Exercice 1. Q1. a) Montrons d'abord que si $f \in E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, alors $g = \varphi(f) \in E$.

Soit donc $f \in E$. Posons $g = \varphi(f)$.

$x \mapsto \int_x^{2x-a} f(t)\,dt$ et $x \mapsto \frac{1}{x-a}$ sont continues sur $\mathbb{R}-\{a\}$ donc g est continue sur $\mathbb{R}-\{a\}$.

Prouvons que g est continue au point a.

Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}-\{a\}$, $g(x) = \dfrac{F(2x-a)-F(x)}{x-a} = 2\,\dfrac{F(2x-a)-F(a)}{(2x-a)-a} - \dfrac{F(x)-F(a)}{x-a}$

$\lim_{x\to a} \dfrac{F(x)-F(a)}{x-a} = F'(a)$ et $\lim_{x\to a} \dfrac{F(2x-a)-F(a)}{(2x-a)-a} = \lim_{y\to a} \dfrac{F(y)-F(a)}{y-a} = F'(a)$. Notons que : $F'(a) = f(a)$.

Finalement $\lim_{x\to a} \dfrac{F(2x-a)-F(x)}{x-a} = 2f(a)-f(a) = f(a)$; $\lim_{x\to a} g(x) = f(a) = g(a)$; g est continue en a.

Donc g est continue en tout point de $\mathbb{R}$. $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) = E$.

Par conséquent : $\forall f \in E$, $\varphi(f) \in E$. φ est donc une application de E dans E.

Montrons que φ est linéaire. Soient $(f,h) \in E^2$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.

Montrons que $\varphi(\alpha f+\beta h) = \alpha\varphi(f)+\beta\varphi(h)$, c'est-à-dire que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(\alpha f+\beta h)(x) = \alpha\varphi(f)(x)+\beta\varphi(h)(x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- 1er cas $x \neq a$: $\varphi(\alpha f+\beta h)(x) = \dfrac{1}{x-a}\displaystyle\int_x^{2x-a}(\alpha f+\beta h)(t)\,dt = \alpha\,\dfrac{1}{x-a}\int_x^{2x-a} f(t)\,dt + \beta\,\dfrac{1}{x-a}\int_x^{2x-a} h(t)\,dt = \alpha\varphi(f)(x)+\beta\varphi(h)(x)$.

- 2e cas $x = a$: $\varphi(\alpha f+\beta h)(a) = (\alpha f+\beta h)(a) = \alpha f(a)+\beta h(a) = \alpha\varphi(f)(a)+\beta\varphi(h)(a)$.

Ceci achève de prouver la linéarité de φ.

Finalement φ est un endomorphisme de $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

b) $f \in E$, $g = \varphi(f)$. Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

$x \mapsto F(2x-a)$, $x \mapsto F(x)$ et $x \mapsto \frac{1}{x-a}$ sont dérivables en tout point de $\mathbb{R}-\{a\}$.

Donc g est dérivable en tout point de $\mathbb{R}-\{a\}$.

$\forall x \in \mathbb{R}-\{a\}$, $g(x) = \dfrac{F(2x-a)-F(x)}{x-a}$ et $g'(x) = \dfrac{1}{(x-a)^2}\Big[\big(2F'(2x-a)-F'(x)\big)(x-a) - \big(F(2x-a)-F(x)\big)\Big]$

$\forall x \in \mathbb{R}-\{a\}$, $g'(x) = \dfrac{1}{(x-a)^2}\Big[\big(2f(2x-a)-f(x)\big)(x-a) - \displaystyle\int_x^{2x-a} f(t)\,dt\Big] = \dfrac{2f(2x-a)-f(x)-g(x)}{x-a}$

$\forall x \in \mathbb{R}-\{a\}$, $g'(x) = \dfrac{2f(2x-a)-f(x)-g(x)}{x-a}$.

c) $f : t \mapsto |t-a|$. Notons que $f \in E = C^0(\mathbb{R})$. Posons $g = \phi(f)$.

Soit $x \in]a, +\infty[$. $x > a$ et $2x - a > a$; par conséquent :

$$g(x) = \frac{1}{x-a}\int_x^{2x-a}(t-a)\,dt = \frac{1}{x-a}\left[\frac{(t-a)^2}{2}\right]_x^{2x-a} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{x-a}\times\left[(2x-2a)^2 - (x-a)^2\right]$$

$$g(x) = \frac{3}{2}(x-a) = \frac{3}{2}|x-a| = \frac{3}{2}f(x)$$

Soit $x \in]-\infty, a[$. $x < a$ et $2x - a < a$; par conséquent :

$$g(x) = \frac{1}{x-a}\int_x^{2x-a} -(t-a)\,dt = \dots = -\frac{3}{2}(x-a) = \frac{3}{2}|x-a| = \frac{3}{2}f(x)$$

Notons encore que : $g(a) = f(a) = 0 = \frac{3}{2}f(a)$.

Finalement : si $f : x \mapsto |x-a|$ alors $\phi(f) = \frac{3}{2}f$.

$f : x \mapsto |x-a|$ n'étant pas dérivable en a : $\phi(f)$ ne l'est pas davantage.

d) Rappelons que si $f \in C^0(\mathbb{R}) = E$ alors $\phi(f)$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R} - \{a\}$.

Considérons un réel b distinct de a. Posons : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = |x-b|$.
h est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas dérivable en tout point de $\mathbb{R} - \{a\}$ car h n'est pas dérivable en b qui est dans $\mathbb{R} - \{a\}$. Par conséquent $h \in E$ et h n'est pas l'image par ϕ d'un élément de E.
h n'a pas d'antécédent par ϕ dans E

Par conséquent ϕ n'est pas un endomorphisme surjectif.

