CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

Mercredi 6 Mai 1998, de 8 h à 12 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Ce problème a pour objet l'étude du nombre de fois où, dans une recherche séquentielle du maximum de n entiers distincts deux à deux, celui-ci est amené à changer de valeur au cours de l'exécution de l'algorithme; ce dernier est explicitement défini dans la partie II.

Notations.

Pour tout entier naturel n non nul on notera par I_n l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites numériques, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ signifiera que u_n est équivalent à v_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie I. Quelques résultats préliminaires.

Les parties A et B sont indépendantes l'une de l'autre, leurs résultats seront utilisés dans la suite du problème.

A

Dans cette partie n désigne un entier naturel.

1) a) Vérifier rapidement que l'application φ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même définie par :
$$\forall P(X) \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi(P(X)) = P(X+1)$$
est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Déterminer la matrice M de φ dans la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Déterminer M^{-1}.

2) On suppose que $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_0, b_1, \ldots, b_n)$ appartiennent à $\mathbb{R}^{n+1}$ et vérifient :
$$\forall p \in \{0, \ldots, n\},\ b_p = \sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_p^k a_k$$

a) Trouver un lien entre les deux matrices lignes $(a_0 \quad a_1 \quad \ldots \quad a_n)$, $(b_0 \quad b_1 \quad \ldots \quad b_n)$ et M.

b) En déduire, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, l'expression de a_k en fonction des nombres $b_0, \ldots, b_k$.

B

Dans cette sous-partie $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ désigne une suite numérique réelle et g une fonction positive, continue sur $[1,+\infty[$, décroissante sur un intervalle $[c,+\infty[$ inclus dans $[1,+\infty[$ telles que $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ soit divergente et $w_{n+1}-w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} g(n)$.

1) On suppose que q et N sont deux entiers naturels tels que $c \leqslant q < N$.

   a) Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant q$, on a : $g(n+1) \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant g(n)$.

   b) En déduire : $\displaystyle\int_q^N g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=q}^{N-1} g(n) \leqslant \int_q^N g(t)\,\mathrm{d}t + g(q)$.

2) On considère un réel ε tel que $0<\varepsilon<1$.

   a) Montrer qu'il existe un entier naturel $q \geqslant c$ tel que $(1-\varepsilon)g(n) \leqslant w_{n+1}-w_n \leqslant (1+\varepsilon)g(n)$ dès que $n \geqslant q$.

   b) En déduire que, pour tout entier $N>q$:

$$(1-\varepsilon)\int_1^N g(t)\,\mathrm{d}t - (1-\varepsilon)\int_1^q g(t)\,\mathrm{d}t + w_q \leqslant w_N \leqslant (1+\varepsilon)\int_1^N g(t)\,\mathrm{d}t + (1+\varepsilon)g(q) + w_q$$

3) Montrer que : $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \displaystyle\int_1^n g(t)\,\mathrm{d}t$.

4) En utilisant ce qui vient d'être prouvé, montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

Partie II. Etude d'un algorithme.

Dans cette partie n désignera un entier naturel non nul.
On suppose que dans le préambule d'un programme écrit en Turbo-Pascal on a défini :

1) une constante entière $\mathtt{C} \geqslant 2$.
2) un type `tableau=array[1..C] of integer ;`

L'introduction de la constante `C` n'étant faite que pour pouvoir définir le type `tableau`, on pourra la considérer aussi grande que l'on veut.
On considère alors la procédure suivante.

```
procedure Recherche(n :integer ; t :tableau ; var max :integer) ;
     var i :integer ;
          begin
               max :=t[1] ;
               for i :=2 to n do
                         begin
                         if t[i]>max then max :=t[i] ;
                         end ;
          end ;
```

1) Quel sera le contenu de la variable `max` après l'appel dans le programme principal de `Recherche(10,t,max)` ?

2) On considère n entiers distincts deux à deux et on suppose que ces nombres sont affectés aux n premières “cases” de `t`, variable de type `tableau`, (un entier par case).

   a) Quel est le nombre de rangements possibles de ces n entiers dans les n “cases mémoires” `t[1], ..., t[n]` ?

   Pour tout i appartenant à I_n, on note par $V(i,n)$ le nombre de rangements des n entiers dans les n “cases mémoires” `t[1], ..., t[n]` tels que l'appel de la procédure `Recherche (n,t,max)` provoque i affectations de la variable `max` au cours de son exécution.

   On admettra que ce nombre $V(i,n)$ est indépendant des n entiers initiaux pourvu toutefois que ceux-ci soient distincts.

b) Vérifier qu'effectivement le nombre d'affectations possibles de la variable **max** au cours de l'exécution de **Recherche(n,t,max)** appartient à I_n.
Par convention, on pose $V(0,n) = 0$ *et* $V(k,n) = 0$ *lorsque* $k > n$.

c) Quel est le nombre d'affectations de la variable **max** au cours de l'exécution de **Recherche(n,t,max)** si, pour tout $i \in I_n$, `t[i]`$= n+1-i$?

d) Montrer que $V(1,n) = (n-1)!$ et déterminer $V(n,n)$.

e) On suppose dans la première sous-question qui suit que $2 \leqslant i \leqslant n$.
- Montrer que $V(i, n+1) = V(i-1, n) + nV(i,n)$.
On pourra distinguer les rangements de $n+1$ entiers distincts deux à deux dans `t[1]`, ..., `t[n+1]`, suivant que `t[n+1]` contient ou non le plus grand de ces $n+1$ entiers.
- Montrer que la formule précédente s'étend aux cas $i = 1$ et $i = n+1$.
- Montrer qu'elle est encore vraie si $n = 1$ et $1 \leqslant i \leqslant 2$.

f) On définit le polynôme $P_n(X)$ par $P_n(X) = \sum_{i=0}^{n} V(i,n)X^i$.
- Montrer que $P_{n+1}(X) = (n+X)P_n(X)$.
- En déduire l'expression de $P_n(X)$.

3) On pose $G_n(X) = \frac{1}{n!}P_n(X)$.

a) Calculer $G_n(1)$.

b) Exprimer $G_{n+1}(X)$ à l'aide de $G_n(X)$.

c) Comparer $G_n'(1)$ et $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$.

