{n}{k}\right)^{\frac{1}{\sqrt{kn}}} = \ln\prod\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{n}{k}\right)^{\frac{1}{\sqrt{kn}}}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} h\left(\dfrac{k}{n}\right) = \ln P_n$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = e^{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} h\left(\frac{k}{n}\right)}$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = e^{I} = e^4$. $\quad \underline{\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = e^4.}}$

Notons que $e^4 \simeq 54,5982$.

La convergence est donc très lente, ce qui n'est pas une grosse surprise pour qui a pratiqué la méthode des rectangles.

__Remarque__ : $P_{1000} \simeq 35,0562$, $P_{10000} \simeq 45,8910$ ...

Exercice 2. Q0.. Soit $\hat{A}=\begin{bmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \delta\end{bmatrix}$. Montrons que $\hat{A}$ est inversible si et seulement si $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$

Envisageons pour cela deux cas.

1er cas.. $\alpha=0$. Alors $\alpha\delta-\beta\gamma=-\beta\gamma$ et $\hat{A}=\begin{bmatrix}0 & \gamma\\ \beta & \delta\end{bmatrix}$.

donc $\begin{bmatrix}\beta & \delta\\ 0 & \gamma\end{bmatrix}$ est une réduite de Gauss de $\hat{A}$ ($L_1 \leftrightarrow L_2$!)

Par conséquent : $\hat{A}$ inversible $\Leftrightarrow \begin{bmatrix}\beta & \delta\\ 0 & \gamma\end{bmatrix}$ inversible $\Leftrightarrow \beta\neq 0$ et $\gamma\neq 0 \Leftrightarrow -\beta\gamma\neq 0 \overset{\alpha=0}{\Leftrightarrow} \alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$.

2ème cas. $\alpha\neq 0$. Effectuons l'opération $L_2\leftarrow L_2-\frac{\beta}{\alpha}L_1$ sur $\hat{A}$. On obtient :

$$\begin{bmatrix}\alpha & \gamma\\ 0 & \delta-\frac{\beta\gamma}{\alpha}\end{bmatrix}$$ qui est donc une réduite de Gauss de $\hat{A}$.

Par conséquent : $\hat{A}$ inversible $\Leftrightarrow \begin{bmatrix}\alpha & \gamma\\ 0 & \delta-\frac{\beta\gamma}{\alpha}\end{bmatrix}$ inversible $\Leftrightarrow \delta-\frac{\beta\gamma}{\alpha}\neq 0 \Leftrightarrow \alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$.

$\alpha\neq 0$

cl.. $\hat{A}=\begin{bmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \delta\end{bmatrix}$ est inversible si et seulement si $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$.

Soit $A=\begin{bmatrix}a & c\\ b & d\end{bmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.

$\lambda\in Spec(A) \Leftrightarrow A-\lambda I$ non inversible $\Leftrightarrow \begin{bmatrix}a-\lambda & c\\ b & d-\lambda\end{bmatrix}$ non inversible $\Leftrightarrow (a-\lambda)(d-\lambda)-bc=0$

cl.. $\lambda\in Spec\,A \Leftrightarrow (a-\lambda)(d-\lambda)-bc=0$

Q1 a)+b). Soit $\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix}\in M_{4,1}(\mathbb{R})$. et soit $\lambda\in\mathbb{R}$

$$\phi(A)\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}z=\lambda x\\ t=\lambda y\\ ax+cy=\lambda z\\ bx+dy=\lambda t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z=\lambda x\\ t=\lambda y\\ ax+cy=\lambda^2 x\\ bx+dy=\lambda^2 y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z=\lambda x\\ t=\lambda y\\ (A-\lambda^2 I)\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\end{cases} \quad (1)$$

1er cas.. $A-\lambda^2 I$ est inversible.

Alors $(A-\lambda^2 I)\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\Leftrightarrow x=y=0$

Par conséquent : $\phi(A)\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}z=\lambda x\\ t=\lambda y\\ x=y=0\end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=t=0$.

Donc $\lambda\notin Spec\,\phi(A)$.

2ème Cas.. $A-\lambda^2 I$ n'est pas inversible.

On peut donc trouver $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telle que : $\left\{ \begin{array}{l} (A-\lambda^2 I)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et} \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{array} \right.$

En posant $z = \lambda x$ et $t = \lambda y$ on obtient un élément $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$ de $M_{4,1}(\mathbb{R})$ tel que :

$\phi(A)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Donc $\lambda \in \operatorname{Spec} \phi(A)$.

CL.. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda \in \operatorname{Spec}(\phi(A))$
$\Updownarrow$
$A - \lambda^2 I$ n'est pas inversible
$\Updownarrow$
$\lambda^2 \in \operatorname{Spec}(A)$
$\Updownarrow$
$(a-\lambda^2)(d-\lambda^2) - bc = 0.$

c) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $\lambda \in \operatorname{Spec}(A) \Leftrightarrow (-1-\lambda)(4-\lambda) - (-3)\times 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\lambda \in \operatorname{Spec}(A) \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ ou $\lambda = 2$

$\underline{\operatorname{Spec}(A) = \{1, 2\}}$

Par conséquent $\operatorname{Spec}(\phi(A)) = \{-1, 1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ $\quad (\lambda \in \operatorname{Spec} \phi(A) \Leftrightarrow \lambda^2 \in \{1,2\} \dots)$.

