PARTIE I PROPAGATION DETERMINISTE

A Premier modèle de propagation.

(Q1) Pour simplifier l'écriture nous écrirons dans une partie de cette question u_n à la place de $u_n(\Delta)$.

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-u_n = C\Delta(1-u_n)$ ou $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=(1-C\Delta)u_n+C\Delta$. $u_0=\frac{1}{N}$.

$(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite arithmético-géométrique.

Soit $x\in\mathbb{R}$. $x=(1-C\Delta)x+C\Delta \iff x=1 \quad (C\Delta\neq 0)$.

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-1=(1-C\Delta)u_n+C\Delta-[(1-C\Delta)1+C\Delta] = (1-C\Delta)(u_n-1)$.

$(u_n-1)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique de raison $1-C\Delta$ et de premier terme $u_0-1=\frac{1}{N}-1$.

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n-1=(1-C\Delta)^n(u_0-1)=(1-C\Delta)^n\left(\frac{1}{N}-1\right)=-\frac{N-1}{N}(1-C\Delta)^n$

Finalement: $\underline{\forall n\in\mathbb{N},\ u_n(\Delta)=1-\frac{N-1}{N}(1-C\Delta)^n.}$

$0<\Delta<\frac{1}{C}$; $0<\Delta C<1$; $\Delta C\in]0,1[$ donc $1-C\Delta\in]0,1[$ et : $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-C\Delta)^n=0$.

Donc $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(\Delta)=1.}$

(Q2) a) $\left[\frac{t}{\Delta}\right]\leq\frac{t}{\Delta}<\left[\frac{t}{\Delta}\right]+1$ et $\Delta>0$, $\underline{\Delta\left[\frac{t}{\Delta}\right]\leq t<\Delta\left(\left[\frac{t}{\Delta}\right]+1\right).}$

donc $t-\Delta<\Delta\left[\frac{t}{\Delta}\right]\leq t$. Comme $\lim\limits_{\Delta\to 0}(t-\Delta)=t$ il vient par encadrement :

$\underline{\lim\limits_{\Delta\to 0}\left(\Delta\left[\frac{t}{\Delta}\right]\right)=t.}$

$u_{\left[\frac{t}{\Delta}\right]}(\Delta)=1-\frac{N-1}{N}(1-C\Delta)^{\left[\frac{t}{\Delta}\right]}.$

$(1-C\Delta)^{\left[\frac{t}{\Delta}\right]}=e^{\left[\frac{t}{\Delta}\right]\ln(1-C\Delta)} \quad (1-C\Delta>0)$

$\lim\limits_{\Delta\to 0} C\Delta=0$ donc $\left[\frac{t}{\Delta}\right]\ln(1-C\Delta)\underset{\Delta\to 0}{\sim}\left[\frac{t}{\Delta}\right](-C\Delta)=-C\,\Delta\left[\frac{t}{\Delta}\right]\underset{\Delta\to 0}{\sim}-Ct \quad (Ct>0)$.

Ainsi $\lim_{\Delta \to 0} \left(\left[\frac{t}{\Delta}\right] \ln(1-c\Delta) \right) = -ct$; $\lim_{\Delta \to 0} e^{\left[\frac{t}{\Delta}\right]\ln(1-c\Delta)} = e^{-ct}$ ($x \mapsto e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$)

donc $\lim_{\Delta \to 0} u_{\left[\frac{t}{\Delta}\right]} = 1 - \frac{N-1}{N} e^{-ct}$.

(Q3) Posons $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $g(t) = e^{ct} f(t)$. g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$.

$\forall t \in \mathbb{R}_+, f(t) = e^{-ct} g(t)$.

$\forall t \in \mathbb{R}_+$, $c(1-f(t)) = c - ce^{-ct}g(t)$ et $f'(t) = -ce^{-ct}g(t) + e^{-ct}g'(t)$

Or $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $c(1-f(t)) = f'(t)$ donc $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $c - ce^{-ct}g(t) = -ce^{-ct}g(t) + e^{-ct}g'(t)$

Ainsi $\forall t \in \mathbb{R}_+, g'(t) = ce^{ct}$.

$\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $g(t) = e^{ct} + \lambda$.

$\forall t \in \mathbb{R}_+$, $f(t) = e^{-ct}g(t) = 1 + \lambda e^{-ct}$. Or $f(0) = \frac{1}{N}$.

Ainsi $\frac{1}{N} = 1 + \lambda$; $\lambda = \frac{1}{N} - 1 = -\frac{N-1}{N}$.

$\forall t \in \mathbb{R}_+$, $f(t) = 1 - \frac{N-1}{N} e^{-ct}$.

B Deuxième modèle de propagation.

Ici encore pour simplifier nous écrirons assez souvent v_n à la place de $v_n(\Delta)$

(Q1) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \in [\frac{1}{N}, 1[$

- C'est clair pour $n=0$ car $v_0 = 1/N$.
- Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

$c>0$, $\Delta>0$, $v_n>0$ et $1-v_n>0$ donc $v_{n+1} - v_n = c\Delta v_n(1-v_n) > 0$.

Ainsi $v_{n+1} > v_n \geqslant \frac{1}{N}$.

$v_{n+1} - 1 = v_n - 1 + c\Delta v_n(1-v_n) = (1-v_n)(c\Delta v_n - 1) = c\Delta(1-v_n)(v_n - \frac{1}{c\Delta})$

$1 - v_{n+1} = c\Delta(1-v_n)(\frac{1}{c\Delta} - v_n)$. Or $c>0$, $\Delta>0$, $1-v_n>0$ et $\frac{1}{c\Delta} - v_n > 1 - v_n > 0$;

donc $1 - v_{n+1} > 0$. Finalement $v_{n+1} \in [\frac{1}{N}, 1[$. Ceci achève la récurrence.

$\forall n\in\mathbb{N},\quad V_n(\Delta)\in[\frac{1}{N},1[$.

$\forall n\in\mathbb{N},\ V_{n+1}-V_n = c\Delta V_n(1-V_n) > 0$. $(V_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement croissante et est majorée par 1 donc $(V_n)_{n\geqslant 0}$ converge. Soit L sa limite, $L\in[\frac{1}{N},1]$

De plus $L-L = c\Delta L(1-L)$ car $\forall n\in\mathbb{N},\ V_{n+1}-V_n = c\Delta V_n(1-V_n)$

donc $c\Delta L(1-L)=0$ et : $L=1$ car $c>0$, $\Delta>0$ et $L>0$.

Finalement $(V_n(\Delta))_{n\geqslant 1}$ converge vers 1.

Q2 a) • Soit $n\in\mathbb{N}$. $1-V_{n+1} \underset{\text{voir Q1}}{=} c\Delta(1-V_n)\left(\frac{1}{c\Delta}-V_n\right)$.

