ESC 2007

Exercice 2

Sujet : Étude d'une suite d'intégrales impropres. **Moyen**

Abordable en première année : ✓ **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : intégrales impropres, séries, suites, `Scilab`

Informatique : les questions de `Turbo Pascal` du sujet original ont été traduites en questions de `Scilab`.

On pose pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n}\,dx$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{(1+x^3)^n}\,dx$.

1. Prouver la convergence de l'intégrale impropre appelée I_n.
2. Monter que la suite $(J_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est décroissante et converge vers une limite notée ℓ.
3. On pose, pour tout réel $A > 0$ et tout entier naturel n non nul : $I_n(A) = \displaystyle\int_0^{A} \frac{1}{(1+x^3)^n}\,dx$.

   Par une intégration par parties, montrer que $I_n(A) = \dfrac{A}{(1+A^3)^n} + 3n\,(I_n(A) - I_{n+1}(A))$.
4. Dans cette question on montre que la limite de $(J_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, notée ℓ, est nulle.
   - a. À l'aide de la question 3, montrer que : $\dfrac{J_n}{3n} = \dfrac{1}{3n\cdot 2^n} + (J_n - J_{n+1})$.
   - b. Justifier que les séries de terme général $(J_n - J_{n+1})$ et $\dfrac{1}{3n\cdot 2^n}$ sont convergentes.

     En déduire la nature de la série de terme général $\dfrac{J_n}{3n}$.
   - c. Soit β un réel non nul et (a_n) une suite équivalente à $\left(\dfrac{\beta}{3n}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

     Justifier que la série de terme général a_n diverge et en déduire par l'absurde que $\ell = 0$.
5.
   - a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^n} \leqslant \frac{1}{3n-1}$.
   - b. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
6.
   - a. Grâce à la question 3, montrer que pour tout entier naturel n non nul : $I_{n+1} = \dfrac{3n-1}{3n} I_n$.
   - b. En déduire que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $I_n = I_1 \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \frac{3k-1}{3k}$.
7. On admet que $I_1 = \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

   Compléter le programme `Scilab` suivant pour qu'il demande un entier supérieur à 2 et calcule puis affiche la valeur de I_n trouvée à la question 6.b.

```
n = input(......)
I = ......
for k=1 :n-1
          I = ....
end
disp(I)
```