Q2) a) $u \in E$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $u(x) = 2u(2x-a)$.
Montrons par récurrence que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u\left(\frac{(2^n-1)a + x}{2^n}\right) = 2^n u(x)$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
- $u\left(\frac{(2^0-1)a+x}{2^0}\right) = u(x) = 2^0 u(x)$; l'égalité est vraie pour $n = 0$.
- Supposons l'égalité vraie pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

$$u\left(\frac{(2^{n+1}-1)a+x}{2^{n+1}}\right) = 2u\left(2\times\frac{(2^{n+1}-1)a+x}{2^{n+1}} - a\right) = 2u\left(\frac{(2^{n+1}-1)a + x - 2^n a}{2^n}\right)$$

$$u\left(\frac{(2^{n+1}-1)a+x}{2^{n+1}}\right) = 2u\left(\frac{(2^{n+1}-2^n-1)a+x}{2^n}\right) \underset{\substack{\uparrow\\ 2^{n+1}-2^n = 2^n}}{=} 2u\left(\frac{(2^n-1)a+x}{2^n}\right) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{H.R}}}{=} 2\times 2^n u(x) = 2^{n+1}u(x)$$

Ceci achève la récurrence.

ii) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ u(x) = \frac{1}{2^n} u\left(\frac{(2^n-1)a+x}{2^n}\right)$

$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(2^n-1)a+x}{2^n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\left(1-\frac{1}{2^n}\right)a + \frac{x}{2^n}\right) = a$

u étant continue en a : $\lim_{n\to+\infty} u\left(\frac{(2^n-1)a+x}{2^n}\right) = u(a)$

Par conséquent $\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{2^n} u\left(\frac{(2^n-1)a+x}{2^n}\right)\right] = 0 \times u(a) = 0$

Or $\forall n \in \mathbb{N},\ u(x) = \frac{1}{2^n} u\left(\frac{(2^n-1)a+x}{2^n}\right)$, par conséquent $u(x) = 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}, u(x) = 0$; <u>u est nulle sur $\mathbb{R}$.</u>

<u>b)</u> Cherchons $\operatorname{Ker}\varphi$.

Soit $f \in \operatorname{Ker}\varphi$. $\forall x \in \mathbb{R}-\{a\},\ \frac{1}{x-a}\int_x^{2x-a} f(t)\,dt = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}-\{a\},\ \int_x^{2x-a} f(t)\,dt = 0$, mieux : $\forall x \in \mathbb{R},\ \int_x^{2x-a} f(t)\,dt = 0$.

En dérivant on obtient : $\forall x \in \mathbb{R},\ 2 f(2x-a) - f(x) = 0$

Donc $f \in E$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ 2 f(2x-a) = f(x)$; ce qui précède prouve que f est nulle.

Finalement $\operatorname{Ker}\varphi = \{0_E\}$. φ est un endomorphisme injectif ... mais pas surjectif.

Q3) <u>a)</u> Soit $k \in [\![0, n]\!]$

$\forall x \in \mathbb{R}-\{a\},\ \varphi(d_k)(x) = \frac{1}{x-a}\int_x^{2x-a}(t-a)^k\,dt = \frac{1}{x-a}\left[\frac{(t-a)^{k+1}}{k+1}\right]_x^{2x-a}$

$\forall x \in \mathbb{R}-\{a\},\ \varphi(d_k)(x) = \frac{1}{x-a} \times \frac{1}{k+1} \times \left[(2x-a-a)^{k+1} - (x-a)^{k+1}\right]$

$\forall x \in \mathbb{R}-\{a\},\ \varphi(d_k)(x) = \frac{1}{x-a}\ \frac{1}{k+1} \times \left[2^{k+1}(x-a)^{k+1} - (x-a)^{k+1}\right] = \frac{2^{k+1}-1}{k+1}\ \frac{(x-a)^{k+1}}{x-a}$

$\forall x \in \mathbb{R}-\{a\},\ \varphi(d_k)(x) = \frac{2^{k+1}-1}{k+1}\ d_k(x)$. Montrons que ceci vaut encore pour $x = a$.

$\varphi(d_k)(a) = d_k(a)$

2 cas :

$\rightarrow k = 0$ $\quad \varphi(d_k)(a) = d_k(a) \underset{\substack{\uparrow \\ d_0 = 1}}{=} 1 = \frac{2^{0+1}-1}{0+1} = \frac{2^{0+1}-1}{0+1}\, d_0(a) = \frac{2^{k+1}-1}{k+1}\, d_k(a)$

$\rightarrow k \geq 1$ $\quad \varphi(d_k)(a) = d_k(a) = 0 = \frac{2^{k+1}-1}{k+1} \times 0 = \frac{2^{k+1}-1}{k+1}\, d_k(a)$

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R},\ (\varphi(d_k))(x) = \frac{2^{k+1}-1}{k+1}\, d_k(x)$

Par conséquent : $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\phi(d_k) = \frac{2^{k+1}-1}{k+1} d_k$.

b.. Notons d'abord que ϕ_n prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$
$(d_0, d_1, \dots, d_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (cours ... Taylor ...)
Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} d_k \ ; \quad \phi_n(P) = \phi(P) \overset{\text{linéarité}}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} \phi(d_k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} \frac{2^{k+1}-1}{k+1} d_k \in \mathbb{R}_n[X].$$

$\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\phi_n(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
ϕ étant linéaire sa restriction à $\mathbb{R}_n[X]$ est linéaire.
ϕ_n est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$

$\mathcal{B}' = (d_0, d_1, \dots, d_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\phi_n(d_k) = \frac{2^{k+1}-1}{k+1} d_k$

$\mathcal{B}'$ est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$ constituée de vecteurs propres de ϕ_n ; ϕ_n est donc un endomorphisme diagonalisable de $\mathbb{R}_n[X]$.

$$A = M_{\mathcal{B}'}(\phi_n) = \begin{pmatrix} \alpha_0 & & (0) \\ & \alpha_1 & \\ (0) & & \ddots \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \alpha_k = \frac{2^{k+1}-1}{k+1} \text{ pour tout } k \in [\![0,n]\!].$$

$\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\alpha_k \neq 0$; par conséquent la matrice diagonale A est inversible.

Finalement ϕ_n est un automorphisme diagonalisable de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q4 a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $X^n = (X-a+a)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} (X-a)^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} d_k$ (on pouvait aussi utiliser Taylor ... voir plus haut) ;

b) Soit $f \in E$. $\leftarrow$ à faire $\rightarrow$ aisé

$$\underbrace{\forall x \in \mathbb{R},\ \int_x^{2x-a} f(t)\,dt = (x-a)x^n}_{(1)} \iff \forall x \in \mathbb{R}-\{a\},\ x^n = \frac{1}{x-a}\int_x^{2x-a} f(t)\,dt = \phi(f)(x) \overset{\text{par continuité}}{\iff} \forall x \in \mathbb{R},\ x^n = \phi(f)(x).$$

$$(1) \iff \phi(f) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} d_k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} \frac{k+1}{2^{k+1}-1} \phi(d_k) = \phi\Big(\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} \frac{k+1}{2^{k+1}-1} d_k\Big).$$

$$(1) \underset{\text{injectivité de } \phi}{\iff} f = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} \frac{k+1}{2^{k+1}-1} d_k$$

Par conséquent $f = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} \frac{k+1}{2^{k+1}-1} d_k$ est le seul élément de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_x^{2x-a} f(t)\,dt = (x-a)x^n$.