$\frac{1}{c\Delta}-V_n \leqslant \frac{1}{c\Delta}-\frac{1}{N}$ et $c\Delta(1-V_n)>0$ donc $1-V_{n+1} \leqslant c\Delta(1-V_n)\left(\frac{1}{c\Delta}-\frac{1}{N}\right)=(1-V_n)(1-\frac{c\Delta}{N})$.

$\forall n\in\mathbb{N},\quad 1-V_{n+1}(\Delta) \leqslant (1-V_n(\Delta))(1-\frac{c\Delta}{N})$.

Une récurrence très simple montre alors que $\forall n\in\mathbb{N},\ 1-V_n(\Delta) \leqslant (1-\frac{c\Delta}{N})^n(1-V_0(\Delta))$ car $1-\frac{c\Delta}{N}\geqslant 0$.

Donc $\forall n\in\mathbb{N},\quad 0<1-V_n(\Delta) \leqslant (1-\frac{c\Delta}{N})^n(1-\frac{1}{N})$.

$c\Delta\in]0,1[$; $\frac{c\Delta}{N}\in]0,\frac{1}{N}[\subset]0,1[$; $(1-\frac{c\Delta}{N})\in]0,1[$.

La série de terme général $(1-\frac{c\Delta}{N})^n(1-\frac{1}{N})$ est alors convergente. Les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent alors que la série de terme général $1-V_n(\Delta)$ converge.

b) Soit $n\in\mathbb{N}$. $\ln x_{n+1}-\ln x_n = \ln\frac{x_{n+1}}{x_n} = \ln\left(\frac{1-V_{n+1}}{(1-c\Delta)^{n+1}}\times\frac{(1-c\Delta)^n}{(1-V_n)}\right)$

$$\ln x_{n+1}-\ln x_n = \ln\left(\frac{1-V_{n+1}}{(1-c\Delta)(1-V_n)}\right)=\ln\left(\frac{c\Delta(1-V_n)(\frac{1}{c\Delta}-V_n)}{(1-c\Delta)(1-V_n)}\right)=\ln\left(\frac{1-c\Delta V_n}{1-c\Delta}\right)$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1-c\Delta V_n}{1-c\Delta}\right)=1$ donc $\ln x_{n+1}-\ln x_n=\ln\left(\frac{1-c\Delta V_n}{1-c\Delta}\right)\sim\frac{1-c\Delta V_n}{1-c\Delta}-1=\frac{c\Delta}{1-c\Delta}(1-V_n)$.

$\ln x_{n+1} - \ln x_n \sim \frac{c\Delta}{1-c\Delta}(1-v_n)$ et la série de terme général $\frac{c\Delta}{1-c\Delta}(1-v_n)$ est convergente et "positive", ainsi la série de terme général $\ln x_{n+1} - \ln x_n$ est convergente.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\sum_{k=0}^{n-1}[\ln(x_{k+1}) - \ln(x_k)] = \ln x_n - \ln x_0$

$\lim_{n\to+\infty} \ln x_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}[\ln(x_{k+1}) - \ln x_k] + \ln x_0\right) = A + \ln x_0$

Alors $\lim_{n\to+\infty} x_n = e^{A+\ln x_0} = x_0 e^A$

$x_0 = \frac{1-v_0(\Delta)}{(1-c\Delta)^0} = 1-v_0(\Delta) = \frac{N-1}{N}$; donc $x_0 e^A = \frac{N-1}{N}e^A > 0$; $x_n \sim \frac{N-1}{N}e^A$.

$\frac{1-v_n(\Delta)}{(1-c\Delta)^n} \sim \frac{N-1}{N}e^A$; $1-v_n(\Delta) \underset{n\to+\infty}{\sim} \gamma(1-c\Delta)^n$ avec $\gamma = \frac{N-1}{N}e^A > 0$.

(Q3) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{v_{n+1}}{(1-v_{n+1})(1+c\Delta)^{n+1}} \times \frac{(1-v_n)(1+c\Delta)^n}{v_n} = \frac{v_n + c\Delta v_n(1-v_n)}{v_n} \times \frac{1-v_n}{(1-v_{n+1})(1+c\Delta)}$

Rappelons que : $1-v_{n+1} = (1-v_n)(1-c\Delta v_n)$.

Ainsi $\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{1+c\Delta(1-v_n)}{(1-c\Delta v_n)(1+c\Delta)} = \frac{(1-c\Delta v_n)(1+c\Delta) + (c\Delta v_n)(c\Delta)}{(1-c\Delta v_n)(1+c\Delta)}$.

donc $\frac{y_{n+1}}{y_n} = 1 + \frac{c^2\Delta^2 v_n}{(1+c\Delta)(1-c\Delta v_n)}$. Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{y_{n+1}}{y_n} = 1 + \frac{c^2\Delta^2 v_n(\Delta)}{(1+c\Delta)(1-c\Delta v_n(\Delta))}$.

b) $\ln$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\ln$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln'' x = -\frac{1}{x^2} \leq 0$

Ainsi $\forall (a,x) \in \mathbb{R}_+^{*2}$, $\ln x \leq \ln' a(x-a) + \ln a$ (... la courbe est en dessous de ses tangentes)

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln x \leq \frac{1}{1}(x-1) + \ln 1$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln x \leq x-1$.

Ainsi $\forall u \in]-1,+\infty[$, $\ln(1+u) \leq u$

Montrons par récurrence que : $\forall q \in \mathbb{N}$, $\ln \frac{(N-1)v_q}{(1-v_q)(1+c\Delta)^q} \leq q\frac{c^2\Delta^2}{1-c\Delta}$

Cela revient à prouver que : $\forall q \in \mathbb{N}$, $\ln((N-1)y_q) \leq q \dfrac{c^2\Delta^2}{1-c\Delta}$

$\ln((N-1)y_0) = \ln\left[(N-1)\dfrac{v_0}{(1-v_0)(1+c\Delta)^0}\right] = \ln\left((N-1)\dfrac{1/N}{1-1/N}\right) = \ln 1 = 0 \leq 0 \times \dfrac{c^2\Delta^2}{1-c\Delta}$.

La propriété est donc vraie pour $q=0$. Supposons la vraie pour $q \in \mathbb{N}$ et montrons la pour $q+1$.

$\ln \dfrac{(N-1)y_{q+1}}{(N-1)y_q} = \ln \dfrac{y_{q+1}}{y_q} = \ln\left(1 + \dfrac{c^2\Delta^2 v_q}{(1+c\Delta)(1-c\Delta v_q)}\right) \leq \dfrac{c^2\Delta^2 v_q}{(1+c\Delta)(1-c\Delta v_q)}$.

donc $\ln((N-1)y_{q+1}) - \ln((N-1)y_q) \leq \dfrac{c^2\Delta^2 v_q}{(1+c\Delta)(1-c\Delta v_q)}$.