4) Étant donné n entiers distincts deux à deux, on les range aléatoirement dans les n "cases" `t[1]`, ..., `t[n]` d'une variable `t` de type **tableau**.
Tous les rangements possibles constituent les événements élémentaires d'un espace probabilisé muni de la probabilité p : ces rangements étant de probabilités égales.
On note X_n la variable aléatoire égale au nombre d'affectations de la variable **max** au cours de l'exécution de **Recherche(n,t,max)**.

a) Déterminer la probabilité de l'événement $(X_n = 1)$ et de façon générale, exprimer, lorsque i appartient à I_n, $p(X_n = i)$ à l'aide de $V(i,n)$ et n.

b) Déterminer l'espérance de X_n.

c) Montrer que, si n est supérieur ou égal à 2, alors : $p(X_n = 2) = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1}\right)$.
Donner un équivalent simple de $p(X_n = 2)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

5) a) Si i appartient à I_n, montrer que : $(n+1)p(X_{n+1} = i) - np(X_n = i) = p(X_n = i-1)$.

b) En utilisant les résultats de la partie I.B. montrer par récurrence sur i que :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*,\ p(X_n = i) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{(i-1)!\, n}\left(\ln n\right)^{i-1}$$

Partie III. Calcul de l'inverse d'une certaine matrice.

On désigne toujours par n un entier naturel non nul, et $V(i,n)$ a toujours la signification qu'on lui a attribuée dans la partie II. On convient que : $V(0,0) = 1$ et $V(i,0) = 0$ pour tout $i \in I_n$.
Soit $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n+1 \\ 1 \leqslant j \leqslant n+1}}$ la matrice appartenant à $\mathbb{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $a_{ij} = (-1)^{j-i}V(i-1, j-1)$ pour tout $(i,j) \in \left(I_{n+1}\right)^2$.
Cette partie utilise certains résultats des parties I et II.

1) Montrer que $X(X-1)(\ldots)(X-n+1) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}V(k,n)X^k$.

2) On définit la famille de polynômes $\left(N_i(X)\right)_{i \in \{0,1,\ldots,n\}}$ par $N_0(X) = 1$, $N_1(X) = X$ et de façon générale $N_j(X) = X(X-1)(\ldots)(X-j+1)$ pour tout $j \in I_n$.

a) Montrer que $\left(N_i(X)\right)_{i \in \{0,1,\ldots,n\}}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Quelle est la matrice de passage de la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ à $\left(N_i(X)\right)_{i \in \{0,1,\ldots,n\}}$?

3) a) Montrer que A est inversible.

Pour tout $(i,j) \in (I_{n+1})^2$, l'élément situé sur la $i^{ième}$ ligne et la $j^{ième}$ colonne de A^{-1} est noté $\omega(i-1,j-1)$.

b) Montrer que : $X^n = \sum_{k=0}^{n} \omega(k,n) N_k(X)$.

4) a) Pour tout $p \in \{0,1,\ldots,n\}$, comparer p^n et $\sum_{k=0}^{p} k!\omega(k,n)\mathrm{C}_p^k$.

b) En utilisant les résultats de la partie I.A. donner une expression de $\omega(k,n)$.

Partie IV. Interprétation des nombres $\omega(k,n)$.

Dans cette partie encore n désignera un entier naturel non nul.
Soit k un entier naturel non nul, on appelle $k-$partition de I_n tout ensemble $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ dont les éléments A_i, pour $i = 1,\ldots,k$, sont des parties non vides de I_n, deux à deux disjointes et dont la réunion est égale à I_n.
On note par $s(k,n)$ le nombre de $k-$partitions de I_n et on convient que $s(0,n) = 0$.

1) Déterminer $s(1,1)$, $s(n,n)$, $s(1,n)$ et $s(k,n)$ lorsque k est un entier strictement supérieur à n.

2) Soit p un entier naturel non nul.

a) Déterminer le nombre de n-listes dont les éléments appartiennent à I_p. On rappelle que dans une telle liste les éléments ne sont pas forcément distincts.

b) Soit k un élément de I_p, déterminer le nombre de n-listes dont les éléments appartiennent à $\{1,\ldots,k\}$, chacun des nombres $1,\ldots,k$ apparaissant au moins une fois dans la liste.

c) Montrer que $p^n = \sum_{k=0}^{p} k!s(k,n)\mathrm{C}_p^k$.

3) Comparer $s(k,n)$ et $\omega(k,n)$ lorsque $k \in \{0,\ldots,n\}$.

PARTIE I Quelques résultats préliminaires

Nous écrirons indifféremment $P(X)$ ou P un élément de $\mathbb{R}_n[X]$..

A C'est la formule d'inversion de Pascal.

Q1 a) Soit $P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$. $\exists (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $P(X) = \sum_{\ell=0}^{n} \alpha_\ell X^\ell$.

$\varphi(P(X)) = \sum_{\ell=0}^{n} \alpha_\ell (X+1)^\ell$. Pour tout ℓ dans $[\![0,n]\!]$, $(X+1)^\ell$ est un élément de $\mathbb{R}_n[X]$ donc $\varphi(P(X))$ est un élément de $\mathbb{R}_n[X]$ comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$. φ est donc une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\varphi((\lambda P+Q)(X)) = (\lambda P+Q)(X+1) = \lambda P(X+1) + Q(X+1) = \lambda \varphi(P(X)) + \varphi(Q(X))$; φ est linéaire.

Finalement φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Comme $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1 < +\infty$ pour montrer que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ il ne reste plus à montrer que φ est injectif (ou surjectif).

Soit P un élément de $\mathrm{Ker}\,\varphi$. $P(X+1) = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$; $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x+1) = 0$ donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $P(t) = 0$, ainsi P est nul. $\mathrm{Ker}\,\varphi$ est donc réduit à l'élément nul de $\mathbb{R}_n[X]$ donc φ est injectif. C'est ce qu'il fallait montrer pour dire que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\varphi(X^k) = (X+1)^k = \sum_{r=0}^{k} C_k^r X^r$.

Par conséquent
$$M = \begin{pmatrix} C_0^0 & C_1^0 & \cdots & C_k^0 & \cdots & C_n^0 \\ 0 & C_1^1 & \cdots & C_k^1 & \cdots & C_n^1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & & C_k^k & & C_n^k \\ & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & & 0 & C_n^n \end{pmatrix}$$

M donc que M est triangulaire supérieure sans zéro sur sa diagonale. M est donc inversible. Ainsi retrouve-t-on le fait que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Notons encore que M est la matrice de passage de la base $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ à la base $(1, (X+1), (X+1)^2, \dots, (X+1)^n)$

c) Déterminer M^{-1} c'est, par exemple, trouver φ^{-1}.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Posons $Q = \varphi^{-1}(P)$. $\varphi(Q) = P$. $Q(X+1) = P(X)$ donc $Q(X) = P(X-1)$.