HEUREUSE PETITE FILLE ! NON ! ALORS CELA NE CHANGE PAS !

Exercice 2 (Q1) .. Soit $n \in \mathbb{N}$.

(A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements.

$p(A_{n+1}) = p(A_{n+1}/A_n)p(A_n) + p(A_{n+1}/B_n)p(B_n) + p(A_{n+1}/C_n)p(C_n)$

$p(A_{n+1}) = 0\,p(A_n) + a\,p(B_n) + 0\,p(C_n)$

de la même manière $p(B_{n+1}) = a\,p(A_n) + 0\,p(B_n) + (1-a)\,p(C_n)$

$p(C_{n+1}) = (1-a)\,p(A_n) + (1-a)\,p(B_n) + 0\,p(C_n)$

Donc $$X_{n+1} = \begin{bmatrix} p(A_{n+1}) \\ p(B_{n+1}) \\ p(C_{n+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\,p(B_n) + a\,p(C_n) \\ a\,p(A_n) + (1-a)\,p(C_n) \\ (1-a)\,p(A_n) + (1-a)\,p(B_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & 1-a \\ 1-a & 1-a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(A_n) \\ p(B_n) \\ p(C_n) \end{bmatrix} = M X_n$$

Remarque.. Le problème était ici presque terminé. En effet posons pour tout $n \in \mathbb{N}$

$a_n = p(A_n)$, $b_n = p(B_n)$ et $c_n = p(C_n)$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = a b_n + a c_n = a(b_n + c_n) = a[1 - a_n] = -a\,a_n + a \\ b_{n+1} = a\,a_n + (1-a) c_n \\ c_{n+1} = (1-a)(a_n + b_n) = (1-a)(1-c_n) = -(1-a)c_n + 1-a \end{cases}$$

$(a_n)_{n\geq 0}$ et $(c_n)_{n \geq 0}$ sont deux suites arithmético-géométriques.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $x = -ax + a \iff x = \frac{a}{1+a}$ et $x = -(1-a)x + (1-a) \iff x = \frac{1-a}{2-a}$

$\left(a_n - \frac{a}{1+a}\right)_{n\geq 0}$ est géométrique de raison $-a$ et $\left(c_n - \frac{1-a}{2-a}\right)_{n\geq 0}$ est géométrique de raison $-(1-a)$.

Il vient $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = (-a)^n\left[a_0 - \frac{a}{1+a}\right] + \frac{a}{1+a}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{a}{1+a}$ $(|a|<1)$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = (a-1)^n\left[c_0 - \frac{1-a}{2-a}\right] + \frac{1-a}{2-a}$. $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \frac{1-a}{2-a}$ $(|a-1|<1)$

Soit $n \in \mathbb{N}$

$b_{n+1} = a\,a_n + (1-a)c_n = -(-a)^{n+1}\left[a_0 - \frac{a}{1+a}\right] - (a-1)^{n+1}\left[c_0 - \frac{1-a}{2-a}\right] + \frac{a^2}{1+a} + \frac{(1-a)^2}{2-a}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = (-a)^n\left[\frac{a}{1+a} - a_0\right] + (a-1)^n\left[\frac{1-a}{2-a} - c_0\right] + \frac{a^2-a+1}{(1+a)(2-a)}$.

Il est aisé de vérifier que cette formule vaut encore pour $n = 0$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = (-a)^n\left[\frac{a}{1+a} - a_0\right] + (a-1)^n\left[\frac{1-a}{2-a} - c_0\right] + \frac{a^2-a+1}{(1+a)(2-a)}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \frac{a^2-a+1}{(1+a)(2-a)}$

Bravo pour la conception qui en 4 pages n'arrive pas à nous donner ce que l'on pouvait obtenir en une page ([Les résultats sont donnés pour $a = 1/4$!)

Q2) a) $N = \begin{bmatrix} 0 & a & 1-a \\ a & 0 & 1-a \\ a & 1-a & 0 \end{bmatrix}$; $N \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+1-a \\ a+1-a \\ a+1-a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \neq 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$.

Par conséquent $1 \in \operatorname{Spec}(N)$ et $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ est un vecteur propre de N.

b) et c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $N - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} -\lambda & a & 1-a \\ a & -\lambda & 1-a \\ a & 1-a & -\lambda \end{bmatrix}$ cherchons une réduite de Gauss de cette matrice.

$$\begin{bmatrix} a & 1-a & -\lambda \\ a & -\lambda & 1-a \\ -\lambda & a & 1-a \end{bmatrix} \xrightarrow{a \neq 0} \begin{bmatrix} a & 1-a & -\lambda \\ 0 & -\lambda-1+a & 1-a+\lambda \\ 0 & \lambda\frac{1-a}{a}+a & -\frac{\lambda^2}{a}+1-a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1-a & -\lambda \\ 0 & -(\lambda+1-a) & \lambda+1-a \\ 0 & \lambda(1-a)+a^2 & -\lambda^2+a-a^2 \end{bmatrix}$$

1er cas : $\lambda = a-1$

$\begin{bmatrix} a & 1-a & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(1-a)+a^2 & -\lambda^2+a-a^2 \end{bmatrix}$ devient $\begin{bmatrix} a & 1-a & -\lambda \\ 0 & \lambda(1-a)+a^2 & -\lambda^2+a-a^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ par $L_2 \leftrightarrow L_3$. cette matrice

n'est pas inversible (elle est triangulaire supérieure avec un zéro sur la diagonale) donc $N-\lambda I_3$ n'est pas inversible. $\lambda \in \operatorname{Spec} N$

2ème cas : $\lambda \neq a-1$

$\begin{bmatrix} a & 1-a & -\lambda \\ 0 & -(\lambda+1-a) & \lambda+1-a \\ 0 & \lambda(1-a)+a^2 & -\lambda^2+a-a^2 \end{bmatrix}$ devient $\begin{bmatrix} a & 1-a & -\lambda \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & \lambda(1-a)+a^2 & -\lambda^2+a-a^2 \end{bmatrix}$ par $L_2 \leftarrow \frac{1}{\lambda+1-a} L_2$

$\begin{bmatrix} a & 1-a & -\lambda \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$ avec $t = \lambda(1-a)+a^2-\lambda^2+a-a^2 = -\lambda^2+(1-a)\lambda+a$
$t = -(\lambda-1)(\lambda+a)$

Dans ce cas $N-\lambda I_3$ est non inversible ssi $t=0$ soit $\lambda = 1$ ou $\lambda = -a$.