CL.. $\phi(A)$ est diagonalisable car c'est un élément de $M_4(\mathbb{R})$ ayant 4 valeurs propres distinctes.

(Q2) Notons que $A = \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & d \end{bmatrix}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\lambda \in \operatorname{Spec}(A) \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda - d) - 0 \times c = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ ou $\lambda = d$.

Nous pouvons donc dire que : $\operatorname{Spec} \phi(A) = \left\{ \begin{array}{l} \{-1, 1, \sqrt{d}, -\sqrt{d}\} \text{ si } d > 0 \\ \{-1, 1, 0\} \text{ si } d = 0 \\ \{-1, 1\} \text{ si } d < 0 \end{array} \right.$

a) Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

$(x,y,z,t) \in V(1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = x \\ t = y \\ x + cy = x \\ dy = y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = x \\ t = y \\ cy = 0 \\ (d-1)y = 0 \end{array} \right.$

$(x,y,z,t) \in V(-1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = -x \\ t = -y \\ x + cy = x \\ dy = y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = -x \\ t = -y \\ cy = 0 \\ (d-1)y = 0 \end{array} \right.$

i) $d \neq 1$ ou $c \neq 0$

$(x,y,z,t) \in V(1) \Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ t = y \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ t = y = 0 \end{cases}$. $\underline{\underline{V(1) = \text{Vect}\,((1,0,1,0))}}$. $\dim V(1) = 1$.

$(x,y,z,t) \in V(-1) \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ t = -y \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ t = y = 0 \end{cases}$. $\underline{\underline{V(-1) = \text{Vect}\,((1,0,-1,0))}}$. $\dim V(-1) = 1$.

ii) $(d,c) = (1,0)$.

$(x,y,z,t) \in V(1) \Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ t = y \end{cases}$. $\underline{\underline{V(1) = \text{Vect}\,((1,0,1,0),(0,1,0,1))}}$. $\dim V(1) = 2$.

$(x,y,z,t) \in V(-1) \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ t = -y \end{cases}$. $\underline{\underline{V(1) = \text{Vect}\,((1,0,-1,0),(0,1,0,-1))}}$. $\dim V(-1) = 2$.

b] Envisageons trois grands cas..

1er cas.. $d < 0$. $\text{Spec}\,\phi(A) = \{-1,1\}$ comme $\dim V(1) = \dim V(-1) = 1$, $\phi(A)$ n'est pas diagonalisable.

2e cas.. $d = 0$. $\text{Spec}\,\phi(A) = \{-1,1,0\}$ et $\dim V(1) = \dim V(-1) = 1$.

Cherchons alors $\dim V(0)$. Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.

$(x,y,z,t) \in V(0) \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0.x \\ t = 0.y \\ x + cy = 0^2 x \\ 0 = 0^2 y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = t = 0 \\ x = -cy \end{cases}$. $V(0) = \text{Vect}\,((-c,1,0,0))$. $\dim V(0) = 1$

$\dim V(1) + \dim V(-1) + \dim V(0) = 3$; $\phi(A)$ n'est pas diagonalisable.

3e cas.. $d > 0$. $\text{Spec}\,\phi(A) = \{-\sqrt{d}, \sqrt{d}, -1, 1\}$

* $d \neq 1$. $\phi(A)$ a quatre valeurs propres distinctes donc $\phi(A)$ est diagonalisable car $\phi(A) \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

* $d = 1$ $\text{Spec}\,\phi(A) = \{-1,1\}$

si $c \neq 0$ $\dim V(1) + \dim V(-1) = 2$; $\phi(A)$ n'est pas diagonalisable.
si $c = 0$ $\dim V(1) + \dim V(-1) = 4$; $\phi(A)$ est diagonalisable.

Conclusion.. $\phi(A)$ est diagonalisable $\Leftrightarrow \begin{cases} d > 0 \text{ et } d \neq 1 \\ \text{ou} \\ d = 1 \text{ et } c = 0 \end{cases}$

c) Notons X_c et X_d les var prenant respectivement les valeurs c et d.

$\phi(A)$ a quatre valeurs propres distinctes si et seulement si $d > 0$ et $d \neq 1$.

Notons E_1 l'événement $\phi(A)$ a quatre valeurs propres distinctes.

$p(E_1) = p(X_d > 0$ et $X_d \neq 1) = p(\{X_d > 0\} \cap \{X_d \neq 1\})$.

(i) $p(E_1) = p(X_d = 2) + p(X_d = 3) = 2 \times \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$; $\underline{\underline{p(E_1) = 2/9}}$

(ii) $p(E_1) = p(0 < X_d < 1) + p(1 < X_d < 3) = \frac{1-0}{3-(-5)} + \frac{3-1}{3-(-5)} = \frac{3}{8}$; $\underline{\underline{p(E_1) = 3/8}}$

d) Notons E_2 l'événement $\phi(A)$ est diagonalisable.

$p(E_2) = p(E_1 \cup (\{X_d = 1\} \cap \{X_c = 0\})) = p(E_1) + p(X_d = 1)\, p(X_c = 0)$.

incompatibilité + indépendance ...