Ainsi $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi^{-1}(P) = P(X-1)$ ou $\varphi^{-1}(P(X)) = P(X-1)$.

$\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\varphi^{-1}(X^k) = (X-1)^k = \sum_{r=0}^{k} C_k^r (-1)^{k-r} X^r$.

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} C_0^0 & (-1)^1 C_1^0 & \cdots & (-1)^\ell C_\ell^0 & \cdots & (-1)^n C_n^0 \\ 0 & (-1)^0 C_1^1 & \cdots & (-1)^{\ell-1} C_\ell^1 & \cdots & (-1)^{n-1} C_n^1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & & (-1)^0 C_\ell^\ell & \cdots & (-1)^{n-\ell} C_n^\ell \\ & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & & 0 & (-1)^0 C_n^n \end{pmatrix}$$

M^{-1} est encore la matrice de passage de la base $(1,(X+1),\dots,(X+1)^n)$ à la base canonique $(1,X,X^2,\dots,X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q2 a) Posons $U=(a_0,a_1,\dots,a_n)$ et $V=(b_0,b_1,\dots,b_n)$.

Posons encore $W=(c_0,c_1,c_2,\dots,c_n)=UM$

$$\forall p\in [\![0,n]\!],\ c_p = (a_0,a_1,\dots,a_n)\times\begin{pmatrix} C_p^0 \\ C_p^1 \\ \vdots \\ C_p^p \\ 0 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix} = a_0C_p^0+a_1C_p^1+\dots+a_pC_p^p+a_{p+1}\times 0+\dots+a_n\times 0.$$

Ainsi $\forall p\in [\![0,n]\!],\ c_p=\sum_{k=0}^{p} C_p^k a_k = b_p$.

On peut ainsi écrire que $W=V$ donc que $UM=V$.

Ainsi $\underline{(b_0,b_1,\dots,b_n)=(a_0,a_1,\dots,a_n)M}$

b) Ce qui précède donne aussi $(a_0,a_1,\dots,a_n)=(b_0,b_1,\dots,b_n)M^{-1}$.

Ainsi : $\forall \ell\in [\![0,n]\!],\quad a_\ell=(b_0,b_1,\dots,b_n)\begin{pmatrix}(-1)^\ell C_\ell^0 \\ (-1)^{\ell-1}C_\ell^1 \\ \vdots \\ (-1)^0 C_\ell^\ell \\ 0 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix} = b_0(-1)^\ell C_\ell^0+b_1(-1)^{\ell-1}C_\ell^1+\dots+ b_\ell(-1)^{\ell-\ell}C_\ell^\ell+b_{\ell+1}\times 0+\dots+b_n\times 0$

donc $\underline{\forall \ell\in [\![0,n]\!],\ a_\ell=\sum_{r=0}^{\ell} C_\ell^r(-1)^{\ell-r}b_r}$

Exercice.. Retrouver le résultat de Q2 par récurrence (... faible).

$\boxed{B}$ Q1) a) Soit n un élément de $\mathbb{N}$ tel que : $n \geqslant q$. Notons que $n \in \mathbb{N}^*$ et que $[n, n+1]$ est contenu dans $[c, +\infty[$.

$\forall t \in [n, n+1]$, $g(n+1) \leq g(t) \leq g(n)$. En intégrant il vient $\int_n^{n+1} g(n+1)dt \leq \int_n^{n+1} g(t)dt \leq \int_n^{n+1} g(n)dt$

donc $g(n+1) \leq \int_n^{n+1} g(t)dt \leq g(n)$ pour tout élément de $[\![q, +\infty[\![$.

b) $\forall n \in [\![q, N-1]\!]$, $g(n+1) \leq \int_n^{n+1} g(t)dt \leq g(n)$. En sommant il vient :

$$\sum_{n=q}^{N-1} g(n+1) \leq \sum_{n=q}^{N-1}\int_n^{n+1} g(t)dt \leq \sum_{n=q}^{N-1} g(n) \quad \text{ou} \quad \sum_{n=q+1}^{N} g(n) \overset{①}{\leq} \int_q^N g(t)dt \overset{②}{\leq} \sum_{n=q}^{N-1} g(n)$$

Ainsi $\displaystyle\sum_{n=q}^{N-1} g(n) \overset{②}{\geqslant} \int_q^N g(t)dt$ et $\displaystyle\sum_{n=q}^{N-1} g(n) \underset{\substack{\uparrow \\ g(N)\geqslant 0}}{\leq} \sum_{n=q}^{N} g(n) = \sum_{n=q+1}^{N} g(n) + g(q) \overset{①}{\leq} \int_q^N g(t)dt + g(q)$.

Finalement : $\displaystyle\int_q^N g(t)dt \leq \sum_{n=q}^{N-1} g(n) \leq \int_q^N g(t)\,dt + g(q)$.

Q2) a) $\omega_{n+1} - \omega_n \sim g(n)$. Ainsi il existe un entier p et une suite $(\varepsilon_n)_{n\geqslant p}$ telle que :
- $\forall n \in [\![p, +\infty[\![$, $\omega_{n+1} - \omega_n = (1+\varepsilon_n)g(n)$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$

$0 < \varepsilon < 1$ donc $\exists \hat{q} \in \mathbb{N}$, $\forall n \in [\![\hat{q}, +\infty[\![$, $|\varepsilon_n| < \varepsilon$ ou $-\varepsilon < \varepsilon_n < \varepsilon$

$\forall n \in [\![\hat{q}, +\infty[\![$, $1-\varepsilon < 1+\varepsilon_n < 1+\varepsilon$

$\forall n \in [\![\hat{q}, +\infty[\![$, $(1-\varepsilon)\,g(n) \leq (1+\varepsilon_n)g(n) \leq (1+\varepsilon)\,g(n)$ (car $g(n) \geqslant 0$).

$\forall n \in [\![\hat{q}, +\infty[\![$, $(1-\varepsilon)\,g(n) \leq \omega_{n+1} - \omega_n \leq (1+\varepsilon)g(n)$.

Il est clair pour $q = \max(\hat{q}, E(c)+1)$.

$q \geqslant c$ et $\forall n \in [\![q, +\infty[\![$, $(1-\varepsilon)\,g(n) \leq \omega_{n+1} - \omega_n \leq (1+\varepsilon)g(n)$.