IMPORTANT

Notons que dans ce cas $\lambda \neq a-1$ donc $\lambda = 1$ exige $a-1 \neq 1$, c'est à dire $a \neq 2$ ce qui est !

$\lambda = -a$ exige $a-1 \neq -a$ soit $a \neq 1/2$ ce qui n'est pas toujours !

<u>Conclusion</u>.. $a=\frac{1}{2}$. $\mathrm{Spec}(N)=\{\frac{1}{2}-1, 1\}=\{-\frac{1}{2}, 1\}$

$a\neq\frac{1}{2}$ $\mathrm{Spec}(N)=\{a-1, 1, -a\}$

Notons dans ce dernier cas que $a-1$, 1 et $-a$ sont deux à deux distincts ($a\in]0,1[-\{1/2\}$)

Donc $N\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et N a trois valeurs propres distinctes ; N est diagonalisable.

Remarquons même que dans les 2 cas on peut écrire $\mathrm{Spec}(N)=\{a-1, 1, -a\}$.

Pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, posons $F_\lambda=\{X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid NX=\lambda X\}$.

Soit $X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$\underline{NX=(a-1)X} \iff \begin{cases} ay+(1-a)z=(a-1)x \\ ax+(1-a)z=(a-1)y \\ ax+(1-a)y=(a-1)z \end{cases} \iff \begin{cases} (1-a)x+ay+(1-a)z=0 & \\ (1-2a)(x-y)=0 & L_1-L_2 \\ (1-2a)(x-y)=0 & L_1-L_3 \end{cases}$$

1er cas.. $a\neq 1/2$. $NX=(a-1)X \iff x=y$ et $x=(a-1)z$

$$F_{a-1}=\mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}a-1\\a-1\\1\end{bmatrix}\right)$$

2e cas.. $a=1/2$ $NX=(a-1)X \iff NX=(-1/2)X \iff x+y+z=0$

$$F_{-1/2}=\mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}\right)$$

$$NX=X \iff \begin{cases} ay+(1-a)z=x \\ ax+(1-a)z=y \\ ax+(1-a)y=z \end{cases} \iff \begin{cases} -x+ay+(1-a)z=0 & \\ (a^2-1)(x-z)=0 & aL_1+L_2 \\ (a^2-a+1)(y-z)=0 & aL_1+L_3 \end{cases}$$

$$NX=X \iff \begin{cases} x=z \\ y=z \\ -z+az+(1-a)z=0 \end{cases} \iff x=y=z. \quad F_1=\mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right).$$

$$NX=-aX \iff \begin{cases} ay+(1-a)z=-ax \\ ax+(1-a)z=-ay \\ ax+(1-a)y=-az \end{cases} \iff \begin{cases} ax+ay+(1-a)z=0 \\ ax+ay+(1-a)z=0 \\ ax+(1-a)y+az=0 \end{cases} \iff \begin{cases} ax+ay+(1-a)z=0 & \\ (2a-1)(y-z)=0 & L_1-L_3 \end{cases}$$

Si $a=1/2$ $F_{-a}=F_{-1/2}$ déjà fait.

Si $a\neq 1/2$ $NX=-aX \iff \begin{cases} y=z \\ ax+z=0 \end{cases}$ $F_{-a}=\mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\-a\\-a\end{bmatrix}\right)$.

Résumons..

1er cas.. $a = 1/2$ $\quad$ $\mathrm{Spec}(N) = \{-1/2, 1\}$. $F_{-1/2} = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}\right)$ et $F_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)$

$\dim F_{-1/2} + \dim F_1 = 3$

N est diagonalisable

2ème cas.. $a \neq 1/2$ $\quad$ $\mathrm{Spec}(N) = \{a-1, 1, -a\}$

$F_{a-1} = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}a-1\\a-1\\1\end{bmatrix}\right)$, $F_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)$, $F_{-a} = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\-a\\-a\end{bmatrix}\right)$

N est diagonalisable.

Remarque.. dans les deux cas $\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-a\\-a\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}a-1\\a-1\\1\end{bmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de N.

Q3. Soit $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $Y = \begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$PX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + (a-1)z = x' \\ x - ay + (a-1)z = y' \\ x - ay + z = z' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + (a-1)z = x' \\ (1+a)y = x' - y' & L_1 - L_2 \\ (a-2)z = y' - z' & L_2 - L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{a+1}(x'-y') \\ z = \frac{1}{a-2}(y'-z') \\ x = x' - y - (a-1)z \end{cases}$$

$$PX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{(a+1)(a-2)}\left[(a+1)(a-2)x' - (a-2)(x'-y') - (a-1)(a+1)(y'-z')\right] = (a)(a-2)x' + (-a^2+a-1)y' + (a^2-1)z' \\ y = \frac{1}{a+1}(x'-y') \\ z = \frac{1}{a-2}(y'-z') \end{cases}$$

Ceci prouve que P est inversible et que : $P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a}{a+1} & \frac{-a^2+a-1}{(a+1)(a-2)} & \frac{a-1}{a-2} \\ \frac{1}{a+1} & -\frac{1}{a+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a-2} & -\frac{1}{a-2} \end{bmatrix}$

Normal pour une matrice de passage.

Q4) a) P est inversible et les colonnes de P sont des vecteurs propres de N respectivement associés aux valeurs propres 1, $-a$ et $a-1$. P étant inversible ces vecteurs constituent une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. P n'est autre que la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à la base $\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-a\\-a\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}a-1\\a-1\\1\end{bmatrix}\right)$; par conséquent $P^{-1}NP = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -a & 0\\0 & 0 & a-1\end{bmatrix}$. Pour $D = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -a & 0\\0 & 0 & a-1\end{bmatrix}$, $D = P^{-1}NP$

Une récurrence simple donne : $\forall n \in \mathbb{N}$, $D^n = P^{-1}N^nP$ ou $N^n = PD^nP^{-1}$.

b) Supposons $a = 1/4$ $\quad$ $D = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -1/4 & 0\\0 & 0 & -3/4\end{bmatrix}$; $P = \begin{bmatrix}1 & 1 & -3/4\\1 & -1/4 & -3/4\\1 & -1/4 & 1\end{bmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{bmatrix}1/5 & 13/35 & 3/7\\4/5 & -4/5 & 0\\0 & -4/7 & 4/7\end{bmatrix}$

