ESC 2006

Exercice 2

Sujet : Séries de Bertrand, majoration du reste.

Facile

Abordable en première année : ✓ **Intérêt** : ★★★

Thèmes du programme abordés : intégrales impropres, séries numériques, `Scilab`

Informatique : les questions de `Turbo Pascal` du sujet original ont été traduites en questions de `Scilab`.

Modifications apportées au sujet d'origine : ajout d'une question intermédiaire (1.b) pour une comparaison série-intégrale

Commentaires : facile, mais un thème très classique : les comparaisons série/intégrales, (ou comment utiliser une intégrale pour étudier la nature d'une série).

On considère un réel $\alpha > 0$ et la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ définie par $u_n = \dfrac{1}{n\ln(n)^{\alpha+1}}$.

On note, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 : $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} u_k$.

1. Soit f la fonction définie sur $I =]1, \infty[$ par $f(x) = -\dfrac{1}{\alpha\ln(x)^{\alpha}}$.
   - **a.** Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I et calculer sa dérivée f'.
     Montrer que f est concave sur I
   - **b.** Soit k un entier supérieur ou égal à 3. Montrer que : $0 \leqslant u_k \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t\ln(t)^{\alpha+1}}$.
     En déduire que
     $$0 \leqslant S_n \leqslant u_2 + \int_2^n \frac{dt}{t\ln(t)^{\alpha+1}}.$$
   - **c.** Étudier la nature et la valeur éventuelle de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t\ln(t)^{\alpha+1}}$. En déduire la nature de la série de terme général u_n.
   - **d.** Soit un entier $k \geqslant 2$. Montrer que pour tout réel $t \in [k, k+1]$, $u_{k+1} \leqslant f'(t)$.
   - **e.** En déduire que pour tout entier $k \geqslant 2$, $u_{k+1} \leqslant \dfrac{1}{\alpha\ln(k)^{\alpha}} - \dfrac{1}{\alpha\ln(k+1)^{\alpha}}$.

Dans toute la suite, on note $L = \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} u_k$ et pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

2. - **a.** Exprimer R_n à l'aide de L et de S_n.
   - **b.** Soient p et n deux entier tels que $2 \leqslant n < p$.
     Montrer, grâce à 1.e que : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{p} u_k \leqslant \frac{1}{\alpha\ln(n)^{\alpha}} - \frac{1}{\alpha\ln(p)^{\alpha}}$.
   - **c.** En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, : $0 \leqslant L - S_n \leqslant \frac{1}{\alpha\ln(n)^{\alpha}}$.
3. - **a.** Montrer que $\frac{1}{\alpha\ln(n)^{\alpha}} \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow n \geqslant \exp\left((\alpha\varepsilon)^{-\frac{1}{\alpha}}\right)$.
   - **b.** Compléter les pointillés du programme `Scilab` suivant afin que la fonction `approx` prenne comme paramètres deux réels strictement positifs α et ε et retourne un couple `n,S` où n est un entier naturel et $S = S_n$ soit la somme partielle d'ordre n de la série $\sum_{k\geqslant 2} u_k$ tels que l'écart entre S_n et L soit inférieur à ε.
     On rappelle que `floor` *désigne la fonction partie entière.*

```
function (n,S)=approx(alpha,epsilon)
  n = floor(.......)+1 ;
  S = ...... ;
  for k = ......
     ........
  end
endfunction
```

ESC 2006 : Corrigé

Exercice 2

1.a. La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ et ne s'annule pas sur I. Il en est donc de même de la fonction $x \mapsto -\frac{1}{\alpha \ln(x)^\alpha}$. On a alors

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = \frac{\alpha \frac{1}{x} \ln(x)^{\alpha-1}}{\alpha \ln(x)^{2\alpha}} = \boxed{\frac{1}{x \ln(x)^{\alpha+1}}.}$$

Comme la fonction $x \mapsto x\ln(x)^{\alpha+1}$ est croissante, par passage à l'inverse, f' est décroissante. Et donc $\boxed{f \text{ est concave.}}$

Convexité/concavité
On peut dériver deux fois et vérifier que $f'' < 0$. Mais il ne faut pas oublier que si f est dérivable, on sait caractériser la convexité/concavité de f en utilisant le sens de variation de f', ce qui évite le calcul de f''.

