ESC 2007

Exercice 2

Sujet : Étude d'une suite d'intégrales impropres. **Moyen**

Abordable en première année : ✓ **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : intégrales impropres, séries, suites, `Scilab`

Informatique : les questions de `Turbo Pascal` du sujet original ont été traduites en questions de `Scilab`.

On pose pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n}\,dx$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{(1+x^3)^n}\,dx$.

1. Prouver la convergence de l'intégrale impropre appelée I_n.
2. Monter que la suite $(J_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est décroissante et converge vers une limite notée ℓ.
3. On pose, pour tout réel $A > 0$ et tout entier naturel n non nul : $I_n(A) = \displaystyle\int_0^{A} \frac{1}{(1+x^3)^n}\,dx$.

   Par une intégration par parties, montrer que $I_n(A) = \dfrac{A}{(1+A^3)^n} + 3n\,(I_n(A) - I_{n+1}(A))$.
4. Dans cette question on montre que la limite de $(J_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, notée ℓ, est nulle.
   - a. À l'aide de la question 3, montrer que : $\dfrac{J_n}{3n} = \dfrac{1}{3n\cdot 2^n} + (J_n - J_{n+1})$.
   - b. Justifier que les séries de terme général $(J_n - J_{n+1})$ et $\dfrac{1}{3n\cdot 2^n}$ sont convergentes.

     En déduire la nature de la série de terme général $\dfrac{J_n}{3n}$.
   - c. Soit β un réel non nul et (a_n) une suite équivalente à $\left(\dfrac{\beta}{3n}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

     Justifier que la série de terme général a_n diverge et en déduire par l'absurde que $\ell = 0$.
5. a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^n} \leqslant \frac{1}{3n-1}$.
   - b. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
6. a. Grâce à la question 3, montrer que pour tout entier naturel n non nul : $I_{n+1} = \dfrac{3n-1}{3n} I_n$.
   - b. En déduire que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $I_n = I_1 \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \frac{3k-1}{3k}$.
7. On admet que $I_1 = \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

   Compléter le programme `Scilab` suivant pour qu'il demande un entier supérieur à 2 et calcule puis affiche la valeur de I_n trouvée à la question 6.b.

```
n = input(......)
I = ......
for k=1 :n-1
        I = ....
end
disp(I)
```

ESC 2007 : Corrigé

Exercice 2

1. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^3)^n}$ est continue sur $[0,+\infty[$, donc le seul éventuel problème de convergence est au voisinage de $+\infty$.
Mais, au voisinage de $+\infty$, on a $\dfrac{1}{(1+x^3)^n} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{(x^3)^n} = \dfrac{1}{x^{3n}}$.
Puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3n}}$ est une intégrale[1] convergente, par critère de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, il en est de même de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^n}$ et donc de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^n}$.

> **Méthode**
> Commencer systématiquement l'étude d'une intégrale par le domaine de continuité de l'intégrande permet de déterminer quelles bornes nécessiteront une étude plus fine.

[1] De Riemann.

2. Pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbf{N}^*$, on a $1 + x^3 \geqslant 1$ et donc

$$\frac{1}{(1+x^3)^{n+1}} \leqslant \frac{1}{(1+x^3)^n}.$$

> **Rappel**
> Il est important de vérifier que $1 + x^3 \geqslant 1$ car une suite géométrique de la forme $(q^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante si $q \geqslant 1$, mais décroissante si $0 < q < 1$.

Et donc, par croissance de l'intégrale,

$$J_{n+1} = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^3)^{n+1}} \leqslant \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^3)^n} = J_n.$$

Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (J_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \text{ est décroissante.}}$
D'autre part, pour tout $x \in [0,1]$, $\dfrac{1}{(1+x^3)^n} \geqslant 0$, et donc par positivité de l'intégrale, $J_n \geqslant 0$.
Ainsi, la suite $(J_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est décroissante et minorée : par le théorème de la limite monotone, $\boxed{\text{elle converge.}}$

> **Méthode**
> Pour montrer qu'une suite converge alors qu'on ne sait pas calculer sa limite, le plus simple est souvent de prouver qu'elle est croissante et majorée ou décroissante et minorée.

3. Posons $u(x) = \dfrac{1}{(1+x^3)^n}$ et $v(x) = x$, qui sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,A]$, avec $u'(x) = \dfrac{-3nx^2}{(1+x^3)^{n+1}}$ et $v'(x) = 1$. Alors, par intégration par parties,

$$\begin{aligned}
I_n(A) &= \left[\frac{x}{(1+x^3)^n}\right]_0^A + \int_0^A \frac{3nx^3}{(1+x^3)^{n+1}}\,dx \\
&= \frac{A}{(1+A^3)^n} + 3n\int_0^A \frac{(1+x^3)-1}{(1+x^3)^{n+1}}\,dx \\
&= \frac{A}{(1+A^3)^n} + 3n\left(\int_0^A \frac{dx}{(1+x^3)^n}\,dx - \int_0^A \frac{1}{(1+x^3)^{n+1}}\,dx\right) \\
&= \boxed{\frac{A}{(1+A^3)^n} + 3n\left(I_n(A) - I_{n+1}(A)\right).}
\end{aligned}$$