Notons que $P^{-1} = \frac{1}{35}\begin{bmatrix}7 & 13 & 15\\28 & -28 & 0\\0 & -20 & 20\end{bmatrix}$

Ainsi :

$$M^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3/4 \\ 1 & -1/4 & -3/4 \\ 1 & -1/4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^n & 0 \\ 0 & 0 & \beta^n \end{bmatrix} \frac{1}{35} \begin{bmatrix} 7 & 13 & 15 \\ 28 & -28 & 0 \\ 0 & -20 & 20 \end{bmatrix}$$ avec $\alpha = -1/4$ et $\beta = -3/4$

$$M^n = \frac{1}{35} \begin{bmatrix} 1 & \alpha^n & -3/4\,\beta^n \\ 1 & -1/4\,\alpha^n & -3/4\,\beta^n \\ 1 & -1/4\,\alpha^n & \beta^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 13 & 15 \\ 28 & -28 & 0 \\ 0 & -20 & 20 \end{bmatrix} = \frac{1}{35} \begin{bmatrix} 7+28\alpha^n & 13-28\alpha^n+15\beta^n & 15-15\beta^n \\ 7-7\alpha^n & 13+7\alpha^n+15\beta^n & 15-15\beta^n \\ 7-7\alpha^n & 13+7\alpha^n-20\beta^n & 15+20\beta^n \end{bmatrix}$$

Faut-il que les valeurs soient égales à celle pour prendre son pied avec ce type de calculs !

Par conséquent : $$M^n = \frac{1}{35} \begin{bmatrix} 7+28(-1/4)^n & 13-28(-1/4)^n+15(-3/4)^n & 15-15(-3/4)^n \\ 7-7(-1/4)^n & 13+7(-1/4)^n+15(-3/4)^n & 15-15(-3/4)^n \\ 7-7(-1/4)^n & 13+7(-1/4)^n-20(-3/4)^n & 15+20(-3/4)^n \end{bmatrix}$$

Par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N}$, $M'^n = {}^tM^n = \dfrac{1}{35} \begin{bmatrix} 7+28(-1/4)^n & 7-7(-1/4)^n & 7-7(-1/4)^n \\ 13-28(-1/4)^n+15(-3/4)^n & 13+7(-1/4)^n+15(-3/4)^n & 13+7(-1/4)^n-20(-3/4)^n \\ 15-15(-3/4)^n & 15-15(-3/4)^n & 15+20(-3/4)^n \end{bmatrix}$

Q5 a) Ici $X_0 = \begin{bmatrix} p(A_0) \\ p(B_0) \\ p(C_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = M'X_n$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = M'^n X_0$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{bmatrix} p(A_n) \\ p(B_n) \\ p(C_n) \end{bmatrix} = \dfrac{1}{35} \begin{bmatrix} 7+28(-1/4)^n \\ 13-28(-1/4)^n+15(-3/4)^n \\ 15-15(-3/4)^n \end{bmatrix}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $p(A_n) = \frac{1}{5} + \frac{4}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$, $p(B_n) = \frac{13}{35} - \frac{4}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{3}{7}\left(-\frac{3}{4}\right)^n$ et $p(C_n) = \frac{3}{7} - \frac{3}{7}\left(-\frac{3}{4}\right)^n$

b) Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} p(A_n) = \frac{1}{5}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} p(B_n) = \frac{13}{35}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} p(C_n) = \frac{3}{7}$.

Notons que ce résultat ne dépend pas de la position initiale ce qui ne surprendra pas les spécialistes des chaînes de MARKOV... et ou encore !

PARTIE I

Q1.. a) Soit $k \in [\![0,n]\!]$.

- Si $k=0$: $p(\{X_i=1\}/\{A=k\}) = 0$
- Supposons $k \geq 1$. $p(\{X_i=1\}/\{A=k\}) = \dfrac{p(\{X_i=1\}\cap\{A=k\})}{p(A=k)}$.

$p(A=k) = \dfrac{C_n^k}{2^n}$ ← nombre de parties ayant k éléments de $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ / ← nombre de parties de $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

$p(\{X_i=1\}\cap\{A=k\}) = \dfrac{C_{n-1}^{k-1}}{2^n}$ ← nombre de parties ayant k éléments de $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ et contenant a_i

Par conséquent : $p(\{X_i=1\}/\{A=k\}) = \dfrac{C_{n-1}^{k-1}/2^n}{C_n^k/2^n} = \dfrac{C_{n-1}^{k-1}}{C_n^k} = \dfrac{k}{n}$

Les deux résultats précédents donnent : $\forall k \in [\![0,n]\!],\ p(\{X_i=1\}/\{A=k\}) = \dfrac{k}{n}$

b) $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ et $i \neq j$.

- Si $k=0$ ou $k=1$: $p(\{X_i=1$ et $X_j=1\}/\{A=k\}) = \dfrac{p(\{X_i=1\}\cap\{X_j=1\}\cap\{A=k\})}{p(\{A=k\})} = 0$.
- Supposons $k \geq 2$

$p((\{X_i=1\}\cap\{X_j=1\})/\{A=k\}) = \dfrac{p((\{X_i=1\}\cap\{X_j=1\})\cap\{A=k\})}{p(A=k)} = \dfrac{C_{n-2}^{k-2}/2^n}{C_n^k/2^n} = \dfrac{k(k-1)}{n(n-1)}$ car il y a C_{n-2}^{k-2} parties de $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ayant k éléments et contenant a_i et a_j.

Il résulte de ce qui précède que : $\forall k \in [\![0,n]\!],\ p((\{X_i=1\}\cap\{X_j=1\})/\{A=k\}) = \dfrac{k(k-1)}{n(n-1)}$

c) a_i vaut α_i francs et $X_i=1$ si le client achète a_i ; par conséquent :

$S = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_n X_n$. $\quad S = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$

Q2.. Soit $i \in [\![1,n]\!]$. $(\{A=k\})_{k\in[\![0,n]\!]}$ est un système complet d'événements donc :

$$p(X_i=1) = \sum_{k=0}^{n} p(\{X_i=1\}\cap\{A=k\}) = \sum_{k=0}^{n} p(\{X_i=1\}/\{A=k\})\, p(\{A=k\}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} p(A=k)$$

A est uniforme sur $\{0,1,\dots,n\}$ donc : $\forall k \in [\![0,n]\!],\ p(A=k) = \dfrac{1}{n+1}$

donc $p(X_i=1) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{k}{n} \cdot \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{n(n+1)} \sum_{k=0}^{n} k = \dfrac{1}{n(n+1)} \cdot \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{1}{2}$. $\forall i \in [\![1,n]\!],\ p(X_i=1) = \dfrac{1}{2}$

Q3 .. $E(S) = E(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p(X_i = 1) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i / 2$.