1.b. Pour $t \in [k-1, k]$, puisque la fonction f' est décroissante

$$u_k = \frac{1}{k\ln(k)^{\alpha+1}} = f'(k) \leqslant f'(t) = \frac{1}{t\ln(t)^{\alpha+1}}.$$

Cette inégalité vaut pour tout $t \in [k-1, k]$, donc par croissance de l'intégrale,

$$\int_{k-1}^{k} u_k \, dt \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t\ln(t)^{\alpha+1}} \Leftrightarrow \boxed{u_k \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t\ln(t)^{\alpha+1}}.}$$

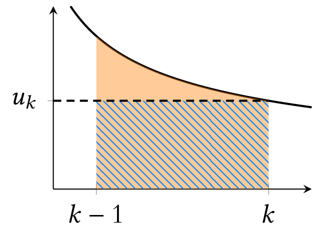

Figure 1– L'intégrale, qui est l'aire de la partie colorée est plus grande que l'aire de la partie hachurée, qui vaut u_k (c'est l'aire d'un rectangle de largeur 1 et de hauteur u_k).

De plus, il est évident que $u_k \geqslant 0$ car $k \geqslant 2$ et donc $\ln(k) > 0$.

Sommons à présent ces inégalités pour k variant de 3 à n :

$$0 \leqslant \sum_{k=3}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t\ln(t)^{\alpha+1}} = \int_{2}^{n} \frac{dt}{t\ln(t)^{\alpha+1}}$$

Relation de Chasles...

En ajoutant $u_2 \geqslant 0$, il vient

$$\boxed{0 \leqslant S_n \leqslant u_2 + \int_{2}^{n} \frac{dt}{t\ln(t)^{\alpha+1}}.}$$

1.c. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln(t)^{\alpha+1}}$ est continue sur $[2, +\infty[$.
De plus, le calcul précédent montre que f en est une primitive. Ainsi, pour $A \geqslant 2$, on a

$$\int_{2}^{A} \frac{dt}{t\ln(t)^{\alpha+1}} = [f(t)]_2^A = \frac{1}{\alpha \ln(2)^\alpha} - \frac{1}{\alpha\ln(A)^\alpha} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\alpha\ln(2)^\alpha}.$$

On en déduit que $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{dt}{t\ln(t)^{\alpha+1}}$ converge et que

$$\boxed{\int_{2}^{+\infty} \frac{dt}{t\ln(t)^{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha\ln(2)^\alpha}.}$$

Soit à présent $n \geqslant 2$. Puisque la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln(t)^{\alpha+1}}$ est positive, on a[1]

$$\int_{2}^{n} \frac{dt}{t\ln(t)^{\alpha+1}} = \int_{2}^{+\infty} \frac{dt}{t\ln(t)^{\alpha+1}} - \underbrace{\int_{n}^{+\infty} \frac{dt}{t\ln(t)^{\alpha+1}}}_{\geqslant 0} \leqslant \int_{2}^{+\infty} \frac{dt}{t\ln(t)^{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha\ln(2)^{\alpha+1}}.$$

Et alors

$$0 \leqslant S_n \leqslant \frac{1}{\alpha\ln(2)^{\alpha+1}}.$$

Mais (u_k) étant une suite à valeurs positives, la suite (S_n) est croissante. Étant croissante et majorée, elle converge. On en déduit[2] que $\boxed{\text{la série } \sum u_k \text{ est convergente.}}$

[1] Il est important que la fonction soit positive, cela permet de garantir que $\displaystyle\int_n^{+\infty} f(t)\,dt \geqslant 0$. On peut aussi réfléchir en terme d'aire : pour une fonction positive, si on intègre sur un domaine plus grand, on obtient une aire plus grande. C'est en revanche faux pour une fonction qui changerait de signe.

[2] La série $\sum u_k$ converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles converge.

Classique
Pour étudier la nature d'une série, on peut parfois se ramener comme ici à étudier une intégrale. L'avantage des intégrales sur les séries est que l'on sait souvent calculer des primitives, et donc des intégrales, alors qu'il est souvent délicat de calculer précisément des sommes partielles. Cette méthode se nomme comparaison série/intégrale.