Ainsi $(\forall \varepsilon \in]0,1[)$ $\exists q \in \mathbb{N}$ tel que : $q \geqslant c$ et $\forall n \in [\![q, +\infty[\![$, $(1-\varepsilon)g(n) \leq \omega_{n+1} - \omega_n \leq (1+\varepsilon)g(n)$

b) Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que : $N > q$.
$\forall n \in [\![q, N-1]\!]$, $(1-\varepsilon)\,g(n) \leq \omega_{n+1} - \omega_n \leq (1+\varepsilon)\,g(n)$. En sommant on obtient :

$$(1-\varepsilon)\sum_{n=q}^{N-1} g(n) \leq \omega_N - \omega_q \leq (1+\varepsilon)\sum_{n=q}^{N-1} g(n).$$

La positivité de $1-\varepsilon$ et de $1+\varepsilon$ et l'encadrement de Q1 b nous permettent encore d'écrire que :

$$(1-\varepsilon)\int_q^N g(t)dt \leq \omega_N-\omega_q \leq (1+\varepsilon)\int_q^N g(t)dt + (1+\varepsilon)\,g(q)$$

Donc $(1-\varepsilon)\left[\int_1^N g(t)dt-\int_1^q g(t)dt\right]+\omega_q \leq \omega_N \leq (1+\varepsilon)\left[\int_1^N g(t)dt-\int_1^q g(t)dt\right]+(1+\varepsilon)g(q)+\omega_q$

Or $(1+\varepsilon)\left[\int_1^N g(t)dt-\int_1^q g(t)dt\right] \leq (1+\varepsilon)\int_1^N g(t)dt$ car $-(1+\varepsilon)\int_1^q g(t)dt \leq 0$ puisque $(1+\varepsilon)$ et $\int_1^q g(t)dt$ sont des réels positifs (g est positive et $1\leq q$).

Finalement : $(1-\varepsilon)\displaystyle\int_1^N g(t)dt-(1+\varepsilon)\int_1^q g(t)dt+\omega_q \leq \omega_N \leq (1+\varepsilon)\int_1^N g(t)dt+(1+\varepsilon)g(q)+\omega_q$.

(Q3) Fixons ε dans $]0,1[$. Il existe q dans $\mathbb{N}$ tel que :

$\forall N\in [\![q+1,+\infty[\![,\ (1-\varepsilon)\int_1^N g(t)dt-(1+\varepsilon)\int_1^q g(t)dt+\omega_q \leq \omega_N \leq (1+\varepsilon)\int_1^N g(t)dt+(1+\varepsilon)g(q)+\omega_q$

$\lim\limits_{N\to+\infty}\int_1^N g(t)dt=+\infty$ car g est positive et $\int_1^{+\infty} g(t)dt$ diverge.

Ainsi $\exists q'\in\mathbb{N}^*,\ \forall N\in[\![q',+\infty[\![,\ \int_1^N g(t)dt>0$ (le strictement est essentiel ...).

$$\forall N\in[\![\max(q',q+1),+\infty[\![,\quad 1-\varepsilon+\underbrace{\frac{-(1+\varepsilon)\int_1^q g(t)dt+\omega_q}{\int_1^N g(t)dt}}_{U_N} \leq \frac{\omega_N}{\int_1^N g(t)dt} \leq 1+\varepsilon+\underbrace{\frac{(1+\varepsilon)g(q)+\omega_q}{\int_1^N g(t)dt}}_{V_N}$$

$\lim\limits_{N\to+\infty} U_N=0$ et $\lim\limits_{N\to+\infty} V_N=0$ car $\lim\limits_{N\to+\infty}\int_1^N g(t)dt=+\infty$ (les numérateurs sont des constantes)

Ainsi $\exists q_1\in\mathbb{N}^*,\ \forall N\in[\![q_1,+\infty[\![,\ |U_N|<\varepsilon$ ou $-\varepsilon<U_N<\varepsilon$

$\exists q_2\in\mathbb{N}^*,\ \forall N\in[\![q_2,+\infty[\![,\ |V_N|<\varepsilon$ ou $-\varepsilon<V_N<\varepsilon$

Alors : $\forall N\in[\![\max(q',q+1,q_1,q_2),+\infty[\![,\quad 1-\varepsilon-\varepsilon \leq \dfrac{\omega_N}{\int_1^N g(t)dt} \leq 1+\varepsilon+\varepsilon$

Posons $p=\max(q',q+1,q_1,q_2)$.

$\forall N\in[\![p,+\infty[\![,\quad 1-2\varepsilon \leq \dfrac{\omega_N}{\int_1^N g(t)dt} \leq 1+2\varepsilon$.

$\forall N\in[\![p,+\infty[\![,\quad \left|\dfrac{\omega_N}{\int_1^N g(t)dt}-1\right| \leq 2\varepsilon$.

Nous avons donc prouvé que :

$$\forall \varepsilon \in]0,1[,\ \exists p \in \mathbb{N},\ \forall N \in [\![p,+\infty[\![,\ \left| \frac{\omega_N}{\int_1^N g(t)dt} - 1 \right| \leqslant 2\varepsilon.$$

Ceci suffit pour dire que : $\lim_{N\to+\infty} \frac{\omega_N}{\int_1^N g(t)dt} = 1$ et donc que $\omega_N \sim \int_1^N g(t)dt$ non ?

Pour les sceptiques montrons proprement que la suite de terme général $T_N = \frac{\omega_N}{\int_1^N g(t)dt}$ converge vers 1.

Soit à prouver que : $\forall \varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists p \in \mathbb{N},\ \forall N \in [\![p,+\infty[\![,\ |T_N - 1| < \varepsilon'$

Fixons ε' dans $\mathbb{R}_+^*$ et posons $\varepsilon = \min(\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon'}{3})$!!

$\varepsilon \in]0,1[$. D'après ce qui précède, $\exists p \in \mathbb{N},\ \forall N \in [\![p,+\infty[\![,\ |T_N - 1| \leqslant 2\varepsilon$

Or $2\varepsilon \leqslant 2 \times \frac{\varepsilon'}{3} < \varepsilon'$; ainsi $\forall N \in [\![p,+\infty[\![,\ |T_N - 1| < \varepsilon'$.

Nous avons donc bien montré que : $\forall \varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall N \in [\![p,+\infty[\![,\ |T_N - 1| < \varepsilon'$.