$\underline{E(S) = (1/2) \sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$.

Q4 .. $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ et $i \neq j$.

a) $p(\{X_i=1\} \cap \{X_j=1\}) = \sum_{k=0}^{n} p((\{X_i=1\} \cap \{X_j=1\}) / \{A=k\})\, p(\{A=k\})$

$= \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{n(n-1)} \times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n^2-1)} \left(\sum_{k=0}^{n} k^2 - \sum_{k=0}^{n} k \right)$

$= \frac{1}{n(n^2-1)} \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right] = \frac{1}{n(n-1)(n+1)} \frac{n(n+1)}{2} \left[\frac{2n+1}{3} - 1 \right]$

$= \frac{1}{2n-2} \left[\frac{2n+1-3}{3} \right] = \frac{1}{3}$

$\underline{\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow p(\{X_i=1\} \cap \{X_j=1\}) = \frac{1}{3}}$.

b) X_i, X_j et $X_i X_j$ sont des var de Bernoulli donc $E(X_i) = p(X_i=1) = \frac{1}{2}$, $E(X_j) = p(X_j=1) = \frac{1}{2}$

et $E(X_i X_j) = p(X_i X_j = 1) = p(\{X_i=1\} \cap \{X_j=1\}) = 1/3$

Donc $\mathrm{cov}(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i) E(X_j) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

$\underline{\mathrm{cov}(X_i, X_j) = 1/12}$.

$\rho_{X_i X_j} = \frac{\mathrm{cov}(X_i, X_j)}{\sigma(X_i)\sigma(X_j)}$. $V(X_i) = p(X_i=1)\, p(X_i=0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. $V(X_j) = \frac{1}{4}$!

$\rho_{X_i X_j} = \frac{1/12}{\sqrt{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$. $\underline{\rho_{X_i X_j} = \frac{1}{3}}$.

X_i et X_j ne sont pas indépendantes car $\mathrm{cov}(X_i, X_j) \neq 0$.

Q5 .. a) $V(S) = V(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} V(\alpha_i X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{cov}(\alpha_i X_i, \alpha_j X_j)$

$V(S) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_i \alpha_j \mathrm{cov}(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \frac{1}{4} + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_i \alpha_j \times \frac{1}{12}$

Rappelons que : $(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_i \alpha_j$ donc $2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_i \alpha_j = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2$

Par conséquent : $V(S) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 + \frac{1}{12} \left((\sum_{i=1}^{n} \alpha_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \right) = \underline{\frac{1}{12} (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i)^2 + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = V(S)}$

b) $\forall i \in [\![1,n]\!], \alpha_i = i$ donc $\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ et $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$V(S) = \frac{1}{12}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)}{12}\left[\frac{n(n+1)}{4} + \frac{2n+1}{3}\right] = \frac{n(n+1)}{144}(3n^2+3n+8n+4)$

$\underline{\underline{V(S) = \frac{n(n+1)(3n^2+11n+4)}{144}}}$.

Q6.. $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ a) $f : t \mapsto t^\beta$ est continue sur $[0,1]$ (...ou prolongeable par continuité...)

$\int_0^1 f(t)dt = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(i/n)\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (i/n)^\beta\right]$

or $\int_0^1 f(t)dt = \left[\frac{t^{\beta+1}}{\beta+1}\right]_0^1 = \frac{1}{\beta+1}$. Par conséquent : $\underline{\underline{\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^\beta\right] = \frac{1}{\beta+1}}}$.

$E(S) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^\beta$

Or $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^\beta \sim \frac{1}{\beta+1}$ donc $\frac{1}{n^{\beta+1}}\sum_{i=1}^{n} i^\beta \sim \frac{1}{\beta+1}$; $\underline{\underline{\sum_{i=1}^{n} i^\beta \sim \frac{n^{\beta+1}}{\beta+1}}}$

Par conséquent : $\underline{\underline{E(S) \sim \frac{1}{2}\,\frac{1}{\beta+1}\,n^{\beta+1}}}$

b) $\underline{V(S) = \frac{1}{12}\left(\sum_{i=1}^{n} i^\beta\right)^2 + \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n}(i^\beta)^2}$. Posons $\hat{u}_n = \frac{1}{12}\left(\sum_{i=1}^{n} i^\beta\right)^2$ et

$\hat{v}_n = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n}(i^\beta)^2 = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n} i^{2\beta}$. $\hat{u}_n \sim \frac{1}{12}\left(\frac{n^{\beta+1}}{\beta+1}\right)^2 = \frac{1}{12(\beta+1)^2} n^{2\beta+2}$ et $\hat{v}_n \sim \frac{1}{6}\,\frac{n^{2\beta+1}}{2\beta+1}$

$\frac{\hat{v}_n}{\hat{u}_n} \sim \frac{1}{6(2\beta+1)} \times 12(\beta+1)^2 \times \frac{1}{n}$ donc $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\hat{v}_n}{\hat{u}_n}\right) = 0$; $\hat{v}_n = o(\hat{u}_n)$.

ceci donne alors $V(S) = \hat{u}_n + \hat{v}_n \sim \hat{u}_n \sim \frac{1}{12(\beta+1)^2} n^{2\beta+2}$

$\underline{\underline{V(S) \sim \frac{1}{12(\beta+1)^2} n^{2\beta+2}}}$.

PARTIE 2

Q1.. $1 = \sum_{k=0}^{n} p(A=k) = a + \sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda}{k} = a + \lambda\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$; $\underline{\underline{\lambda = \frac{1-a}{\sum_{k=1}^{n} 1/k}}}$

Q2.. $n = 3$ et $a = 1/12$ donc $\lambda = \frac{1-1/12}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = \frac{11/12}{11/6} = \frac{1}{2}$

$\underline{\underline{\lambda = \frac{1}{2}}}$.

$p(A=0) = \frac{1}{12}$, $p(A=1) = \frac{1}{2}$, $p(A=2) = \frac{1}{4}$, $p(A=3) = \frac{1}{6}$.