(i) $p(E_2) = 2/9 + \frac{1}{9} \times \frac{1}{9} = \frac{19}{81}$; $\underline{\underline{p(E_2) = \frac{19}{81}}}$

(ii) $p(E_2) = p(E_1) = 3/8$; $\underline{\underline{p(E_2) = \frac{3}{8}}}$

PARTIE I

A Q1. Notons R_i l'événement le joueur A_1 remporte le $i^{ème}$ tournoi.

Notons aussi que si un joueur participe à un tournoi, la probabilité pour qu'il le gagne est 1/3.

$p(G_2)=p(R_1\cap R_2)=p(R_1)\,p(R_2/R_1)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$. $\underline{p(G_2)=\frac{1}{9}}$.

Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ et tout $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$, notons G_n^k l'événement le joueur A_k remporte le jeu au $n^{ème}$ tournoi. $\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$, $G_n^1=G_n$!

$(X=2)=G_2^3\cup G_2\cup G$ (réunion disjointe !)

$p(X=2)=p(G_2^3)+p(G_2)+p(G_2)$ or $p(G_2^3)=p(G_2^2)=p(G_2^1)=p(G_2)=1/9$

Donc $\underline{p(X=2)=\frac{1}{3}}$

Q2. a) J_5 se réalise si et seulement si A_5 joue donc si et seulement si le jeu ne s'arrête pas le $2^{ème}$ tournoi.

Par conséquent $J_5=\overline{(X=2)}$. $p(J_5)=1-\frac{1}{3}$.

$\underline{p(J_5)=\frac{2}{3}}$.

$i\geq 4$ Supposons A_i ait joué, c'est à dire que J_i soit réalisé. A_i a joué pour la première fois au tournoi n° $i-2$.

Pour que A_{i+1} joue il faut et il suffit que le gagnant du tournoi n° $i-3$ ($i\geq 4$...) n'arrive pas premier au tournoi n° $i-2$; ceci se produit avec la probabilité $2/3$.

$\underline{\forall i\in[\![4,+\infty[\![,\ p(J_{i+1}/J_i)=\frac{2}{3}}$.

$J_{i+1}\subset J_i$ ... si A_{i+1} joue : A_i a joué.

b) $\forall i\in[\![4,+\infty[\![$ $p(J_{i+1})=p(J_{i+1}\cap J_i)=p(J_{i+1}/J_i)\,p(J_i)=\frac{2}{3}\,p(J_i)$.

$(p(J_i))_{i\geq 4}$ est suite géométrique de premier terme $p(J_4)$ et de raison $\frac{2}{3}$.

$\underline{\forall k\in[\![4,+\infty[\![,\ p(J_k)=\left(\frac{2}{3}\right)^{k-4}p(J_4)=\left(\frac{2}{3}\right)^{k-4}}$ car $p(J_4)=1$ (A_4 joue !)

Q3 a) Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$

$\{X \geq n\}$ se réalise si et seulement si le $n^{\text{ième}}$ tournoi est disputé.

Or pour $k \geq 4$, le joueur A_k joue pour la première fois au $(k-2)^{\text{ième}}$ tournoi si le jeu ne s'est pas arrêté avant.

Par conséquent le $n^{\text{ème}}$ tournoi est disputé si et seulement si le joueur J_{n+2} joue.

Par conséquent les événements $\{X \geq n\}$ et J_{n+2} sont égaux.

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![, \quad \underline{\{X \geq n\} = J_{n+2}}.$

b) Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$

$$p(X=n) = p(X \geq n) - p(X \geq n+1) = p(J_{n+2}) - p(J_{n+3}) \overset{n+2\geq 4 \text{ et } n+3\geq 4}{=} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\left(1-\frac{2}{3}\right).$$

$$\underline{p(X=n) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}}$$

c) $$\sum_{n=2}^{+\infty} p(X=n) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{i} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1-2/3} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{1/3} = 1$$

La probabilité pour que le jeu s'arrête est donc 1 ; l'événement le jeu ne s'arrête pas est quasi-impossible.

Q4. Posons $Y = X-1$. $X(\Omega) = [\![2,+\infty[\![$ donc $Y(\Omega) = [\![1,+\infty[\![$.

$\forall k \in [\![1,+\infty[\![, \quad p(Y=k) = p(X-1=k) = p(X=k+1) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1-2} = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$

$\underline{Y \hookrightarrow \mathcal{G}(1/3)}$. Donc $E(Y) = 3$ et $V(Y) = \frac{(2/3)}{(1/3)^2} = 6$

$E(X) = E(Y+1) = E(Y)+1 = 4$ et $V(X) = V(Y+1) = V(Y)$.