Ainsi $\lim_{N\to+\infty} T_N = 1$; $\omega_N \underset{N\to+\infty}{\sim} \int_1^N g(t)dt$ ou : $\underline{\underline{\omega_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_1^n g(t)dt}}$!

(Q4) Posons $\forall t \in [1,+\infty[,\ g(t) = \frac{1}{t}$. g est définie, continue, décroissante et positive sur $[1,+\infty[$

Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \omega_n = \sum_{k=1}^n g(k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \omega_{n+1} - \omega_n = g(n+1) = \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n} = g(n)$

Ce qui précède donne alors $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \omega_n \sim \int_1^n g(t)dt = \int_1^n \frac{1}{t}dt = \ln n$

Ainsi $\underline{\underline{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n}}$ ce qui est loin d'être un scoop.

<u>Remarque</u>.- Soit g une fonction continue, positive sur $[1,+\infty[$ et décroissante sur un intervalle $[c,+\infty[$. Le cours nous indique que la série de terme général $g(n)$ est de même nature que l'intégrale $\int_1^{+\infty} g(t)dt$. Ce qui précède permet de dire, qu'en cas de divergence :

$$\sum_{k=1}^n g(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_1^n g(t)dt \qquad \left(\text{Poser } \omega_n = \sum_{k=1}^{n-1 \text{ ou } n} g(k)\right)$$

PARTIE II Etude d'un algorithme

__Remarque.-__ Dans la suite, pour simplifier l'exposé, nous appellerons rangement un rangement des n entiers dans les n "cases mémoires" $t[1], t[2], \dots, t[n]$, autrement dit une bijection de l'ensemble des n entiers dans l'ensemble de ces n "cases mémoires".

Si k appartient à $[\![2,n]\!]$, nous appellerons passage d'indice k dans la boucle le $(k-1)^{\text{ième}}$ passage dans la boucle c'est à dire la suite des instructions effectuées dans cette boucle lorsque la variable pilotant la boucle (ici i) est affectée de la valeur k.

Nous confondrons encore très (ou trop !) souvent les variables et leur contenu.

(Q1) Le contenu de la variable max après l'appel dans le programme principal de Recherche (n, t, max) est bien évidemment le maximum des n entiers contenus dans $t[1], t[2], \dots, t[n]$. Démontrons cette affirmation.

Si $n=1$ c'est clair. Supposons $n \geq 2$. Pour établir le résultat énoncé montrons par récurrence que pour tout i dans $[\![2,n]\!]$ max contient le plus grand élément des i entiers contenus dans $t[1], t[2], \dots, t[i]$ après le passage d'indice i dans la boucle.

* $i=2$. Examinons le passage d'indice 2. Au départ max contient "la valeur de $t[1]$".
  Si $t[2] > \max$ est vrai alors max reçoit la valeur contenue dans $t[2]$ qui est bien le plus grand des deux entiers contenus dans $t[1], t[2]$.
  Si $t[2] > \max$ est faux, rien n'est fait et max garde "la valeur de $t[1]$" qui est bien encore le plus grand des deux entiers contenus dans $t[1], t[2]$.
  La propriété est vraie pour $i=2$.
* Supposons la propriété vraie pour i élément de $[\![2,n-1]\!]$ et montrons la pour $i+1$.

Ainsi le passage d'indice i a amené dans max le plus grand élément des i entiers contenus dans $t[1], t[2], \dots, t[i]$.
Comme dans le cas $i=2$, le passage d'indice $i+1$ va amener dans max

le plus grand des deux entiers contenus dans max et $t[i+1]$ c'est à dire le plus grand des entiers contenus dans $t[1], t[2], \dots, t[i], t[i+1]$. Ceci achève la récurrence.

(Q2) a) Faire un rangement c'est construire une bijection de l'ensemble des n entiers dans l'ensemble des n " cases " $t[1], t[2], \dots, t[n]$.

Il y a donc $n!$ rangements possibles.

b) L'appel de cette procédure provoque au moins une affectation : la première ($max := t[1]$). Les $n-1$ passages dans la boucle provoquent au plus $n-1$ affectations de max car un passage donne 0 ou une affectation de max.
Ainsi le nombre d'affectations de la variable max dans l'appel Recherche (n, t, max) est un élément de $[\![1, n]\!] = I_n$.

c) $t[1] = n$ et $\forall i \in [\![2, n]\!]$, $t[i] = n+1-i < n = t[1]$.
La première affectation donne à max la valeur n. n étant le plus grand des entiers contenus dans $t[1], t[2], \dots, t[n]$ la variable max va garder la valeur n tout au long de la boucle car le test est à chaque fois négatif.
Le nombre d'affectations de max est dans ce cas 1.

d) $V(1,n)$ est le nombre de rangements de n entiers tel que l'appel de la procédure provoque une affectation (et une seule) de la variable max.
Il en est ainsi si et seulement si le test de la boucle est toujours négatif ; autrement dit si et seulement si l'entier contenu dans $t[1]$ et affecté à max au cours de la première affectation est supérieur aux entiers contenus dans $t[2], \dots, t[n]$.
$V(1,n)$ est donc le nombre de rangements où le plus grand des entiers à ranger va dans la case $t[1]$, les $n-1$ autres entiers se répartissant dans les cases $t[2], \dots, t[n]$. Il y a donc autant de rangements solutions que de manières de ranger les $n-1$ entiers différents du plus grand dans les $n-1$ cases $t[2], t[3], \dots, t[n]$, c'est à dire $(n-1)!$ $V(1,n) = (n-1)!$

L'appel Recherche (n,t,max) provoque n affectations de max ssi à chaque passage dans la boucle le test est positif autrement dit si et seulement si pour tout i dans $[\![2,n]\!]$ l'entier contenu dans $t[i]$ est supérieur au plus grand des entiers contenus dans $t[1], t[2], \dots, t[i-1]$. Ceci est, dans la seule mesure où la suite des entiers contenus dans $t[1], t[2], \dots, t[n]$ est strictement croissante. Il y a donc un seul rangement solution. $\underline{\underline{V(n,n)=1}}$.

c) Soit i un élément de $[\![2,n]\!]$. Notons S_i l'ensemble des rangements solutions.

Notons S'_i (resp. S''_i) l'ensemble des rangements solutions tels que $t[n+1]$ contienne (resp. ne contienne pas) le plus grand élément des $n+1$ entiers.