$S = X_1 + 2X_2 + 3X_3$

$S(\Omega) = \{0,1,2,3,4,5,6\}$

X_1	X_2	X_3	S	A
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
0	1	0	2	1
0	0	1	3	1
1	1	0	3	2
1	0	1	4	2
0	1	1	5	2
1	1	1	6	3

$p(S=0) = p(A=0) = \frac{1}{12}$

$p(S=1) = p(\{X_1=1\} \cap \{A=1\})$

$= p(\{X_1=1\}/\{A=1\})\, p(A=1)$

$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

Jgi

$p(S=2) = p(\{X_2=1\} \cap \{A=1\}) = p(\{X_2=1\}/\{A=1\})\, p(A=1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

$p(S=3) = p(\{X_3=1\} \cap \{A=1\}) + p((\{X_1=1\} \cap \{X_2=1\}) \cap \{A=2\})$

$p(S=3) = p(\{X_3=1\}/\{A=1\})\,p(A=1) + p((\{X_1=1\} \cap \{X_2=1\})/\{A=2\})\,p(A=2)$

$p(S=3) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2(2-1)}{3(3-1)} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$.

$p(S=4) = p(\{X_1=1\} \cap \{X_3=1\} \cap \{A=2\}) = p((\{X_1=1\} \cap \{X_3=1\})/\{A=2\})\,p(A=2)$

$$= \frac{2(2-1)}{3(3-1)} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12} .$$

De même $p(S=5) = p((\{X_2=1\} \cap \{X_3=1\})/\{A=2\})\,p(A=2) = \frac{1}{12}$.

$p(S=6) = p(A=3) = \frac{1}{6}$.

k	0	1	2	3	4	5	6
$p(S=k)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$

$\sum_{k=0}^{6} p(S=k) = \frac{1}{12}[1+2+2+3+1+1+2] = \frac{12}{12} = 1$!

$E(S) = 0 + 1\times\frac{2}{12} + 2\times\frac{2}{12} + 3\times\frac{3}{12} + 4\times\frac{1}{12} + 5\times\frac{1}{12} + 6\times\frac{2}{12} = \frac{36}{12}$; $\underline{\underline{E(S)=3}}$

$E(S^2) = 0 + 1^2\times\frac{2}{12} + 2^2\times\frac{2}{12} + 3^2\times\frac{3}{12} + 4^2\times\frac{1}{12} + 5^2\times\frac{1}{12} + 6^2\times\frac{2}{12} = \frac{150}{12} = \frac{25}{2} = 12,5$

$V(S) = \frac{25}{2} - 9 = \frac{9}{2}$. $\underline{\underline{V(S) = \frac{7}{2}}} = 3,5$

Q3.. Soit $i \in [\![1,n]\!]$. $p(X_i=1) = \sum_{k=0}^{n} p(X_i=1/A=k)\,p(A=k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\, p(A=k) = \sum_{\underline{\underline{k=1}}}^{n} \frac{k}{n}\, \frac{\lambda}{k}$

$p(X_i=1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda}{n} = n \times \frac{\lambda}{n} = \lambda$. $\underline{\underline{p(X_i=1)=\lambda.}}$

Q4.. $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ et $i \neq j$.

a) $p(\{X_i=1\} \cap \{X_j=1\}) = \sum_{k=0}^{n} p((\{X_i=1\} \cap \{X_j=1\})/A=k)\,p(A=k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{n(n-1)}\, p(A=k)$

$p(\{X_i=1\} \cap \{X_j=1\}) = \sum_{\underline{\underline{k=1}}}^{n} \frac{k(k-1)}{n(n-1)} \times \frac{\lambda}{k} = \frac{\lambda}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n} (k-1) = \frac{\lambda}{n(n-1)} \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{\lambda}{n(n-1)} \times \frac{(n-1)n}{2} = \frac{\lambda}{2}$

$\underline{\underline{p(\{X_i=1\} \cap \{X_j=1\}) = \frac{\lambda}{2}.}}$

b) X_i et X_j sont deux var de Bernoulli, par conséquent elles sont indépendantes si et seulement si $p(\{X_i=1\} \cap \{X_j=1\}) = p(X_i=1)\,p(X_j=1)$, c'est à dire si et seulement si : $\frac{\lambda}{2} = \lambda^2$.

$\lambda = \frac{1-a}{\sum_{k=1}^{n} 1/k}$

$\frac{\lambda}{2} = \lambda^2 \iff 2\lambda^2 - \lambda = 0 \iff \lambda = 0$ ou $\lambda = 1/2 \iff 1-a=0$ ou $2(1-a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

$\frac{\lambda}{2} = \lambda^2 \iff a=1$ ou $2(1-a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Notons que $2(1-a) \in]0,2[$ et que $\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}\right)_{k \geq 1}$ est une suite strictement croissante dont les 4 premiers termes sont : 1, $3/2$, $\frac{11}{6}$ et $\frac{25}{12}$. $\frac{11}{6} < 2$ et $\frac{25}{12} > 2$.

Rappelons que : $n \geq 2$

Par conséquent : $\frac{\lambda}{2} = \lambda^2 \iff a=1$ ou $(n=2$ et $2(1-a) = \frac{3}{2})$ ou $(n=3$ et $2(1-a) = \frac{11}{6})$

$\frac{\lambda}{2} = \lambda^2 \iff a=1$ ou $(n=2$ et $a = 1/4)$ ou $(n=3$ et $a = \frac{1}{12})$. Or $a \in]0,1[$;

$\underline{\underline{\text{donc : } X_i \text{ et } X_j \text{ sont indépendantes si et seulement si : } (n=2 \text{ et } a=\tfrac{1}{4}) \text{ ou } (n=3 \text{ et } a=\tfrac{1}{12}).}}$

c) $\mathrm{cov}(X_i,X_j) = E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j) = p(\{X_i=1\} \cap \{X_j=1\}) - p(X_i=1)\,p(X_j=1) = \frac{\lambda}{2} - \lambda^2$

$\underline{\underline{\mathrm{cov}(X_i,X_j) = \frac{\lambda}{2} - \lambda^2}}$

Q5.. $E(S) = E\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda$. $\underline{\underline{E(S) = \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i}}$

De même que dans la première partie : $V(S) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_i \alpha_j \,\mathrm{cov}(X_i,X_j)$

$V(X_i) = p(X_i = 1)\,p(X_i = 0) = \lambda(1-\lambda)$ et $\mathrm{cov}(X_i, X_j) = \frac{\lambda}{2} - \lambda^2$

de plus $2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_i \alpha_j = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)^2 - \sum \alpha_i^2$

donc $V(S) = \lambda(1-\lambda) \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 + \left(\frac{\lambda}{2} - \lambda^2\right)\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2\right]$

$V(S) = \left[\lambda(1-\lambda) - \frac{\lambda}{2} + \lambda^2\right] \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 + \left(\frac{\lambda}{2} - \lambda^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)^2$

$V(S) = \left(\frac{\lambda}{2} - \lambda^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)^2 + \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2.$

Q6°. a) Voir à la fin

b) i) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$

et ii) $v_n = u_n - u_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} 1/k - \ln n - \sum_{k=1}^{n-1} 1/k + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ au voisinage de 0 donc $\ln(1+x) - x \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$; $\ln(1-x) + x \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$

Par conséquent : $v_n \sim -\frac{(1/n)^2}{2} = \frac{-1}{2n^2}$; $-v_n \sim 1/2n^2$.