$\underline{E(X) = 4 \text{ et } V(X) = 6}.$

$\boxed{B}$ Q1. G_3 est l'événement A_1 gagne la partie au $3^{\text{ème}}$ tournoi

Par conséquent $\underline{G_3 = S_1 \cap P_2 \cap P_3}$

G_4 se réalise si et seulement si :

ou : A_1 gagne le 1^{er} tournoi, fait second au $2^{\text{ème}}$ et gagne le n°3 et le n°4

ou : A_1 fait second au 1^{er} tournoi et au $2^{\text{ème}}$ tournoi et gagne le n°3 et 4.

$$\underline{G_4 = (P_1 \cap S_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (S_1 \cap S_2 \cap P_3 \cap P_4)}.$$

Q2 a) $p(G_3) = p(S_1)\, p(P_2 / S_1)\, p(P_3 / S_1 \cap P_2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$; $p(G_3) = \frac{1}{27}$

b) • Supposons S_1 réalisé. Appelons TOTO le joueur ayant gagné le 1er tournoi (TOTO est soit A_2 soit A_3 car A_1 est arrivé second au premier tournoi)

S_2 se réalise si A_1 arrive second au 2ème tournoi et si le jeu continue.

S_2 se réalise donc si 1°. A_1 arrive second au 2ème tournoi

et 2°. TOTO n'arrive pas premier au 2ème tournoi

donc S_2 se réalise ssi 1°. A_1 arrive second au 2ème tournoi

et 2°. TOTO arrive 3ème " " "

(et 3°. A_4 gagne le 2ème tournoi)

donc $p(S_2 / S_1) = \frac{1}{6}$ (6 classements possibles pour le 2ème tournoi et un seul favorable !).

• Supposons P_1 réalisé. S_2 se réalise alors si et seulement si A_1 finit second au 2ème tournoi.

$p(S_2 / P_1) = \frac{1}{3}$

Pour finir rappelons qu'un joueur gagne un tournoi avec la probabilité 1/3.

$p(G_4) = p(P_1 \cap S_2 \cap P_3 \cap P_4) + p(S_1 \cap S_2 \cap P_3 \cap P_4)$

$p(G_4) = p(P_1)\, p(S_2/P_1)\, p(P_3/P_1 \cap S_2)\, p(P_4 / P_1 \cap S_2 \cap P_3) + p(S_1)\, p(S_2/S_1)\, p(P_3/S_1 \cap S_2)\, p(P_4/S_1 \cap S_2 \cap P_3)$

$p(G_4) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{54}$

$p(G_4) = \frac{1}{54}$

Q3 a) le plus simple est de commencer par la fin en progressant pas à pas !

	n°7	n°6	n°5	n°4	n°3	n°2	n°1
certitude →	1	1	2				
choix pour n°4	1	1	2	2			
	1	1	1	1			

	N°7	N°6	N°5	N°4	N°3	N°2	N°1
Choix pour N°3	1	1	2	2	2		
	1	1	2	2	1		
	1	1	2	1	2		
Choix pour N°2	1	1	2	2	2	2	2 / 1
	1	1	2	2	2	1	2
	1	1	2	2	1	2	1 / 2
	1	1	2	1	2	1	2
	1	1	2	1	2	2	1 / 2

↑ Choix pour N°1

Ce qui donne bien, et dans l'ordre, les 8 événements suivants favorables à la réalisation de G_7.

(2,2,2,2,2,1,1), (1,2,2,2,2,1,1), (2,1,2,2,2,1,1), (1,2,1,2,2,1,1), (2,2,1,2,2,1,1)
(2,1,2,1,2,1,1), (1,2,2,1,2,1,1), (2,2,2,1,2,1,1).

b) Ne reste plus qu'à calculer les 8 petites probabilités qui correspondent à ces 8 événements détaillés ci-dessus !

(2,2,2,2,2,1,1) est $p(S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 \cap S_5 \cap P_6 \cap P_7) = \underset{1/3}{p(S_1)}\,\underset{1/6}{p(S_2/S_1)}\,\underset{1/6}{p(S_3/S_1\cap S_2)}\,\underset{1/6}{p(S_4/S_1\cap S_2\cap S_3)} \times$
$\underset{1/6}{p(S_5/S_1\cap S_2\cap S_3\cap S_4)}\,\underset{1/3}{p(P_6/S_1\cap S_2\cap S_3\cap S_4\cap S_5)} \times \underset{1/3}{p(P_7/S_1\cap S_2\cap S_3\cap S_4\cap S_5\cap P_6)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)^4$

(1,2,2,2,2,1,1) → $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right)^3$

(2,1,2,2,2,1,1) → $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{1}{6}\right)^2$

(1,2,1,2,2,1,1) → $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^6\left(\frac{1}{6}\right)$

(2,2,1,2,2,1,1) → $\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{1}{6}\right)^2$

(2,1,2,1,2,1,1) → $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^7$

(1,2,2,1,2,1,1) → $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^6\left(\frac{1}{6}\right)$

(2,2,2,1,2,1,1) → $\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{1}{6}\right)^2$

$p(G_7) = \left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)^4 + \left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right)^3 + 3\times\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{1}{6}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{3}\right)^6\left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^7$

$p(G_7) = \left[\frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{3}{4} + 1 + 1\right]\frac{1}{3^7} = \frac{47}{16\times 3^7}$ $\quad p(G_7) = \frac{47}{34992} \simeq 0{,}0013$

PARTIE II : probabilité pour que le joueur A_1 gagne.