Ainsi $\ln((N-1)y_{q+1}) \leq \ln((N-1)y_q) + \dfrac{c^2\Delta^2 v_q}{(1+c\Delta)(1-c\Delta v_q)} \overset{H.R.}{\leq} q\dfrac{c^2\Delta^2}{1-c\Delta} + \dfrac{c^2\Delta^2 v_q}{(1+c\Delta)(1-c\Delta v_q)}$.

Ne reste plus alors qu'à prouver que $\dfrac{v_q}{(1+c\Delta)(1-c\Delta v_q)} \leq \dfrac{1}{1-c\Delta}$ pour obtenir alors :

$\ln((N-1)y_{q+1}) \leq q\dfrac{c^2\Delta^2}{1-c\Delta} + \dfrac{c^2\Delta^2}{1-c\Delta} = (q+1)\dfrac{c^2\Delta^2}{1-c\Delta}$ et achever la récurrence.

Or : $0 < v_q < 1$, $0 < \dfrac{1}{1+c\Delta} \leq 1$, $0 < \dfrac{1}{1-c\Delta v_q} \leq \dfrac{1}{1-c\Delta}$ (*)

(* $v_q < 1$; $c\Delta v_q < c\Delta$; $1 - c\Delta v_q > 1 - c\Delta > 0$)

Par produit il vient $\dfrac{v_q}{(1+c\Delta)(1-c\Delta v_q)} \leq \dfrac{1}{1-c\Delta}$ et c'est ce qu'il fallait prouver

pour clore la récurrence.

$$\forall q \in \mathbb{N}, \quad \ln\left(\frac{(N-1)\, v_q(\Delta)}{(1-v_q(\Delta))(1+c\Delta)^q}\right) \leq q\frac{c^2\Delta^2}{1-c\Delta}.$$

c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_n > 0$ et $\dfrac{y_{n+1}}{y_n} = 1 + \dfrac{c^2\Delta^2 v_n(\Delta)}{(1+c\Delta)(1-c\Delta v_n(\Delta))} \geq 1$. Ainsi la suite $(y_n)_{n\geq 0}$ est

croissante ; en particulier : $\forall q \in \mathbb{N}$, $y_q \geq y_0 = \dfrac{1/N}{(1-\frac{1}{N})(1+c\Delta)^0} = \dfrac{1}{N-1}$.

donc $\forall q \in \mathbb{N}$, $(N-1)y_q \geq 1$.

Ainsi : $\forall q \in \mathbb{N},\ 0 \leq \ln((N-1)y_q) = \ln\left(\dfrac{(N-1)v_q}{(1-v_q)(1+c\Delta)^q}\right) \leq q\ \dfrac{c^2\Delta^2}{1-c\Delta}$

ou $\forall q \in \mathbb{N},\ 0 \leq \ln\left(\dfrac{(N-1)\,V_q(\Delta)}{(1-V_q(\Delta))\,(1+C\Delta)^q}\right) \leq q\Delta\ \dfrac{c^2\Delta}{1-c\Delta}$.

Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. $0 \leq \ln\left(\dfrac{(N-1)\,V_{[t/\Delta]}(\Delta)}{(1-V_{[t/\Delta]}(\Delta))(1+C\Delta)^{[t/\Delta]}}\right) \leq \left[\frac{t}{\Delta}\right]\Delta\ \dfrac{c^2\Delta}{1-c\Delta}$.

$\lim\limits_{\Delta\to 0}\left(\left[\frac{t}{\Delta}\right]\Delta\right) = t$ et $\lim\limits_{\Delta\to 0} \dfrac{c^2\Delta}{1-c\Delta} = 0$. Par encadrement on obtient alors :

$\lim\limits_{\Delta\to 0} \ln\left(\dfrac{(N-1)\,V_{[t/\Delta]}(\Delta)}{(1-V_{[t/\Delta]}(\Delta))(1+C\Delta)^{[t/\Delta]}}\right) = 0$ donc $\lim\limits_{\Delta\to 0} \dfrac{(N-1)\,V_{[t/\Delta]}(\Delta)}{(1-V_{[t/\Delta]}(\Delta))(1+C\Delta)^{[t/\Delta]}} \overset{*}{=} 1$

$[t/\Delta]\ln(1+C\Delta) \underset{\Delta\to 0}{\sim} [t/\Delta](C\Delta) \underset{\Delta\to 0}{\sim} Ct$; $\lim\limits_{\Delta\to 0}\left([t/\Delta]\ln(1+C\Delta)\right) = Ct$;

$\lim\limits_{\Delta\to 0}\left(\ln(1+C\Delta)^{[t/\Delta]}\right) = Ct$; $\lim\limits_{\Delta\to 0} (1+C\Delta)^{[t/\Delta]} \overset{**}{=} e^{Ct}$

Par produit de limites, $(* \times **)$ il vient alors $\lim\limits_{\Delta\to 0} \dfrac{(N-1)\,V_{[t/\Delta]}(\Delta)}{1-V_{[t/\Delta]}(\Delta)} = e^{Ct}$

c'est à dire $\lim\limits_{\Delta\to 0}\left(\dfrac{1-V_{[t/\Delta]}(\Delta)}{(N-1)V_{[t/\Delta]}(\Delta)}\right) = e^{-Ct}$

Donc $\lim\limits_{\Delta\to 0}\left[\dfrac{1-V_{[t/\Delta]}(\Delta)}{V_{[t/\Delta]}(\Delta)}\right] = (N-1)e^{-Ct}$, $\lim\limits_{\Delta\to 0}\left[\dfrac{1}{V_{[t/\Delta]}(\Delta)} - 1\right] = (N-1)e^{-Ct}$

$\lim\limits_{\Delta\to 0} \dfrac{1}{V_{[t/\Delta]}(\Delta)} = 1+(N-1)e^{-Ct}$; $\underline{\underline{\lim\limits_{\Delta\to 0} V_{[t/\Delta]}(\Delta) = \dfrac{1}{1+(N-1)e^{-Ct}}}}$.

(Q4) $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ H(t) = \dfrac{1}{\ell(t)}$ et $\ell(t) = \dfrac{1}{H(t)}$.

H est alors dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ 0 = \ell'(t) - c\,\ell(t)(1-\ell(t)) = -\dfrac{H'(t)}{H^2(t)} - C\dfrac{1}{H(t)}\left(1-\dfrac{1}{H(t)}\right)$

Donc $0 = -\dfrac{1}{H^2(t)}\left[H'(t) + C(H(t)-1)\right]$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ H'(t) = C(1-H(t))$ et $H(0) = \dfrac{1}{\ell(0)} = N$.

Un raisonnement analogue à celui de A Q3 montre alors que :

$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ H(t) = 1 - \dfrac{\frac{1}{N}-1}{\frac{1}{N}} e^{-ct} = 1 - (1-N)e^{-ct} = 1+(N-1)e^{-ct}$

Finalement : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ h(t) = \dfrac{1}{1+(N-1)e^{-ct}}$.

Partie II Propagation probabiliste

A Une formule dans le cas discret.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $r \in [\![0, N-1]\!]$.