4.a. Dans l'égalité de la question 3, en prenant $A = 1$, il vient

> **Détails**
> Par définition, $J_n = I_n(1)$.

$$J_n = \frac{1}{2^n} + 3n(J_n - J_{n-1}).$$

Et donc après division par $3n$,

$$\boxed{\frac{J_n}{3n} = \frac{1}{3n\cdot 2^n} + (J_n - J_{n+1}).}$$

4.b. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a $0 \leqslant \dfrac{1}{3n\cdot 2^n} \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.
Puisque la série de terme général $\dfrac{1}{2^n}$ est une série[2] convergente, il en est de donc de même

[2] Géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1,1[$.

de la série de terme général $\dfrac{1}{3n\cdot 2^n}$.
D'autre part, pour $N\in\mathbf{N}^*$, on a

$$\sum_{n=1}^{N}(J_n-J_{n+1})=\sum_{n=1}^{N}J_n-\sum_{n=1}^{N}J_{n+1}=\sum_{n=1}^{N}J_n-\sum_{k=2}^{N+1}J_k=J_1-J_{N+1}\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}J_1-\ell.$$

Ainsi, la suite des sommes partielles de la série de terme général (J_n-J_{n+1}) converge, c'est donc que la série converge.

Et donc, $\boxed{\text{la série de terme général } \dfrac{J_n}{3n} \text{ converge}}$ car somme de deux séries convergentes.

Rappel
Par **définition**, une série converge si et seulement si la série de ses sommes partielles converge.

4.c. La série de terme général $\dfrac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente, et donc la série de terme général $\dfrac{\beta}{3n}=\dfrac{\beta}{3}\dfrac{1}{n}$ est également divergente.
Ainsi, par critère de comparaison pour les séries de signe constant[3], la série de terme général a_n diverge.
Supposons par l'absurde que $\ell\neq 0$. Alors, $\dfrac{J_n}{3n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{\ell}{3n}$
Et d'après ce qui précède, la série de terme général $\dfrac{J_n}{3n}$ diverge, contredisant le résultat de la question précédente.
Ainsi, $\boxed{\ell=0.}$

[3] $\dfrac{\beta}{3n}$ est de signe constant, même si son signe dépend de celui de β.

Remarque
Cet équivalent ne serait pas valable pour $\ell=0$, car seule la suite nulle est équivalente à elle-même («on n'est jamais équivalent à 0, sauf si on est complètement nul !»).

5.a. Pour tout $x\geqslant 1$, on a $\dfrac{1}{(1+x^3)^n}\leqslant\dfrac{1}{x^{3n}}$.

Et donc par croissance de l'intégrale, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^3)^n}\leqslant\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{3n}}$.

Mais pour $A\geqslant 1$, on a

$$\int_1^{A}\frac{dx}{x^{3n}}=\left[-\frac{1}{3n-1}\frac{1}{x^{3n-1}}\right]_1^A=\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n-1}\frac{1}{A^{3n-1}}\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{3n-1}.$$

Ainsi, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{3n}}=\frac{1}{3n-1}$ et donc $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^3)^n}\leqslant\frac{1}{3n-1}.}$

Remarque
Si on a appris que pour $\alpha>1$,
$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\frac{1}{\alpha-1},$$
alors il est possible d'utiliser directement cette formule plutôt que de repasser par le calcul de la primitive sur un segment.

5.b. Nous avons donc, d'après la relation de Chasles,

$$0\leqslant I_n\leqslant J_n+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^3)^n}\leqslant J_n+\frac{1}{3n-1}.$$

Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}J_n+\frac{1}{3n-1}=\ell+0=0$, et donc par le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}I_n=0.}$$

6.a. Dans l'égalité de la question 3, faisons tendre A vers $+\infty$ en notant que $I_n=\displaystyle\lim_{A\to+\infty}I_n(A)$. Il vient alors

$$I_n=3n(I_n-I_{n+1})\Leftrightarrow 3nI_{n+1}=(3n-1)I_n\Leftrightarrow\boxed{I_{n+1}=\frac{3n-1}{3n}I_n.}$$

6.b. On a

$$\begin{aligned}I_n&=\frac{3(n-1)-1}{3(n-1)}I_{n-1}\\&=\frac{3(n-1)-1}{3(n-1)}\frac{3(n-2)-1}{3(n-2)}I_{n-2}\\&=\cdots=\frac{3(n-1)-1}{3(n-1)}\frac{3(n-2)-1}{3(n-2)}\cdots\frac{3\times 1-1}{3}I_1\\&=\boxed{I_1\prod_{k=1}^{n-1}\frac{3k-1}{3k}.}\end{aligned}$$