(Q1) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\mathcal{U}_n^0 = \{(1,2,1,2,\dots,1,2)\}$ si n est pair et

$\mathcal{U}_n^0 = \{(2,1,2,1,\dots,2,1,2)\}$ si n est impair.

$\mathcal{U}_n^n = \phi$; on ne peut pas avoir n fois 2 suivi d'un autre 2 dans une n-liste de $\{1,2\}$!

$\mathcal{U}_{n+1}^n = \{\underbrace{(2,2,\dots,2)}_{n+1 \text{ éléments}}\}$; on ne peut avoir n fois 2 suivi d'un autre 2 dans une $(n+1)$-liste de $\{1,2\}$ se terminant par 2 que si et seulement si il n'y a que des 2.

$\mathcal{U}_{n+2}^n = \{(1,\overbrace{2,\dots,2}^{n+1 \text{ fois } 2})\}$; $\underbrace{(1,\overbrace{2,\dots,2}^{n+1 \text{ fois } 2})}_{n+2 \text{ él.}}$ appartient à $\mathcal{U}_{n+2}^n$; réciproquement supposons que $(x_1,\dots,x_{n+2}) \in \mathcal{U}_{n+2}^n$. $x_{n+2}=2$, cette $(n+2)$-liste contient au moins $n+1$ fois le 2 mais pas $n+2$ fois le 2. Cette $(n+1)$-liste contient donc un 1 et $n+1$ fois 2. Si 1 n'est pas en première place de $(x_1,\dots,x_{n+2})$, cette $n+2$ liste contient exactement $n-1$ fois un 2 suivi d'un 2 ! Ainsi $(x_1,\dots,x_{n+2}) = (1,2,\dots,2)$

Ceci suffit pour dire que $u_n^0 = 1$, $u_n^n = 0$, $u_{n+1}^n = 1$ et $u_{n+2}^n = 1$.

b) Soit $n \in [\![3,+\infty[\![$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

Posons $\hat{\mathcal{U}}_n^k = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathcal{U}_n^k \mid x_{n-1}=1\}$ et $\check{\mathcal{U}}_n^k = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathcal{U}_n^k \mid x_{n-1}=2\}$

- $\hat{\mathcal{U}}_n^k = \{(x_1,\dots,x_n) \in \{1,2\}^n \mid x_n=2, x_{n-1}=1 \text{ et } (x_1,\dots,x_{n-2}) \in \mathcal{U}_{n-2}^k\}$ et

ainsi $\operatorname{card} \hat{\mathcal{U}}_n^k = \operatorname{card} \mathcal{U}_{n-2}^k = u_{n-2}^k$; en effet si $(x_1,\dots,x_n) \in \{1,2\}^n$, $(x_1,\dots,x_n) \in \hat{\mathcal{U}}_n^k$ si et seulement si $x_n=2$, $x_{n-1}=1$, $x_{n-2}=2$ (jamais deux 1 consécutifs) et $(x_1,\dots,x_{n-2})$ est une $n-2$ liste d'éléments de $\{1,2\}$ qui se termine par 2, qui ne contient pas deux 1 consécutifs et qui contient exactement k fois un 2 suivi d'un 2 (ce qui signifie que $(x_1,\dots,x_{n-2}) \in \mathcal{U}_{n-2}^k$).

card $\hat{U}_n^\ell = u_{n-2}^\ell$.

• $\check{U}_n^\ell = \{(x_1,\dots,x_n)\in\{1,2\}^n \mid x_n=2,\ x_{n-1}=2$ et $(x_1,\dots,x_{n-1})\in U_{n-1}^{\ell-1}\}$ par conséquent card $\check{U}_n^\ell$ = card $U_{n-1}^{\ell-1} = u_{n-1}^{\ell-1}$, en effet si $(x_1,\dots,x_n)\in\{1,2\}^n$, $(x_1,\dots,x_n)\in \check{U}_n^\ell$ si et seulement si $x_n=2$ et $(x_1,\dots,x_{n-1})$ est une $(n-1)$-liste de $\{1,2\}$ qui se termine par 2 et qui contient exactement ($\ell-1$) fois un 2 suivi d'un 2 ($(x_{n-1},x_n)=(2,2)$ donnant alors le $\ell^{\text{ème}}$ 2 suivi d'un 2); donc si et seulement si $x_n=2$ et $(x_1,\dots,x_{n-1})\in U_{n-1}^{\ell-1}$.

card $\check{U}_n^\ell = u_{n-1}^{\ell-1}$.

Notons que $U_n^\ell = \hat{U}_n^\ell \cup \check{U}_n^\ell$ et $\hat{U}_n^\ell \cap \check{U}_n^\ell = \emptyset$.

Alors u_n^ℓ = card U_n^ℓ = card $\hat{U}_n^\ell$ + card $\check{U}_n^\ell = u_{n-2}^\ell + u_{n-1}^{\ell-1}$.

$\forall n\in [\![3,+\infty[\![,\ \forall \ell\in\mathbb{N}^*,\quad u_n^\ell = u_{n-2}^\ell + u_{n-1}^{\ell-1}$.

c) (i) Soit $i\in\mathbb{N}$. $v_i^0 = u_{2i+1}^0 = 1$ et $v_i^i = u_{2i+1-i}^i = u_{i+1}^i = 1$.