Notons $A_{n+1,r}$ l'événement à l'instant $(n+1)\Delta$ il reste r personnes non informées.

Notons $A_{n,r}$ (resp. $A_{n,r+1}$) l'événement à l'instant $n\Delta$ il reste r (resp. $r+1$) personnes non informées.

$A_{n+1,r}$ est contenu dans $A_{n,r} \cup A_{n,r+1}$ et $A_{n,r} \cap A_{n,r+1} = \emptyset$.

Ainsi $P(A_{n+1,r}) = P(A_{n+1,r} \cap A_{n,r}) + P(A_{n+1,r} \cap A_{n,r+1})$.

Donc $P(A_{n+1,r}) = P(A_{n+1,r}/A_{n,r})P(A_{n,r}) + P(A_{n+1,r}/A_{n,r+1})P(A_{n,r+1})$.

Ainsi $P_{n+1}(\Delta,r) = (1-\beta\Delta r(N-r))P_n(\Delta,r) + \beta\Delta(r+1)(N-(r+1))P_n(\Delta,r+1)$

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall r \in [\![0,N-1]\!],\ P_{n+1}(\Delta,r) = P_n(\Delta,r)(1-\beta\Delta r(N-r)) + P_n(\Delta,r+1)\beta\Delta(r+1)(N-r-1)$.

B Etude d'un premier cas discret. Ici $N=4$, $\Delta=1$ et $\beta \in]0,\frac{1}{4}[$.

(Q1) $\forall n \in \mathbb{N}, r \in [\![0,3]\!],\ P_{n+1}(1,r) = P_n(1,r)(1-\beta r(4-r)) + P_n(1,r+1)\beta(r+1)(3-r)$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}(1,0) = P_n(1,0) + 3\beta P_n(1,1)$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}(1,1) = (1-3\beta)P_n(1,1) + 4\beta P_n(1,2)$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}(1,2) = (1-4\beta)P_n(1,2) + 3\beta P_n(1,3)$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}(1,3) = (1-3\beta)P_n(1,3)$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{pmatrix} P_{n+1}(1,0) \\ P_{n+1}(1,1) \\ P_{n+1}(1,2) \\ P_{n+1}(1,3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_n(1,0)+3\beta P_n(1,1) \\ (1-3\beta)P_n(1,1)+4\beta P_n(1,2) \\ (1-4\beta)P_n(1,2)+3\beta P_n(1,3) \\ (1-3\beta)P_n(1,3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3\beta & 0 & 0 \\ 0 & 1-3\beta & 4\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1-4\beta & 3\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1-3\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_n(1,0) \\ P_n(1,1) \\ P_n(1,2) \\ P_n(1,3) \end{pmatrix}$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = T U_n$ avec $T = \begin{pmatrix} 1 & 3\beta & 0 & 0 \\ 0 & 1-3\beta & 4\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1-4\beta & 3\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1-3\beta \end{pmatrix}$.

(Q2) a) T est triangulaire supérieure donc les valeurs propres de T sont les éléments de sa diagonale.

Les valeurs propres de T sont 1, $1-3\beta$ et $1-4\beta$. Ces trois valeurs propres sont distinctes car $\beta \neq 0$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

$$TX = X \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3\beta y = x \\ (1-3\beta)y + 4\beta z = y \\ (1-4\beta)z + 3\beta t = z \\ (1-3\beta)t = t \end{cases} \underset{\beta \neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases}. \quad SEP(T,1) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

$$TX = (1-3\beta)X \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3\beta y = (1-3\beta)x \\ (1-3\beta)y + 4\beta z = (1-3\beta)y \\ (1-4\beta)z + 3\beta t = (1-3\beta)z \\ (1-3\beta)t = (1-3\beta)t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\beta(x+y) = 0 \\ 4\beta z = 0 \\ \beta(-z+3t) = 0 \end{cases} \overset{\beta \neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

$$SEP(T, 1-3\beta) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

$$TX = (1-4\beta)X \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3\beta y = (1-4\beta)x \\ (1-3\beta)y + 4\beta z = (1-4\beta)y \\ (1-4\beta)z + 3\beta t = (1-4\beta)z \\ (1-3\beta)t = (1-4\beta)t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta(3y+4x) = 0 \\ \beta(y+4z) = 0 \\ 3\beta t = 0 \\ \beta t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y + 4x = 0 \\ y = -4z \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3z \\ y = -4z \\ t = 0 \end{cases}$$

$$SEP(T, 1-4\beta) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

Remarque.. T n'est pas diagonalisable car la somme des dimensions de ses sous-espaces propres n'est pas 4 ... remarquons-nous elle est triangularisable ...

b) Soit $(y,z,t) \in \mathbb{R}^3$.

$T\begin{pmatrix}0\\y\\z\\t\end{pmatrix} = (1-3\beta)\begin{pmatrix}0\\y\\z\\t\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\beta y = 1 \\ (1-3\beta)y + 4\beta z = (1-3\beta)y - 1 \\ (1-4\beta)z + 3\beta t = (1-3\beta)z \\ (1-3\beta)t = (1-3\beta)t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1/3\beta \\ z = -1/4\beta \\ 3\beta t = \beta z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1/3\beta \\ z = -1/4\beta \\ t = -1/12\beta \end{cases}$

$$\exists ! (y,z,t) \in \mathbb{R}^3,\ T\begin{pmatrix}0\\y\\z\\t\end{pmatrix} = (1-3\beta)\begin{pmatrix}0\\y\\z\\t\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix} : (y,z,t) = \left(\frac{1}{3\beta}, -\frac{1}{4\beta}, -\frac{1}{12\beta}\right).$$

Posons $X_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix}3\\-4\\1\\0\end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $X_4 = \begin{pmatrix}0\\1/3\beta\\-1/4\beta\\-1/12\beta\end{pmatrix}$.

Observons que : $TX_1 = X_1$, $TX_2 = (1-4\beta)X_2$, $TX_3 = (1-3\beta)X_3$, $TX_4 = (1-3\beta)X_4 + X_3$.

Montrons que (X_1, X_2, X_3, X_4) est une base de $M_{4,1}(\mathbb{R})$.

Comme cette famille a quatre vecteurs et que $M_{4,1}(\mathbb{R})$ est de dimension 4 il suffit de prouver qu'elle libre. Soit donc $(\hat\alpha, \hat\beta, \hat\gamma, \hat\delta)$ dans $\mathbb{R}^4$ tel que $\hat\alpha X_1 + \hat\beta X_2 + \hat\gamma X_3 + \hat\delta X_4 = 0$

$\hat\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \hat\beta\begin{pmatrix}3\\-4\\1\\0\end{pmatrix} + \hat\gamma\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix} + \hat\delta\begin{pmatrix}0\\1/3\beta\\-1/4\beta\\-1/12\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$; $\begin{cases} \hat\alpha + 3\hat\beta + \hat\gamma = 0 \\ -4\hat\beta - \hat\gamma + \frac{1}{3\beta}\hat\delta = 0 \\ \hat\beta - \frac{1}{4\beta}\hat\delta = 0 \\ -\frac{1}{12\beta}\hat\delta = 0 \end{cases}$

Il vient alors sans difficulté : $\hat\delta = 0$, $\hat\beta = 0$, $\hat\gamma = 0$ et $\hat\alpha = 0$

Ceci achève de prouver que $\mathcal{B}' = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ est une base de $M_{4,1}(\mathbb{R})$

Notons P la matrice de passage de la base canonique de $M_{4,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{B}'$.