$S'_i \cap S''_i = \emptyset$ donc $V(i,n+1) = \text{card}\, S_i = \text{card}\,(S'_i \cup S''_i) = \text{card}\, S'_i + \text{card}\, S''_i$.

Notons qu'un élément de S'_i provoquera lors de l'appel Recherche $(n+1,t,max)$ une affectation de max lors du dernier passage dans la boucle (passage d'indice n) et donc $i-1$ affectation(s) avant. Rappelons que ces $i-1$ affectations servent à affecter à max le plus grand des entiers contenus dans $t[1], t[2], \dots, t[n]$.

Pour construire un élément de S'_i :

1°/ On range le plus grand des $n+1$ entiers dans la case $t[n+1]$. Il y a une possibilité

2°/ On range les n entiers restants dans les cases $t[1], t[2], \dots, t[n]$ de telle manière à ce que $i-1$ affectations soient nécessaires et suffisantes pour que l'algorithme précédent mette le plus grand des entiers contenus dans $t[1], t[2], \dots, t[n]$ dans max ; il y a alors $V(i-1,n)$ possibilités pour ranger les n entiers restants dans ces n cases $t[1], t[2], \dots, t[n-1], t[n]$.

Ainsi $\text{card}\, S'_i = 1 \times V(i-1,n) = V(i-1,n)$.

Notons que pour un élément de S''_i - la case $t[n+1]$ ne contient pas le plus grand des $n+1$ entiers - lors de l'appel de la procédure il n'y a pas d'affectation lors du dernier passage dans la boucle et qu'il y en i avant qui servent à amener dans max le plus grand des $n+1$ entiers avant le dernier passage dans la boucle.

Pour construire un élément de $\mathcal{S}''_i$:

1°. On range l'un des n entiers différents du plus grand dans la case $t[n+1]$; il y a n possibilités.

2°. On range les n entiers restants dans les cases $t[1], t[2], \dots, t[n]$ de manière à ce qu'un tel rangement provoque i affectations lors de l'appel de la procédure (α!). Il y a donc $V(i,n)$ possibilités.

Finalement $\text{card}\, \mathcal{S}''_i = n \times V(i,n)$.

Donc $V(i,n+1) = \text{card}\, \mathcal{S}_i = V(i-1,n) + n\,V(i,n)$.

$\forall i \in [\![2,n]\!],\ V(i,n+1) = V(i-1,n) + n\,V(i,n)$.

- Pour $i=1$, $V(i,n+1) = n!$ et $V(i-1,n) + nV(i,n) = V(0,n) + n\,V(1,n) = 0 + n\,(n-1)! = n!$

  Pour $i=1$ on a encore $V(i,n+1) = V(i-1,n) + nV(i,n)$.

- Pour $i = n+1$, $V(i,n+1) = V(n+1,n+1) = 1$ et $V(i-1,n) + nV(i,n) = V(n,n) + n\,V(n+1,n) = 1 + n \times 0 = 1$

  Pour $i = n+1$ on a encore $V(i,n+1) = V(i-1,n) + n\,V(i,n)$.

Ainsi pour $n \geq 2$: $\forall i \in [\![1,n+1]\!],\ V(i,n+1) = V(i-1,n) + n\,V(i,n)$.

Remarque - En fait cette formule vaut pour tout i dans $\mathbb{N}^*$ (pour $i \geq n+2$: $V(i,n+1) = V(i-1,n) = V(i,n) = 0$)

- Supposons $n = 1$.

Pour $i=1$ $V(i,n+1) = V(1,2) = (2-1)! = 1$ et $V(i-1,n) + nV(i,n) = V(0,1) + 1\times V(1,1) = 0 + 1\times 1 = 1$

Donc $V(i,n+1) = V(i-1,n) + n\,V(i,n)$

Pour $i=2$ $V(i,n+1) = V(2,2) = 1$ et $V(i-1,n) + nV(i,n) = V(1,1) + 1\,V(2,1) = 1 + 1\times 0 = 1$

Donc $V(i,n+1) = V(i-1,n) + n\,V(i,n)$.

Pour $n=1$ $\forall i \in [\![1,2]\!],\ V(i,n+1) = V(i-1,n) + n\,V(i,n)$ ... et même pour $i \in \mathbb{N}^*$

Pour résumé : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall i \in [\![1,n+1]\!],\ V(i,n+1) = V(i-1,n) + n\,V(i,n)$.

Et même $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall i \in \mathbb{N}^*,\ V(i,n+1) = V(i-1,n) + n\,V(i,n)$.

f] $P_{n+1}(X) = \sum_{i=0}^{n+1} V(i,n+1)X^i \underset{\substack{\uparrow \\ V(0,n+1)=0}}{=} \sum_{i=1}^{n+1} V(i,n+1)X^i = \sum_{i=1}^{n+1}\big(V(i-1,n)+nV(i,n)\big)X^i$

formule de 2 c] qui vaut pour $i \in [\![1,n]\!]$

$$P_{n+1}(X) = \sum_{i=1}^{n+1} V(i-1,n)X^i + n\sum_{i=1}^{n+1} V(i,n)X^i = \sum_{i=0}^{n} V(i,n)X^{i+1} + n\sum_{i=1}^{n+1} V(i,n)X^i$$

Or $V(0,n) = V(n+1,n) = 0$ donc $P_{n+1}(X) = X\sum_{i=0}^{n} V(i,n)X^i + n\sum_{i=0}^{n} V(i,n)X^i = (X+n)P_n(X)$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_{n+1}(X) = (n+X)P_n(X)$.

$P_n(X) = (n-1+X)P_{n-1}(X) = (n-1+X)(n-2+X)P_{n-2}(X) = \cdots = (n-1+X)(n-2+X)\cdots(1+X)P_1(X)$

$P_1(X) = \sum_{i=0}^{1} V(i,1)X^i = V(0,1)X^0 + V(1,1)X = X$, donc $P_n(X) = \prod_{k=0}^{n-1}(k+X)$ ... ce que l'on peut confirmer par une simple récurrence.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_n(X) = \prod_{k=0}^{n-1}(k+X)$.