Supposons $i\in [\![2,+\infty[\![$ et $j\in [\![1,i-1]\!]$.

$2i+1-j \geq 2i+1-(i-1) = i+2 \geq 3$ et $j\geq 1$ donc

$$u_{2i+1-j}^j = u_{2i+1-j-2}^j + u_{2i+1-j-1}^{j-1} = u_{2(i-1)-j+1}^j + u_{2(i-1)+1-(j-1)}^{j-1}$$

Alors $v_i^j = v_{i-1}^j + v_{i-1}^{j-1}$.

$v_i^0 = 1$, $v_i^i = 1$ et $v_i^j = v_{i-1}^{j-1} + v_{i-1}^j$ si $i\in [\![2,+\infty[\![$ et $j\in [\![1,i-1]\!]$.

Le tout fait furieusement penser au triangle de Pascal et suggère de montrer que $\forall i\in\mathbb{N}$, $\forall j\in [\![0,i]\!]$, $v_i^j = C_i^j$.

C'est clair pour $i=0$ car $v_0^0 = u_1^0 = 1 = C_0^0$.

montrons alors par une récurrence sur i que $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $\forall j \in [\![0,i]\!]$, $\sigma_i^j = C_i^j$

→ $\sigma_1^0 = 1 = C_1^0$ et $\sigma_1^1 = 1 = C_1^1$; la propriété est vraie pour $i=1$.

→ Supposons la propriété vraie pour $i-1$ avec $i \in [\![2,+\infty[\![$ et montrons la pour i.
Il convient de prouver que $\forall j \in [\![0,i]\!], \sigma_i^j = C_i^j$ sachant que $\forall j \in [\![0,i-1]\!], \sigma_{i-1}^j = C_{i-1}^j$.

$\sigma_i^0 = 1 = C_i^0$ et $\sigma_i^i = 1 = C_i^i$. Soit $j \in [\![1,i-1]\!]$.

$$\sigma_i^j = \sigma_{i-1}^{j-1} + \sigma_{i-1}^j \underset{\text{HR car } j-1 \in [\![0,i-1]\!] \text{ et } j \in [\![0,i-1]\!]}{=} C_{i-1}^{j-1} + C_{i-1}^j = C_i^j$$. ceci achève la récurrence.

$\forall i \in \mathbb{N}, \forall j \in [\![0,i]\!], \ \sigma_i^j = C_i^j$.

(ii) on montre de la même manière que :
$\forall i \in \mathbb{N}$, $S_i^0 = S_i^i = 1$ et $\forall i \in [\![2,+\infty[\![$, $\forall j \in [\![1,i-1]\!]$, $S_i^j = S_{i-1}^{j-1} + S_{i-1}^j$.

Puis que : $\forall i \in \mathbb{N}, \forall j \in [\![0,i]\!], \quad S_i^j = C_i^j$.

(iii) Soit $(\ell,p) \in \mathbb{N}^2$. $u^\ell_{\ell+2p+1} = u^\ell_{2(p+\ell)+1-\ell} = \sigma_{p+\ell}^\ell = C_{p+\ell}^\ell = C_{\ell+p}^\ell$.

$u^\ell_{\ell+2p+2} = u^\ell_{2(p+\ell)+2-\ell} = S^\ell_{p+\ell} = C^\ell_{p+\ell} = C^\ell_{\ell+p}$.

$\forall (\ell,p) \in \mathbb{N}^2, \ u^\ell_{\ell+2p+1} = C^\ell_{\ell+p}$ et $u_{\ell+2p+2} = C^\ell_{\ell+p}$.

(Q2) $\ell \in \mathbb{N}$. $x \in]0,\frac{1}{2}[$. Posons $I = [0,x]$

a) f est donc C^∞ sur I comme restriction à I d'une fonction rationnelle.

montrons par récurrence que $\forall p \in \mathbb{N}, \forall u \in I$, $f^{(p)}(u) = \frac{(\ell+p)!}{\ell!}(1-u)^{-(\ell+1+p)}$

→ c'est vrai pour $p=0$.

→ Supposons la propriété vraie pour $p \in \mathbb{N}$ et montrons la pour $p+1$

$\forall u \in I$, $f^{(p+1)}(u) = (f^{(p)})'(u) = \frac{(\ell+p)!}{\ell!}(-(\ell+1+p))(-1)(1-u)^{-(\ell+1+p)-1} = \frac{(\ell+p+1)!}{\ell!}(1-u)^{-(\ell+1+p+1)}$

Ceci achève la récurrence.