Alors . $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 1/(3\beta) \\ 0 & 1 & 0 & -1/(4\beta) \\ 0 & 0 & 0 & -1/(12\beta) \end{pmatrix}$

et $P^{-1}TP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-4\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-3\beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-3\beta \end{pmatrix}$ car $TX_1 = X_1$, $TX_2 = (1-4\beta)X_2$, $TX_3 = (1-3\beta)X_3$ et $TX_4 = X_3 + (1-3\beta)X_4$

Si $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-4\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-3\beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-3\beta \end{pmatrix}$; il existe une matrice inversible P de $M_4(\mathbb{R})$ telle que : $S = P^{-1}TP$ ou $T = PSP^{-1}$.

On peut prendre $P=\begin{pmatrix}1&3&1&0\\0&-4&-1&1/(3\beta)\\0&1&0&-1/(4\beta)\\0&0&0&-1/(12\beta)\end{pmatrix}$ on a alors : $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&1&-3\\0&-1&-4&8\\0&0&0&-12\beta\end{pmatrix}$

d) Posons un instant : $a=1-4\beta$ et $b=1-3\beta$. On a alors $S=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&a&0&0\\0&0&b&1\\0&0&0&b\end{pmatrix}$.

$$S^2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&a&0&0\\0&0&b&1\\0&0&0&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&a&0&0\\0&0&b&1\\0&0&0&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&a^2&0&0\\0&0&b^2&2b\\0&0&0&b^2\end{pmatrix}$$

$$S^3=SS^2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&a&0&0\\0&0&b&1\\0&0&0&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&a^2&0&0\\0&0&b^2&2b\\0&0&0&b^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&a^3&0&0\\0&0&b^3&3b^2\\0&0&0&b^3\end{pmatrix}.$$

Montrons alors par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $S^n=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&a^n&0&0\\0&0&b^n&nb^{n-1}\\0&0&0&b^n\end{pmatrix}$

→ L'égalité vaut pour $n=1$ (et même pour $n=0$).

→ Supposons la vraie pour $n\in\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$.

$$S^{n+1}=SS^n=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&a&0&0\\0&0&b&1\\0&0&0&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&a^n&0&0\\0&0&b^n&nb^{n-1}\\0&0&0&b^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&a^{n+1}&0&0\\0&0&b^{n+1}&nb^n+b^n\\0&0&0&b^{n+1}\end{pmatrix}$$ ... ce qui achève la récurrence.

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad S^n=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&(1-4\beta)^n&0&0\\0&0&(1-3\beta)^n&n(1-3\beta)^{n-1}\\0&0&0&(1-3\beta)^n\end{pmatrix}$$

Q3 $|1-4\beta|<1$, $|1-3\beta|<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-4\beta)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}(1-3\beta)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}n(1-3\beta)^{n-1}=0$

Ainsi la suite $(S^n)_{n\geq 0}$ converge vers $S_\infty=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

Donc $(PS^n)_{n\geq0}$ converge vers PS_∞ et $(PS^nP^{-1})_{n\geq0}$ converge vers $PS_\infty P^{-1}$

Or $\forall n\in\mathbb{N}$, $T^n=(PSP^{-1})^n=PS^nP^{-1}$.

Ainsi $(T^n)_{n\geq0}$ converge vers $T_\infty=PS_\infty P^{-1}$

Posons $T_\infty=(t_{ij})$, $P=(p_{ij})$, $S_\infty=(s_{ij})$ et $P^{-1}=(q_{ij})$. $s_{ij}=\begin{cases}1 & \text{si } i=j=1\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$

$$\forall (i,j)\in[\![1,4]\!]^2,\ t_{ij}=\sum_{k=1}^4 p_{ik}\left(\sum_{l=1}^4 s_{kl}q_{lj}\right)=\sum_{k=1}^4 p_{ik}s_{k1}q_{1j}=p_{i1}q_{1j}$$

$\forall i\in[\![2,4]\!]$, $\forall j\in[\![1,4]\!]$, $t_{ij}=0$ car $p_{21}=p_{31}=p_{41}=0$.

Ainsi les lignes 2, 3 et 4 de T_∞ sont nulles.

donc $\exists (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, $T_\infty = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$(T^n)_{n\geq 0}$ est convergente et sa limite T_∞ est de la forme $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Q4 $LT = (1,1,1,1)\begin{pmatrix} 1 & 3\beta & 0 & 0 \\ 0 & 1-3\beta & 4\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1-4\beta & 3\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1-3\beta \end{pmatrix} = (1,1,1,1) = L$.

Une récurrence simple donne alors : $\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ LT^n = L}}$.

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall j \in [\![1,4]\!]$, $\sum_{i=1}^{4} (T^n)_{ij} = 1$. En passant à la limite on obtient :

$\forall j \in [\![1,4]\!]$, $\sum_{i=1}^{4} (T_\infty)_{ij} = 1$. $\forall j \in [\![1,4]\!]$, $(T_\infty)_{1j} + (T_\infty)_{2j} + (T_\infty)_{3j} + (T_\infty)_{4j} = 1$.

Rappelons que $(T_\infty)_{ij} = 0$ si $i \in [\![2,4]\!]$ et $j \in [\![1,4]\!]$.

Ainsi $\forall j \in [\![1,4]\!]$, $(T_\infty)_{1j} = 1$.

Finalement $\underline{\underline{T_\infty = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}}$.

Q5 $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = TU_n$. Une récurrence simple donne : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = T^n U_0$

Or $U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall i \in [\![1,4]\!]$, $(U_n)_i = \sum_{j=1}^{4} (T^n)_{ij} (U_0)_j = (T^n)_{i,4}$

or $\lim_{n\to+\infty} (T^n)_{i,4} = (T_\infty)_{i,4}$. Ainsi $\forall i \in [\![1,4]\!]$, $\lim_{n\to+\infty} P_n(1,i-1) = \lim_{n\to+\infty} (U_n)_i = (T_\infty)_{i,4}$

$\underline{\underline{\text{donc } \lim_{n\to+\infty} P_n(1,0) = 1,\ \lim_{n\to+\infty} P_n(1,1) = \lim_{n\to+\infty} P_n(1,2) = \lim_{n\to+\infty} P_n(1,3) = 0}}$

Rien de surprenant non ?

