ESC 2009

Exercice 3

Sujet : Étude de l'inverse du produit de deux lois uniformes. **Facile**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★★

Thèmes du programme abordés : Variables à densité.

Informatique : les questions de `Turbo Pascal` du sujet original ont été traduites en questions de `Scilab`.

Commentaires : facile, mais idéal pour réviser les bases sur les variables à densité.

On considère le programme `Scilab` suivant, où l'on rappelle que `rand()` est une variable à densité suivant la loi uniforme sur $[0,1]$, dont les exécutions successives donnent des variables indépendantes.

```
U = rand() ;
V = rand() ;
X = -log(U) ;
V = -log(Y) ;
Z = X+Y ;
```

1. Montrer que $X(\Omega) = \mathbf{R}^+$ et que la variable X suit une loi exponentielle de paramètre 1.
   (On considérera que, du fait que $[U = 0]$ est de probabilité nulle, $U(\Omega) =]0,1]$).

2. a. Quelle est la loi de Y ? Justifier que X et Y sont indépendantes.
   b. Déterminer une densité f de Z. Vérifier que si $x \geqslant 0$, alors $f(x) = xe^{-x}$.
   c. Déterminer la fonction de répartition de Z.

3. a. On note $T = e^Z$.
   Déterminer la fonction de répartition de T et montrer que T est une variable à densité.
   b. En déduire que la fonction h définie sur $\mathbf{R}$ par

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \dfrac{\ln(t)}{t^2} & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}$$

   est une densité de la variable aléatoire $\dfrac{1}{UV}$.

ESC 2009 : CORRIGÉ

EXERCICE 3

1. Notons que U étant simulée par `rand()`, elle suit une loi uniforme sur $]0,1]$.
On a alors $X = -\ln(U)$. Puisque U prend ses valeurs dans $]0,1]$, $\ln(U)$ prend ses valeurs dans $]-\infty,0]$ et donc $X(\Omega) = \mathbf{R}^+$.
Pour $x < 0$, on a donc $F_X(x) = 0$.
Pour $x \geqslant 0$, il vient

$$F_X(x) = P(X \leqslant x) = P(-\ln(U) \leqslant x) = P(\ln(U) \geqslant -x).$$

Et donc, par croissance de la fonction exponentielle :

$$F_X(x) = P(U \geqslant e^{-x}) = 1 - P(U \leqslant e^{-x}) = 1 - F_U(e^{-x}).$$

Mais U suit une loi uniforme sur $[0,1]$ donc F_U est la fonction

$$t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

Et puisque $0 \leqslant e^{-x} \leqslant 1$, on a donc $F_X(x) = 1 - e^{-x}$.
Par conséquent, F_X est la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre 1, et donc $\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{E}(1).}$

2.a. Puisque U et V suivent la même loi, $X = -\ln(U)$ et $Y = -\ln(V)$ suivent également la même loi, donc Y suit la loi exponentielle de paramètre 1.
U et V étant indépendantes, il en est de même de X et Y d'après le lemme des coalitions.

2.b. Rappelons que la loi exponentielle $\mathscr{E}(1)$ est également la loi $\gamma(1)$.
Par stabilité des lois γ, qui s'applique car X et Y sont indépendantes, $Z = X + Y \hookrightarrow \gamma(2)$.
Une densité de Z est donc

$$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(2)} x^{2-1} e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} = \boxed{\begin{cases} xe^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

$\Gamma(2)$
Rappelons que $\Gamma(n) = (n-1)!$, de sorte que $\Gamma(2) = 1! = 1$.

2.c. Pour $x \leqslant 0$, on a $F_Z(x) = 0$, et pour $x \geqslant 0$, on a $F_Z(x) = \displaystyle\int_0^x te^{-t}\,dt$.
Une intégration par parties, en posant $u(t) = t$ et $v(t) = -e^{-t}$ qui sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,x]$ nous donne

$$F_Z(x) = [-te^{-t}]_0^x + \int_0^x e^{-t}\,dt = -xe^{-x} + 1 - e^{-x} = 1 - (x+1)e^{-x}.$$

En conclusion : $\boxed{F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (x+1)e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}}$

3.a. Puisque Z est à valeurs positives, T est à valeurs dans $[1,+\infty[$.
Et donc pour $x < 1$, $F_T(x) = 0$.
Pour $x \geqslant 1$, on a, par croissance de la fonction ln,

$$F_T(x) = P(T \leqslant x) = P(e^Z \leqslant x) = P(Z \leqslant \ln(x)) = F_Z(\ln(x)) = 1-(\ln(x)+1)e^{-\ln(x)} = 1 - \frac{\ln(x)+1}{x}.$$

Ainsi, on a $\boxed{F_T : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \dfrac{\ln x + 1}{x} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}}$

Il est clair[1] que F_T est de classe $\mathscr{C}^1$ (et donc continue) sur $]-\infty,1[$ et sur $]1,+\infty[$.
De plus on a

$$\lim_{x\to 1^-} F_T(x) = 0 = \lim_{x\to 1^+} F_T(x).$$

Donc F_T est continue en 1 et par conséquent sur $\mathbf{R}$ tout entier.
Ainsi, F_T est continue sur $\mathbf{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ sauf éventuellement en 1 : $\boxed{T \text{ est une variable à densité.}}$

[1] Par opérations sur des fonctions usuelles de classe $\mathscr{C}^1$.

3.b. On a $\dfrac{1}{UV} = \dfrac{1}{U}\dfrac{1}{V} = e^{-\ln(U)}e^{-\ln(V)} = e^{-\ln(U)-\ln(V)} = e^{Z} = T$.
Or, une densité de T est obtenue en dérivant F_T là où c'est possible[2] et en choisissant des valeurs arbitraires ailleurs.
Mais pour $x \neq 1$, on a

$$F_T'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ -\dfrac{\frac{1}{x}x - (\ln(x)+1)}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{\ln x}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Ainsi, on peut prendre pour densité de T la fonction

$$\boxed{h : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \dfrac{\ln(t)}{t^2} & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}}$$

[2] C'est-à-dire sauf en $x = 1$.

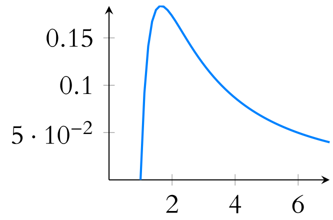

Figure 1– La densité h.