Q3) a] $G_n(1) = \frac{1}{n!}P_n(1) = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(k+1) = \frac{1}{n!}\times n! = 1$. $G_n(1) = 1$.

b] $G_{n+1}(X) = \frac{1}{(n+1)!}P_{n+1}(X) = \frac{1}{n+1}\times\frac{1}{n!}\times(n+X)P_n(X) = \frac{1}{n+1}(n+X)G_n(X)$

$G_{n+1}(X) = \frac{1}{n+1}(n+X)G_n(X)$.

c] $G'_{n+1}(X) = \frac{1}{n+1}G_n(X) + \frac{1}{n+1}(n+X)G'_n(X)$; $G'_{n+1}(1) = \frac{1}{n+1}G_n(1) + G'_n(1)$

donc $G'_{n+1}(1) - G'_n(1) = \frac{1}{n+1}G_n(1) = \frac{1}{n+1}$.

Pour n dans $[\![2,+\infty[\![$, $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \sum_{k=2}^{n}\big(G'_k(1) - G'_{k-1}(1)\big) + 1 = G'_n(1) - G'_1(1) + 1$

Or $G'_1(1) = \frac{1}{1!}P'_1(1) = 1$ donc $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = G'_n(1) - 1 + 1 = G'_n(1)$

Ainsi pour n dans $[\![2,+\infty[\![$, $G'_n(1)$ et $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ sont égaux. Ceci vaut encore pour $n=1$ car $G'_1(1)=1$.

Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ G'_n(1) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

(Q4) a) $p(X_n=1)=\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n}$ d'après Q2 il y a $(n-1)!$ rangements favorables et $n!$ rangements possibles.

Soit $i\in[\![1,n]\!]$

De la même manière $p(X_n=i)=\frac{V(i,n)}{n!}$ puisqu'il y a $V(i,n)$ rangements favorables et $n!$ rangements possibles.

$p(X_n=1)=\frac{1}{n}$ et $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $p(X_n=i)=\frac{V(i,n)}{n!}$.

b) Observons que $G_n(X)=\frac{1}{n!}P_n(X)=\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}V(i,n)X^i=\sum_{i=0}^{n}p(X_n=i)X^i$

$\left\{\begin{array}{l} V(0,n)=0 \\ \text{et} \\ \frac{V(i,n)}{n!}=p(X_n=i) \text{ pour } i\in[\![1,n]\!] \end{array}\right.$

G_n est donc la fonction génératrice de X_n.

$G_n'(X)=\sum_{i=1}^{n} i\,p(X_n=i)X^{i-1}$

$G_n'(1)=\sum_{i=1}^{n} i\,p(X_n=i)=E(X_n)$. $\quad E(X_n)=G_n'(1)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

$E(X_n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

c) Soit $n\in[\![2,+\infty[\![$. $p(X_n=2)=\frac{1}{n!}V(2,n)$. Cherchons donc $V(2,n)$.

Donnons deux versions.

Version 1.. D'après Q2 c) nous avons pour $k\in\mathbb{N}^*$ et $i\in[\![1,k+1]\!]$, $V(i,k+1)=V(i-1,k)+kV(i,k)$

Ainsi pour $k\in\mathbb{N}^*$, $V(2,k+1)=V(1,k)+kV(2,k)$

Donc pour $k\in\mathbb{N}^*$, $V(2,k+1)=(k-1)!+kV(2,k)$ ou

$$\frac{V(2,k+1)}{k!}=\frac{1}{k}+\frac{V(2,k)}{(k-1)!}.$$

Ainsi $\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{V(2,k+1)}{k!}-\frac{V(2,k)}{(k-1)!}\right)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$

Donc $\frac{V(2,n)}{(n-1)!}-\frac{V(2,1)}{0!}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$ ou $V(2,n)=(n-1)!\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$ car $V(2,1)=0$

Ainsi $p(X_n=2)=\frac{V(2,n)}{n!}=\frac{(n-1)!}{n!}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$; $p(X_n=2)=\frac{1}{n}\left[1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n-1}\right]$

Version 2.. Nous allons retrouver ce résultat par dénombrement.

Notons S les rangements solutions.

Un rangement est solution s'il provoque deux affectations c'est à dire s'il provoque une seule affectation dans la boucle.

Pour tout $p \in [\![1,n]\!]$ notons S_p l'ensemble des rangements solutions où le plus grand élément de l'ensemble des n entiers est mis dans la case numéro p.

S est réunion disjointe de $S_1, S_2, \dots, S_n$. Ainsi $V(2,n) = \text{card } S = \sum_{k=1}^{n} \text{card } S_k$.

Notons que S_1 est vide (si le plus grand élément est dans la case 1 il n'y a qu'une affectation : la première).

Soit p dans $[\![2,n]\!]$. Calculons $\text{card } S_p$.

Un rangement appartient à S_p si et seulement si le plus grand des n entiers est dans la case p et si la boucle provoque une affectation et une seule ayant lieu nécessairement pour $i = p$.

Un rangement appartient à S_p si et seulement si * le plus grand des n entiers est dans la case p (dans ce cas il n'y aura pas d'affectation pour $i = p+1, p+2, \dots, n$)

* l'élément de la case N° 1 est supérieur aux éléments des cases $2, 3, \dots, p-1$ (il n'y aura pas d'affectation pour $i = 2, 3, \dots, p-1$ et une affectation pour $i = p$).

Ainsi pour construire un élément de S_p

1° On choisit $p-1$ éléments parmi les n entiers privé du plus grand (C_{n-1}^{p-1} possibilités).

2° On range le plus grand de ces $p-1$ éléments dans la case N° 1 (1 possibilité)

3° On range les $p-2$ éléments restants de ces $p-1$ éléments dans les cases $2, 3, \dots, p-1$ ($(p-2)!$ possibilités)

4° On range le plus grand élément des n entiers dans la case N° p (1 possibilité)

5° On range les $n-p$ entiers pas encore rangés dans les cases N° $p+1, p+2, \dots, n$ ($(n-p)!$ possibilités)

Ainsi $\text{card } S_p = C_{n-1}^{p-1} \times 1 \times (p-2)! \times 1 \times (n-p)! = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!}(p-2)!(n-p)! = \frac{(n-1)!}{(p-1)}$

Donc $\text{card } S = \sum_{p=1}^{n} \text{card } S_p = \sum_{p=2}^{n} \text{card } S_p = \sum_{p=2}^{n} \frac{(n-1)!}{p-1} = (n-1)! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$

Donc $\underline{V(2,n) = (n-1)! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}}$; $p(X_n = 2) = \frac{V(2,n)}{n!} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$. Fin de la version 2.

$p(X_n=2) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}\ln(n-1) = \frac{1}{n}\left[\ln n + \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right] = \frac{\ln n}{n}\left[1 + \frac{1}{\ln n}\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right] \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}$. $\underline{\underline{p(X_n=2) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}}}$.