C Etude du cas discret général.

Q1 d'après A) $\forall n\in\mathbb{N}, \forall r\in [\![0,N-1]\!], P_{n+1}(\Delta,r)=P_n(\Delta,r)(1-\beta\Delta r(N-r))+P_n(\Delta,r+1)\beta\Delta(r+1)(N-r-1)$

Posons $\forall r\in [\![0,N-1]\!], a_r=\beta\Delta r(N-r)$

Alors $\forall n\in\mathbb{N}, \forall r\in [\![0,N-2]\!], P_{n+1}(\Delta,r)=(1-a_r)P_n(\Delta,r)+a_{r+1}P_n(\Delta,r+1)$

$\forall n\in\mathbb{N}, \quad P_{n+1}(\Delta,N-1)=(1-a_{N-1})P_n(\Delta,N-1)+0=(1-a_{N-1})P_n(\Delta,N-1)$. Par conséquent :

$$W_{n+1}=\begin{pmatrix}P_{n+1}(\Delta,0)\\ P_{n+1}(\Delta,1)\\ \vdots\\ P_{n+1}(\Delta,N-2)\\ P_{n+1}(\Delta,N-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1-a_0)P_n(\Delta,0)+a_1P_n(\Delta,1)\\ (1-a_1)P_n(\Delta,1)+a_2P_n(\Delta,2)\\ \vdots\\ (1-a_{N-2})P_n(\Delta,N-2)+a_{N-1}P_n(\Delta,N-1)\\ (1-a_{N-1})P_n(\Delta,N-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-a_0 & a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1-a_1 & a_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & & \ddots & 1-a_{N-2} & a_{N-1}\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1-a_{N-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_n(\Delta,0)\\ P_n(\Delta,1)\\ \vdots\\ P_n(\Delta,N-2)\\ P_n(\Delta,N-1)\end{pmatrix}$$

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N}, W_{n+1}=RW_n$ avec $R=\begin{pmatrix}1-a_0 & a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1-a_1 & a_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & & \ddots & 1-a_{N-2} & a_{N-1}\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1-a_{N-1}\end{pmatrix}$

et $\forall r\in [\![0,N-1]\!], a_r=\beta\Delta r(N-r)$

Q2 a)

```
procedure calcul1(var V:vecteur);

var k:integer;  rho:real;

begin
rho:=Delta*Beta;

for k:=1 to N-1 do
V[k]:=(1-rho*(k-1)*(N-k+1))*V[k]+rho*k*(N-k)*V[k+1];

V[N]:=(1-rho*(N-1))*V[N];

end;
```

b)

```
procedure calcul2(var V:vecteur;i:integer);

var k:integer;

begin
for k:=1 to i do calcul1(V);
end;
```

(*)

(*) Pour moi c'est l'utilisateur qui initialise... soit le programme principal.

```
program HEC_99_MI;

uses crt;

const Beta=0.24;
      N=4;
      Delta=1;

Type vecteur=array[1..N] of real;

procédure calcul1 (var v:vecteur);
        ...
procédure calcul2 (...);
        ...

var i,k:integer;V:vecteur;

begin
clrscr;
write('Donner le nombre i d''itérations. i=');readln(i);

V[N]:=1;for k:=1 to N-1 do V[k]:=0;
calcul2(V,i);
writeln;
for k:=1 to N do
writeln('P(Delta,',k-1,')=',V[k]);

end.
```

← Le programme principal.

```
Donner le nombre i d'itérations. i=10
P10(Delta,0)= 9.9971903620E-01
P10(Delta,1)= 2.6911591958E-04
P10(Delta,2)= 8.8859029696E-06
P10(Delta,3)= 2.9619676670E-06

Donner le nombre i d'itérations. i=20
P20(Delta,0)= 9.9999999825E-01
P20(Delta,1)= 1.6995043337E-09
P20(Delta,2)= 2.6319757381E-11
P20(Delta,3)= 8.7732524604E-12

Donner le nombre i d'itérations. i=50
P50(Delta,0)= 9.9999999998E-01
P50(Delta,1)= 1.1451236747E-25
P50(Delta,2)= 6.8394758730E-28
P50(Delta,3)= 2.2798252910E-28
```

(Q3) Rappelons que : $\forall n\in\mathbb{N},\ P_{n+1}(\Delta, N-1) = (1-a_{N-1})\,P_n(\Delta,N-1)$.

$(P_n(\Delta,N-1))_{n\geq 0}$ est une suite géométrique de raison $1-a_{N-1} = 1-\beta\Delta(N-1)(N-(N-1)) = \rho$ et de premier terme $P_0(\Delta,N-1)=1$.

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N},\ \underline{\underline{P_n(\Delta,r) = \rho^n}}$.

(Q4) a) Observons. $v_1 \leq a v_0 + b$

$v_2 \leq a v_1 + bq \leq a^2 v_0 + ab + bq = a^2 v_0 + b(a+q)$

$v_3 \leq a v_2 + bq^2 \leq a^3 v_0 + b(a^2+aq) + bq^2 = a^3 v_0 + b(a^2+aq+q^2)$.

$v_4 \leq a v_3 + bq^3 \leq a^4 v_0 + b(a^3+a^2q+aq^2+q^3)$.

Il semble donc que : $v_n \leq a^n v_0 + b(a^{n-1}+a^{n-2}q+\dots+aq^{n-2}+q^{n-1})$

Ou encore : $v_n \leq a^n v_0 + b\dfrac{q^n-a^n}{q-a} = a^n v_0 + \dfrac{b}{q-a}(q^n-a^n)$.

Posons alors $A = \max\left(v_0, \dfrac{b}{q-a}\right)$.

Alors $v_n \leq a^n A + A(q^n-a^n) = Aq^n$ car $q^n-a^n\geq 0$ ... confirmons par récurrence !

Posons $A = \max\left(v_0, \frac{b}{q-a}\right)$ et montrons que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leq A q^n$.

→ C'est clair pour $n=0$.

→ Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

$v_{n+1} \leq a v_n + b q^n \leq a A q^n + b q^n = (aA+b) q^n \underset{\uparrow}{\leq} (aA + A(q-a)) q^n = A q^{n+1}$.

Ceci achève la récurrence. $\qquad q^n \geq 0$ et $A \geq \frac{b}{q-a}$ donc $b \leq A(q-a)$.

$\underline{\underline{\exists A \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leq A q^n.}}$

b) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = a u_n + b q^n$; $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{a^{n+1}} = \frac{u_n}{a^n} + \frac{b}{a}\left(\frac{q}{a}\right)^n$.