De plus $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2n^2} \geq 0$ et la série de terme général $\frac{1}{2n^2}$ converge.

Les règles de comparaison des séries à termes positifs entraînent la convergence de la série de terme général $-v_n = -(u_n - u_{n-1})$; la série de terme général $v_n = u_n - u_{n-1}$ converge.

$\forall n \in [\![2, +\infty[\![$, $\sum_{k=2}^{n} v_k = \sum_{k=2}^{n} (u_k - u_{k-1}) = u_n - u_1$; $\forall n \in [\![2, +\infty[\![$, $u_n = u_1 + \sum_{k=2}^{n} v_k$

La suite $\left(\sum_{k=2}^{n} v_k\right)_{n \geq 2}$ converge puisque la série de terme général v_n converge, donc la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge. Posons $\ell = \lim_{n \to +\infty} u_n$.

$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{\ln n} = 0$; $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} 1/k}{\ln n} - 1\right) = 0$; $\lim_{n \to +\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} 1/k}{\ln n} = 1$; $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$

c) Rappelons que : $\lambda = \frac{1-a}{\sum_{k=1}^{n} 1/k}$ donc $\lambda \sim \frac{1-a}{\ln n}$!

$E(S) = \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} i^\beta \sim \frac{1-a}{\ln n} \frac{n^{\beta+1}}{\beta+1}$

$E(S) \sim \frac{1-a}{\ln n} \frac{n^{\beta+1}}{\beta+1}.$

d] Rappelons que : $V(S) = \lambda\left[(\frac{1}{2}-\lambda)\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\right]$

Posons $a_n = (\frac{1}{2}-\lambda)\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)^2 = (\frac{1}{2}-\lambda)\left(\sum_{i=1}^{n} i^{\beta}\right)^2$ et $b_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^{2\beta}$

$\lambda \sim \frac{1-a}{\ln n}$ donc $\lim_{n\to+\infty}\lambda = 0$.

$a_n \sim \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} i^{\beta}\right)^2 \sim \frac{1}{2}\left(\frac{n^{\beta+1}}{\beta+1}\right)^2 = \frac{1}{2(\beta+1)^2} n^{2\beta+2}$

$b_n \sim \frac{1}{2}\ \frac{n^{2\beta+1}}{2\beta+1}$

Par conséquent $b_n = o(a_n)$ $\quad \left(\frac{b_n}{a_n} \sim \frac{2(\beta+1)^2}{2(2\beta+1)} \times \frac{1}{n}\right)$

donc $a_n + b_n \sim a_n$.

Par conséquent $V(S) = \lambda(a_n+b_n) \sim \lambda a_n \sim \frac{1-a}{\ln n}\ \frac{1}{2(\beta+1)^2}\ n^{2\beta+2}$

Donc : $\boxed{V(S) \sim \frac{1-a}{2(\beta+1)^2}\ \frac{n^{2\beta+2}}{\ln n}}$

Q7. a] L'hypothèse la plus vraisonnable est (H'') car $p(A=k) = \frac{\lambda}{k}$ donc la probabilité d'acheter k produits diminue lorsque k augmente, alors que dans (H') : $p(A=k) = \frac{1}{n+1}$; cette probabilité est constante.

b] (H') donne $E(S) = (1/2)\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$

(H'') donne $E(S) = \lambda\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$

$\frac{1}{2} < \lambda \iff \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} < 2(1-a) \iff \left(n=2 \text{ et } \frac{3}{2} < 2(1-a)\right)$ ou $\left(n=3 \text{ et } \frac{11}{6} < 2(1-a)\right)$

$a \in]0,1[$, $n \geq 2$, $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)_{n\geq 1}$ croissante et de premiers termes $1, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}, \frac{25}{12}$

$\frac{1}{2} < \lambda \iff (n=2 \text{ et } a < \frac{1}{4})$ ou $(n=3 \text{ et } a < \frac{1}{12})$.

En moyenne (H'') est strictement plus avantageuse que (H') ssi $(n=2 \text{ et } a<\frac{1}{4})$ ou $(n=3 \text{ et } a < \frac{1}{12})$.

L'algorithme.-

Lire n, a, beta

Initialiser r à 1, s à 1, l à 1

Pour i variant de 2 à n faire:

r prend la valeur de $r + i^{\beta}$

s prend la valeur de $s + i^{2\beta}$

l prend la valeur de $l + 1/i$

l prend la valeur de $(1-a)/l$

Afficher $l * r$

Afficher $l * ((0,5 - l) * r^2 + 0,5 * s)$

Le programme

```
program ecrico92;

uses crt;
var n,i:integer;a,beta,r,s,l:real;

begin
clrscr;
write('Donnez le nombres n d''articles. n=');readln(n);
write('Donnez la valeur de a. a=');readln(a);
write('Donnez la valeur de beta. beta=');readln(beta);
r:=1;s:=1;l:=1;
for i:=2 to n do
    begin
    r:=r+exp(beta*ln(i));s:=s+exp(2*beta*ln(i));l:=l+1/i
    end;
l:=(1-a)/l;
writeln;
writeln('L''espérance est sensiblement : ',l*r:6:2);
write('La variance est sensiblement : ',l*((0.5-l)*sqr(r)+0.5*s):6:2)
end.
```

Exécution.-

```
Donnez le nombres n d'articles. n=10
Donnez la valeur de a. a=0.1
Donnez la valeur de beta. beta=1.5

L'espérance est sensiblement :  43.84
La variance est sensiblement : 1670.19
```

```
Donnez le nombres n d'articles. n=20
Donnez la valeur de a. a=0.5
Donnez la valeur de beta. beta=1.2

L'espérance est sensiblement :  48.55
La variance est sensiblement : 6712.18
```