$\forall p \in \mathbb{N}, \forall u \in [0,x], \; f^{(p)}(u) = \dfrac{(\ell+p)!}{\ell!} \; \dfrac{1}{(1-u)^{\ell+1+p}} = p!\, C_{\ell+p}^{k} \; \dfrac{1}{(1-u)^{\ell+1+p}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

b) L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à f à l'ordre $n-1$ sur l'intervalle $[0,x]$ donne :

$$\left| f(x) - \sum_{p=0}^{n-1} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} (x-0)^p \right| \leq \frac{|x-0|^n}{n!} \max_{u \in [0,x]} |f^{(n)}(u)|.$$

$$\left| \frac{1}{(1-x)^{\ell+1}} - \sum_{p=0}^{n-1} \frac{p!\, C_{\ell+p}^{k}}{p!} x^p \right| \leq \frac{x^n}{n!} \max_{u \in [0,x]} \left(n!\, C_{\ell+n}^{k} \frac{1}{(1-u)^{\ell+1+n}} \right).$$

$$\left| \frac{1}{(1-x)^{\ell+1}} - \sum_{p=0}^{n-1} C_{\ell+p}^{\ell} x^p \right| \leq \frac{x^n}{n!} \, n!\, C_{\ell+n}^{k} \, \frac{1}{(1-x)^{\ell+1+n}} = \frac{1}{(1-x)^{\ell+1}} C_{\ell+n}^{k} \left(\frac{x}{1-x}\right)^n$$

$u \mapsto \dfrac{1}{(1-u)^{\ell+1+n}}$ est croissante sur $[0,x]$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; \left| \frac{1}{(1-x)^{\ell+1}} - \sum_{p=0}^{n-1} C_{\ell+p}^{\ell} x^p \right| \leq \frac{1}{(1-x)^{\ell+1}} C_{\ell+n}^{k} \left(\frac{x}{1-x}\right)^n.$$

c) $\dfrac{1}{(1-x)^{\ell+1}} C_{\ell+n}^{k} \left(\dfrac{x}{1-x}\right)^n \overset{!!!}{=} \dfrac{1}{(1-x)^{\ell+1}} C_{n+k}^{k} \left(\dfrac{x}{1-x}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{(1-x)^{\ell+1}} \dfrac{n^k}{k!} \left(\dfrac{x}{1-x}\right)^n$

$\left(C_{n+k}^{k} = \dfrac{(n+k)(n+k-1)\cdots(n+1)}{k!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^k}{k!} \right)$.

$x \in]0, \frac{1}{2}[$ donc $\dfrac{x}{1-x} > 0$ et $1 - \dfrac{x}{1-x} = \dfrac{1-2x}{1-x} > 0$ donc $\dfrac{x}{1-x} \in]0,1[$.

Alors, par croissance comparée, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^k \left(\dfrac{x}{1-x}\right)^n \right) = 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{(1-x)^{\ell+1}} C_{\ell+n}^{k} \left(\dfrac{x}{1-x}\right)^n \right) = 0$. Par encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{p=0}^{n-1} C_{\ell+p}^{\ell} x^p = \dfrac{1}{(1-x)^{\ell+1}}$.

Ainsi la série de terme général $C_{\ell+p}^{k} x^p$ converge et $\sum\limits_{p=0}^{+\infty} C_{\ell+p}^{k} x^p = \dfrac{1}{(1-x)^{\ell+1}}$.

Exercice.. Montrer que cette formule vaut pour $x \in]-1,1[$

⚠ Pour $x \in]-1,0]$ on peut reprendre la démarche précédente, pas pour $x \in [\frac{1}{2},1[$ car le "majorant" ne tend pas vers 0. Il convient d'utiliser la formule de Taylor avec reste intégral dans ce cas (on pourra calculer $\max_{t \in [0,x]} \left| \frac{x-t}{1-t} \right| \dots$)

d) $$\alpha_k = \sum_{p=0}^{+\infty} u^k_{k+2p+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+2p+3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{k+3} \sum_{p=0}^{+\infty} C^k_{k+p} \left(\frac{1}{9}\right)^p = \left(\frac{1}{3}\right)^{k+3} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{9}\right)^{k+1}}$$

$\frac{1}{9} \in]0,\frac{1}{2}[$!

$$\alpha_k = \left(\frac{1}{3}\right)^{k+3} \left(\frac{9}{8}\right)^{k+1} = \frac{1}{9}\left(\frac{3}{8}\right)^{k+1}.$$

$$\alpha'_k = \sum_{p=0}^{+\infty} u^k_{k+2p+2} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+2p+4} = \frac{1}{3} \sum_{p=0}^{+\infty} C^k_{k+p} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+2p+3} = \frac{1}{3}\alpha_k.$$

$$\alpha'_k = \left(\frac{1}{3}\right)^{k+4}\left(\frac{9}{8}\right)^{k+1} = \frac{1}{27}\left(\frac{3}{8}\right)^{k+1}.$$

Q3 a) Codons 1 une partie que A_1 gagne et 2 une partie où A_1 arrive $2^{\text{ème}}$ sans que la partie s'achève.

Soit $n \in [\![3,+\infty[\![$.

La réalisation de G_n correspond alors à une n liste $(x_1,\dots,x_n)$ de $\{1,2\}$.

telle que 1) $x_{n-1} = x_n = 1$

2) $x_{n-2} = 2$

3) $(x_1, x_2, \dots, x_{n-2})$ ne contient pas deux 1 consécutifs.