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{\ell=0}^{n-1}\left(\frac{u_{\ell+1}}{a^{\ell+1}} - \frac{u_\ell}{a^\ell}\right) = \frac{b}{a}\sum_{\ell=0}^{n-1}\left(\frac{q}{a}\right)^\ell \underset{\frac{q}{a}\neq 1}{=} \frac{b}{a}\ \frac{1-\left(\frac{q}{a}\right)^n}{1-\left(\frac{q}{a}\right)}$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{u_n}{a^n} - \frac{u_0}{a^0} = \frac{b}{a}\ \frac{1-\left(\frac{q}{a}\right)^n}{1-\left(\frac{q}{a}\right)}$. Notons que ceci vaut encore pour $n=0$

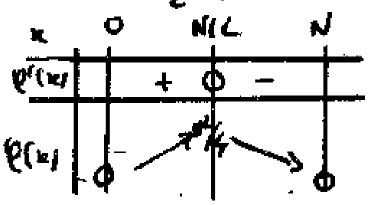
On a alors $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_n}{a^n} = \frac{b}{a-q}\left(1-\left(\frac{q}{a}\right)^n\right) + u_0$; $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{b}{a-q}(a^n - q^n) + u_0 a^n$.

$\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{b}{a-q}(a^n - q^n) + u_0 a^n.}}$ Remarque : si $q = a \neq 0$ on obtient :

$\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n b q^{n-1} + u_0 q^n.}$

c) Posons $\forall x \in [0,N],\ \varphi(x) = x(N-x)$. φ est dérivable sur $[0,N]$ et $\forall x \in [0,N],\ \varphi'(x) = N - 2x$

$\forall x \in [0, \frac{N}{2}],\ \varphi'(x) \geq 0$ et $\forall x \in [\frac{N}{2}, N],\ \varphi'(x) \leq 0$.



$\varphi(N/2) = \frac{N^2}{4}$.

(Q5) $\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}(\Delta, N-2) = (1 - a_{N-2})\, P_n(\Delta, N-2) + a_{N-1}\, P_n(\Delta, N-1)$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}(\Delta, N-2) = (1 - a_{N-2})\, P_n(\Delta, N-2) + a_{N-1}\, \delta^n$.

Pour utiliser b) prouvons que : $1 - a_{N-2} \neq 0$ et que : $1 - a_{N-2} \neq \delta$

Notons que $a_{N-2} = \beta\Delta\, 2(N-2) \leq \beta\Delta \frac{N^2}{4} < 1$ car $0 < \Delta < \frac{4}{\beta N^2}$.
Ainsi $1 - a_{N-2} \neq 0$.

$\rho - (1 - a_{N-2}) = 1 - \beta\Delta(N-1) - 1 + \beta\Delta\, 2(N-2) = \beta\Delta(2N - 4 - N + 1) = \beta\Delta(N-3) \neq 0$.

Donc $1 - a_{N-2} \neq \rho$. Ainsi en appliquant b) (avec $a = 1 - a_{N-2}$, $q = \rho$ et $b = a_{N-1}$) on obtient :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n(\Delta, N-2) = \dfrac{a_{N-1}}{1 - a_{N-2} - \rho}\left((1 - a_{N-2})^n - \rho^n\right) + \underbrace{P_0(\Delta, N-2)}_{=0}(1 - a_{N-2})^n$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n(\Delta, N-2) = \dfrac{\beta\Delta(N-1)}{-\beta\Delta(N-3)}\left((1 - 2\beta\Delta(N-2))^n - \rho^n\right)$

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad P_n(\Delta, N-2) = \frac{N-1}{N-3}\left[(1 - \beta\Delta(N-1))^n - (1 - 2\beta\Delta(N-2))^n\right]$$

Q6) Montrons à l'aide d'une récurrence descendante que :

$\forall r \in [\![2, N-1]\!]$, $\exists A_r \in \mathbb{R}_+$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n(\Delta, r) \leq A_r \rho^n$.

- Pour $r = N-1$ remarquons que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n(\Delta, r) = P_n(\Delta, N-1) = \rho^n = 1 \times \rho^n \leq 1 \times \rho^n$
  En posant $A_{N-1} = 1$ on a bien $A_{N-1} \geq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n(\Delta, N-1) \leq A_{N-1}\rho^n$.
  La propriété est vraie pour $r = N-1$.
- Supposons la propriété vraie pour $r \in [\![3, N-1]\!]$ et montrons la pour $r-1$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1}(\Delta, r-1) = P_n(\Delta, r-1)(1 - a_{r-1}) + P_n(\Delta, r)\, a_r$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1}(\Delta, r-1) \leq (1 - a_{r-1}) P_n(\Delta, r-1) + a_r A_r \rho^n$ d'après l'hypothèse de récurrence ($a_r \geq 0$ ...). Appliquons alors Q4 a) en posant

$a = 1 - a_{r-1}$, $b = a_r A_r$ et $q = \rho$.

D'abord $a_{r-1} = \beta\Delta\, p(r-1) \leq \beta\Delta \frac{N^2}{4} < 1$; $1 - a_{r-1} > 0$; $a > 0$.

$q - a = \rho - 1 + a_{r-1} = 1 - \beta\Delta(N-1) - 1 + \beta\Delta(r-1)(N-(r-1)) = \beta\Delta\left[-(r-1)^2 + N(r-1) - (N-1)\right]$

$q - a = \beta\Delta\left[-\left(r - 1 - \frac{N}{2}\right)^2 + \frac{N^2}{4} - N + 1\right] = \beta\Delta\left[\left(\frac{N-2}{2}\right)^2 - \left(r - 1 - \frac{N}{2}\right)^2\right] = \beta\Delta\left(\frac{N-2}{2} + r - 1 - \frac{N}{2}\right)\left(\frac{N-2}{2} - r + 1 + \frac{N}{2}\right)$

$q - a = \beta\Delta(r-2)(N-r) > 0 \quad (r \in [\![3, N-1]\!])$

On peut donc appliquer Q 4 a) ; il existe $A_{r-1} \in \mathbb{R}$ tel que :

$\forall n \in \mathbb{N},\ P_n(\Delta, r-1) \leq A_{r-1} \rho^n$.

$A_{r-1} = A_{r-1} \rho^0 \geq P_0(\Delta, r-1) \geq 0$.

Ainsi $\exists A_{r-1} \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \in \mathbb{N},\ P_n(\Delta, r-1) \leq A_{r-1} \rho^n$.

Ceci achève la récurrence.

$\forall r \in [\![2, N-1]\!],\ \exists A_r \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \in \mathbb{N},\ P_n(\Delta, r) \leq A_r \rho^n$.

Q7 a) $\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}(\Delta, 0) = P_n(\Delta, 0)(1 - \beta \times 0 \times (N-0)) + P_n(\Delta, 1)\beta\Delta 1 (N-1)$

$\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}(\Delta, 0) - P_n(\Delta, 0) = P_n(\Delta, 1)\beta\Delta(N-1) \geq 0$.

$(P_n(\Delta, 0))_{n \geq 0}$ est donc croissante et majorée par 1.

$(P_n(\Delta, 0))_{n \geq 0}$ converge.

