

EXERCICE 3

Sujet : Étude de l'inverse du produit de deux lois uniformes.

Facile

Abordable en première année : 

Intérêt : 

Thèmes du programme abordés : Variables à densité.

Informatique : les questions de Turbo Pascal du sujet original ont été traduites en questions de SciLab.

Commentaires : facile, mais idéal pour réviser les bases sur les variables à densité.

On considère le programme SciLab suivant, où l'on rappelle que `rand()` est une variable à densité suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$, dont les exécutions successives donnent des variables indépendantes.

```
1 U = rand() ;
2 V = rand() ;
3 X = -log(U) ;
4 V = -log(Y) ;
5 Z = X+Y ;
```

1. Montrer que $X(\Omega) = \mathbf{R}^+$ et que la variable X suit une loi exponentielle de paramètre 1.
(On considérera que, du fait que $[U = 0]$ est de probabilité nulle, $U(\Omega) =]0, 1]$).
2.
 - a. Quelle est la loi de Y ? Justifier que X et Y sont indépendantes.
 - b. Déterminer une densité f de Z . Vérifier que si $x \geq 0$, alors $f(x) = xe^{-x}$.
 - c. Déterminer la fonction de répartition de Z .
3.
 - a. On note $T = e^Z$.
Déterminer la fonction de répartition de T et montrer que T est une variable à densité.
 - b. En déduire que la fonction h définie sur $\mathbf{R}$ par

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \frac{\ln(t)}{t^2} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

est une densité de la variable aléatoire $\frac{1}{UV}$.