1.d. Soit $t \in [k, k+1]$. Alors, par croissance de la fonction ln, il vient $0 \leqslant t\ln(t)^\alpha \leqslant (k+1)\ln(k+1)^\alpha$, puis, par passage à l'inverse

$$\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)^\alpha} \leqslant \frac{1}{t\ln(t)^\alpha} \Leftrightarrow \boxed{u_{k+1} \leqslant f'(t).}$$

Précaution

Le passage à l'inverse change le sens des inégalités seulement si les deux termes de départ sont de même signe (c'est la décroissance de la fonction inverse sur $\mathbf{R}_+^*$ et sur $\mathbf{R}_-^*$ mais pas sur $\mathbf{R}$!)

1.e. Soit $k \geqslant 2$. Intégrons l'inégalité obtenue précédemment sur le segment $[k, k+1]$. Alors

$$\int_k^{k+1} u_{k+1}\,dt \leqslant \int_k^{k+1} f'(t)\,dt \Leftrightarrow u_{k+1} \leqslant f(k+1) - f(k).$$

En remplaçant f par l'expression donnée dans l'énoncé, il vient

$$\boxed{\forall k \geqslant 2, \quad u_{k+1} \leqslant \frac{1}{\alpha\ln(k)^\alpha} - \frac{1}{\alpha\ln(k+1)^\alpha}.}$$

2.a. On a

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=2}^{+\infty} u_k - \sum_{k=2}^{n} u_k = \boxed{L - S_n.}$$

2.b. Reformulons le résultat de la question 1.e : nous avons prouvé que pour tout $k \geqslant 3$, on a

$$u_k \leqslant \frac{1}{\alpha\ln(k-1)^\alpha} - \frac{1}{\alpha\ln(k)^\alpha}.$$

En sommant ces relations pour k variant de $n+1$ à p, il vient

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{p} u_k &\leqslant \sum_{k=n+1}^{p}\left(\frac{1}{\alpha\ln(k-1)^\alpha} - \frac{1}{\alpha\ln(k)^\alpha}\right)\\ &\leqslant \frac{1}{\alpha\ln(n)^\alpha} - \frac{1}{\alpha\ln(n+1)^\alpha} + \frac{1}{\alpha\ln(n+1)^\alpha} - \frac{1}{\alpha\ln(n+2)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{\alpha\ln(p-2)^\alpha} - \frac{1}{\alpha\ln(p-1)^\alpha} + \frac{1}{\alpha\ln(p-1)^\alpha} - \frac{1}{\alpha\ln(p)^\alpha}\\ &\leqslant \boxed{\frac{1}{\alpha\ln(n)^\alpha} - \frac{1}{\alpha\ln(p)^\alpha}.}\end{aligned}$$

2.c. Faisons tendre p vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente. Il vient

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant \frac{1}{\alpha\ln(n)^\alpha}.$$

Mais $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = R_n = L - S_n$. De plus, R_n est positif car somme de termes positifs, donc

$$0 \leqslant L - S_n \leqslant \frac{1}{\alpha\ln(n)^\alpha}.$$

3.a. On a évidemment $\dfrac{1}{\alpha\ln(n)^\alpha} \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow \ln(n)^\alpha \geqslant \frac{1}{\alpha\varepsilon}$. Par croissance de la fonction $t \mapsto t^{1/\alpha}$, cette inégalité est équivalente à

$$\frac{1}{(\alpha\varepsilon)^{1/\alpha}} \leqslant \ln(n) \Leftrightarrow (\alpha\varepsilon)^{-\frac{1}{\alpha}} \leqslant \ln(n).$$

Enfin, par croissance de la fonction exponentielle, ceci est équivalent à $\boxed{n \geqslant \exp\left((\alpha\varepsilon)^{-\frac{1}{\alpha}}\right).}$

3.b. Il s'agit d'utiliser les résultats précédents : pour n supérieur ou égal à $\left\lfloor \exp\left((\alpha\varepsilon)^{-1/\alpha}\right)\right\rfloor + 1$, on a $0 \leqslant L - S_n \leqslant \varepsilon$.

Astuce

Le premier entier après un réel x est $\lfloor x \rfloor + 1$.

```
function [n,S]=approx(alpha,epsilon)
  n = floor(exp((alpha*epsilon)^(-1/alpha)))+1 ;
  S = 0 ;
  for k = 2 :n do
    S = S + 1/(k*log(k)^(alpha+1)) ;
  end
endfunction
```

Attention : la commande `Scilab` pour la fonction ln est `log`.