Pour tout $k \in [\![0, n-2]\!]$, notons G_n^k l'événement A_1 gagne au rang 1 et le nombre exact de fois où il obtient une $1^{\text{ère}}$ place suivie d'une $2^{\text{ème}}$ place est k, la réalisation de G_n^k correspond à un élément $(x_1,\dots,x_n)$ tq $\begin{cases} 1°.\ x_n = x_{n-1} = 1 \\ 2°.\ (x_1,\dots,x_{n-2}) \in U^k_{n-2} \end{cases}$

$G_n = \bigcup_{k=0}^{n-2} G_n^k$ et cette union est disjointe donc $P(G_n) = \sum_{k=0}^{n-2} P(G_n^k)$

Rappelons que la probabilité pour que A_1 arrive second à une partie sans que le tournoi s'achève sachant qu'il est arrivé $2^{ème}$ à la partie précédente est $1/6$; la probabilité pour que A_1 arrive second à une partie sachant qu'il a gagné la précédente est $1/3$.

Alors, pour tout $\ell \in [\![0,n-2]\!]$, G_n^ℓ est constitué de u_{n-2}^ℓ événements élémentaires dont la probabilité $\left(\frac{1}{6}\right)^\ell \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2-\ell} \left(\frac{1}{3}\right)^2$

↑ gain des deux dernières parties.

$\forall \ell \in [\![0,n-2]\!]$, $P(G_n^\ell) = u_{n-2}^\ell \left(\frac{1}{6}\right)^\ell \left(\frac{1}{3}\right)^{n-\ell}$

Ainsi $P(G_n) = \sum_{\ell=0}^{n-2} u_{n-2}^\ell \left(\frac{1}{6}\right)^\ell \left(\frac{1}{3}\right)^{n-\ell}$.

Rappelons que $P(G_2) = \frac{1}{9}$. Or $\sum_{\ell=0}^{2-2} u_{2-2}^\ell \left(\frac{1}{6}\right)^\ell \left(\frac{1}{3}\right)^{2-\ell} = u_0^0 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$.

Finalement $\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $P(G_n) = \sum_{\ell=0}^{n-2} u_{n-2}^\ell \left(\frac{1}{6}\right)^\ell \left(\frac{1}{3}\right)^{n-\ell}$.

b) $p_1 = \sum_{n=2}^{+\infty} P(G_n) = \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{\ell=0}^{n-2} u_{n-2}^\ell \left(\frac{1}{6}\right)^\ell \left(\frac{1}{3}\right)^{n-\ell} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{n=\ell+2}^{+\infty} u_{n-2}^\ell \left(\frac{1}{6}\right)^\ell \left(\frac{1}{3}\right)^{n-\ell}$.

$p_1 = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \left(\left(\frac{1}{6}\right)^\ell \left(\frac{1}{3}\right)^{-\ell} \sum_{n=\ell+2}^{+\infty} u_{n-2}^\ell \left(\frac{1}{3}\right)^n \right)$. $p_1 = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^\ell \beta_\ell$ avec $\beta_\ell = \sum_{n=\ell+2}^{+\infty} u_{n-2}^\ell \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

c) $\beta_0 = \sum_{n=2}^{+\infty} u_{n-2}^0 \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{6}$. $\beta_0 = \frac{1}{6}$.

d) Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$.

$\beta_\ell = \sum_{n=\ell+2}^{+\infty} u_{n-2}^\ell \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+\ell}^\ell \left(\frac{1}{3}\right)^{n+\ell+2} = \sum_{p=0}^{+\infty} u_{2p+\ell}^\ell \left(\frac{1}{3}\right)^{2p+\ell+2} + \underbrace{\sum_{p=0}^{+\infty} u_{2p+1+\ell}^\ell \left(\frac{1}{3}\right)^{2p+\ell+3}}_{\alpha_\ell}$

$\beta_\ell = \alpha_\ell + \sum_{p=1}^{+\infty} u_{2p+\ell}^\ell \left(\frac{1}{3}\right)^{2p+\ell+2} \underset{\text{car } u_\ell^\ell = 0}{=} \alpha_\ell + \sum_{p=0}^{+\infty} u_{2p+2+\ell}^\ell \left(\frac{1}{2}\right)^{2p+\ell+4} = \alpha_\ell + \alpha'_\ell$.

$\beta_\ell = \alpha_\ell + \alpha'_\ell$.

$\beta_\ell = \left(1+\frac{1}{3}\right)\alpha_\ell = \frac{4}{3}\alpha_\ell = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{5} \left(\frac{3}{8}\right)^{\ell+1}$. $\beta_\ell = \frac{4}{27}\left(\frac{3}{8}\right)^{\ell+1}$.

c) $\forall \ell \in \mathbb{N}^*$, $\beta_\ell = \frac{4}{27}\left(\frac{3}{8}\right)^{\ell-1} = \frac{1}{18}\left(\frac{3}{8}\right)^{\ell}$.

$$p_1 = \beta_0 + \sum_{\ell=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\ell} \beta_\ell = \frac{1}{6} + \frac{1}{18} \sum_{\ell=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{8}\right)^{\ell} = \frac{1}{6} + \frac{1}{18}\,\frac{3}{16} \sum_{\ell=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^{\ell-1}$$

$$p_1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6 \times 16}\,\frac{1}{1 - \frac{3}{16}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6 \times 13} = \frac{14}{6 \times 13} = \frac{7}{39}.$$

$$\underline{\underline{p_1 = \frac{7}{39}.}}$$