D'après ce qui précède : $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n(\Delta, 1) = \dfrac{P_{n+1}(\Delta, 0) - P_n(\Delta, 0)}{\beta\Delta(N-1)}$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} (P_{n+1}(\Delta, 0) - P_n(\Delta, 0)) = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n(\Delta, 1) = 0$.

Soit $r \in [\![2, N-1]\!]$, $\exists A_r \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \in \mathbb{N},\ P_n(\Delta, r) \leq A_r \rho^n$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq P_n(\Delta, r) \leq A_r \rho^n$.

$\rho = 1 - \beta\Delta(N-1)$. $\quad 0 < \beta\Delta(N-1) < \frac{4}{N^2}(N-1) = 1 - \left(1 - \frac{4N-4}{N^2}\right) = 1 - \left(\frac{N-2}{N}\right)^2 < 1$

donc $0 < 1 - \rho < 1$; $0 < \rho < 1$.

On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} A_r \rho^n = 0$ et il vient alors par encadrement : $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n(\Delta, r) = 0$.

$\forall r \in [\![2, N-1]\!],\ \lim\limits_{n \to +\infty} P_n(\Delta, r) = 0$

Finalement $\forall r \in [\![1, N-1]\!],\ \lim\limits_{n \to +\infty} P_n(\Delta, r) = 0$

$\sum\limits_{r=0}^{N-1} P_n(\Delta, r) = 1$ donc $P_n(\Delta, 0) = 1 - \sum\limits_{r=1}^{N-1} P_n(\Delta, r)$; ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n(\Delta, 0) = 1$.

(Q8) $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n(\Delta, N-1) = \rho^n = (1-\beta\Delta(N-1))^n$.

donc $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $P_{[t/\Delta]}(\Delta, N-1) = (1-\beta\Delta(N-1))^{[t/\Delta]} = e^{[t/\Delta]\ln(1-\beta\Delta(N-1))}$.

Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. $[t/\Delta]\ln(1-\beta\Delta(N-1)) \underset{\Delta \mapsto 0}{\sim} [t/\Delta](-\beta\Delta(N-1)) = \Delta[t/\Delta](-\beta(N-1))$.

Rappelons que $\lim\limits_{\Delta \mapsto 0} \Delta[t/\Delta] = t$. Ainsi $\lim\limits_{\Delta \mapsto 0}\left([t/\Delta]\ln(1-\beta\Delta(N-1))\right) = -\beta(N-1)t$

donc pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{\Delta \mapsto 0} P_{[t/\Delta]}(\Delta, N-1) = e^{-\beta(N-1)t}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n(\Delta, N-2) = \frac{N-1}{N-3}\left[(1-\beta\Delta(N-1))^n - (1-2\beta\Delta(N-2))^n\right] = \frac{N-1}{N-3}\left[e^{n\ln(1-\beta\Delta(N-1))} - e^{n\ln(1-2\beta\Delta(N-2))}\right]$

Ainsi $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $P_{[t/\Delta]}(\Delta, N-2) = \frac{N-1}{N-3}\left[e^{[t/\Delta]\ln(1-\beta\Delta(N-1))} - e^{[t/\Delta]\ln(1-2\beta\Delta(N-2))}\right]$

Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$

Nous avons vu que $\lim\limits_{\Delta \mapsto 0} e^{[t/\Delta]\ln(1-\beta\Delta(N-1))} = e^{-\beta(N-1)t}$, on montre de la même manière que : $\lim\limits_{\Delta \mapsto 0} e^{[t/\Delta]\ln(1-2\beta\Delta(N-2))} = e^{-2\beta(N-2)t}$.

Finalement pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{\Delta \mapsto 0} P_{[t/\Delta]}(\Delta, N-2) = \frac{N-1}{N-3}\left[e^{-\beta(N-1)t} - e^{-2\beta(N-2)t}\right]$

D Etude du cas continu

Q1 $u : t \mapsto e^{at} f(t)$ est dérivable sur I comme produit de deux fonctions dérivables sur I.

$\forall t \in I,\ u'(t) = a e^{at} f(t) + e^{at} f'(t) = e^{at}[a f(t) + f'(t)] = e^{at} b e^{-qt} = b e^{(a-q)t}$

Ainsi $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall t \in I,\ u(t) = \dfrac{b}{a-q} e^{(a-q)t} + \lambda$.

Donc $\forall t \in I,\ e^{at} f(t) = \dfrac{b}{a-q} e^{at} e^{-qt} + \lambda$; $\forall t \in I,\ f(t) = \dfrac{b}{a-q} e^{-qt} + \lambda e^{-at}$.

$\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall t \in I,\ f(t) = \lambda e^{-at} + \dfrac{b}{a-q} e^{-qt}$.

Q2 $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ F'_{N-1}(t) = \beta((N-1)+1)(N-1-(N-1)) F_N(t) - \beta(N-1)(N-(N-1)) F_{N-1}(t)$

$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ F'_{N-1}(t) = -\beta(N-1) F_{N-1}(t)$.

Nous pouvons alors appliquer Q1 avec $I = \mathbb{R}^+$, $a = \beta(N-1)$, $b = 0$ et $q \in \mathbb{R} - \{a\}$!

On obtient alors l'existence d'une constante λ_{N-1} telle que :

$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ F_{N-1}(t) = \lambda_{N-1} e^{-\beta(N-1)t}$. Or $F_{N-1}(0) = 1$ donc $\lambda_{N-1} = 1$.

Finalement : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ F_{N-1}(t) = e^{-\beta(N-1)t}$.

$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ F'_{N-2}(t) = \beta(N-1)(N-1-(N-2)) F_{N-1}(t) - \beta(N-2)(N-(N-2)) F_{N-2}(t) = \beta(N-1) e^{-\beta(N-1)t} - 2\beta(N-2) F_{N-2}(t)$

Nous pouvons alors appliquer Q1 à F_{N-2} avec $I = \mathbb{R}^+$, $a = 2\beta(N-2)$, $b = \beta(N-1)$ et $q = \beta(N-1)$

car $a \neq q$ ($a = q \Rightarrow 2\beta(N-2) = \beta(N-1) \Rightarrow N = 3$!).

On obtient alors l'existence de λ_{N-2} élément de $\mathbb{R}$ tel que :

$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ F_{N-2}(t) = \lambda_{N-2} e^{-2\beta(N-2)t} + \dfrac{\beta(N-1)}{2\beta(N-2) - \beta(N-1)} e^{-\beta(N-1)t}$.

Or $F_{N-2}(0) = 0$ donc $\lambda_{N-2} = -\dfrac{\beta(N-1)}{\beta(2N-4-N+1)} = -\dfrac{\beta(N-1)}{\beta(N-3)} = -\dfrac{N-1}{N-3}$

Finalement : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ F_{N-2}(t) = \dfrac{N-1}{N-3}\left(e^{-\beta(N-1)t} - e^{-2\beta(N-2)t}\right)$.