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = \lim_{n\to\infty}\left(\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right) = 0$ ↑

Q5 a) Soit $i \in [\![1, n]\!]$. $p(X_{n+1}=i) = \frac{V(i,n+1)}{(n+1)!} = \frac{V(i-1,n)}{(n+1)!} + n\frac{V(i,n)}{(n+1)!} = \frac{p(X_n=i-1)}{n+1} + \frac{n}{n+1}p(X_n=i)$

Ainsi $(n+1)p(X_{n+1}=i) = p(X_n=i-1) + np(X_n=i)$ et : $\underline{\underline{(n+1)p(X_{n+1}=i) - np(X_n=i) = p(X_n=i-1)}}$.

b) * $p(X_n=1) = \frac{V(1,n)}{n!} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} = \frac{1}{(1-1)!\,n}(\ln n)^{1-1}$; à fortiori $p(X_n=1) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{(1-1)!\,n}(\ln n)^{1-1}$

La propriété est donc vraie pour $i=1$.

* Supposons la propriété vraie pour i dans $\mathbb{N}^*$ ($p(X_n=i) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{(i-1)!\,n}(\ln n)^{i-1}$) et montrons la pour $i+1$ ($p(X_n=i+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{i!\,n}(\ln n)^{i}$).

$\forall n \in [\![i+1, +\infty[\![$, $(n+1)p(X_{n+1}=i+1) - np(X_n=i+1) = p(X_n=i) \sim \frac{1}{(i-1)!\,n}(\ln n)^{i-1}$.

Posons donc $\forall t \in [1, +\infty[$, $g(t) = \frac{1}{(i-1)!\,t}(\ln t)^{i-1}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \begin{cases} 0 & \text{pour } n \leq i \\ np(X_n=i+1) & \text{pour } n \geq i+1 \end{cases}$

Nous avons alors $w_{n+1} - w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} g(n)$. De plus g est continue et positive sur $[1,+\infty[$.
Montrons qu'il existe c tel que $[c,+\infty[\subset [1,+\infty[$ et g décroissante sur $[c,+\infty[$.
Si $i=1$: $\forall t \in [1,+\infty[$, $g(t) = \frac{1}{t}$ et c'est OK. Supposons $i \geq 2$, g est dérivable sur $[1,+\infty[$ et $\forall t \in [1,+\infty[$, $g'(t) = \frac{1}{(i-1)!}\frac{1}{t^2}\left[(i-1)(\ln t)^{i-2}\times\frac{1}{t}\times t - (\ln t)^{i-1}\times 1\right] = \frac{(\ln t)^{i-2}}{(i-1)!\,t^2}[i-1-\ln t]$
Le signe de g' sur $[1,+\infty[$ est celui de $i-1-\ln t$, cette quantité est négative dès que t appartient à $[e^{i-1},+\infty[$. g est donc décroissante sur $[e^{i-1},+\infty[$ qui est contenu dans $[1,+\infty[$ (notons que ceci vaut aussi pour $i=1$...)
$\forall A \in [1,+\infty[$, $\int_1^A g(t)\,dt = \frac{1}{(i-1)!}\left[\frac{1}{i}(\ln t)^i\right]_1^A = \frac{1}{i!}(\ln A)^i$; $\lim_{A\to+\infty}\int_1^A g(t)\,dt = +\infty$. $\int_1^{+\infty} g(t)\,dt$ diverge.

Nous pouvons appliquer I B car g a toutes les qualités nécessaires.

Il vient alors $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_1^n g(t)\,dt$.

Nous venons de voir que : pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\int_1^n g(t)\,dt = \frac{(\ln n)^i}{i!}$ $(A=n\ldots)$

Ainsi $n\,p(X_n=i+1) \sim \frac{(\ln n)^i}{i!}$, donc $p(X_n=i+1) \sim \frac{1}{i!\,n}(\ln n)^i$ ce qui achève la récurrence.

Donc $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $p(X_n=i) = \frac{1}{(i-1)!\,n}(\ln n)^{i-1}$.

PARTIE III Calcul de l'inverse d'une certaine matrice (!!!)

(Q1) Rappelons que : $(n-1+X)(n-2+X)\cdots(1+X)X = P_n(X) = \sum_{i=0}^{n} V(i,n)X^i$

Par conséquent : $(n-1-X)(n-2-X)\cdots(1-X)(-X) = \sum_{i=0}^{n} V(i,n)(-X)^i$.

Donc $(-1)^n(X-(n-1))(X-(n-2))\cdots(X-1)(X) = \sum_{i=0}^{n} V(i,n)(-1)^i X^i$.

Ce qui donne $X(X-1)(\cdots)(X-n+1) = \sum_{i=0}^{n} V(i,n)\frac{(-1)^i}{(-1)^n}X^i \overset{!}{=} \sum_{i=0}^{n} V(i,n)\frac{(-1)^n}{(-1)^i}X^i = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}V(i,n)X^i$

Ainsi $\prod_{k=0}^{n}(X-k) = X(X-1)(\cdots)(X-n+1) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}V(k,n)X^k$.

(Q2) a) $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $N_j(X) = \prod_{k=0}^{j-1}(X-k)$; $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $N_j(X) \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\deg(N_j(X)) = j$

De plus $N_0(X) = 1$ donc $N_0(X) \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\deg(N_0(X)) = 0$.

Ainsi $(N_0(X), N_1(X), \dots, N_n(X))$ est une famille de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ de degrés échelonnés.

Cette famille est donc une famille libre de $n+1$ éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$.

Finalement $(N_i(X))_{i\in\{0,1,\dots,n\}}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Si $i \in [\![1,n]\!]$, $N_i(X) = X(X-1)(\cdots)(X-i+1) = \sum_{\ell=0}^{i}(-1)^{i-\ell}V(\ell,i)X^\ell = \sum_{\ell=1}^{i+1}(-1)^{i-(\ell-1)}V(\ell-1,i)X^{\ell-1}$

$N_i(X) = \sum_{\ell=1}^{i+1}(-1)^{i+1-\ell}V(\ell-1,i+1-1)X^{\ell-1} = \sum_{\ell=1}^{i+1}a_{\ell,i+1}X^{\ell-1} = \sum_{\ell=1}^{n+1}a_{\ell,i+1}X^{\ell-1}$

$a_{\ell,i+1} = (-1)^{i+1-\ell}V(\ell-1,i+1-1) = 0$ si $\ell > i+1$

Nous pouvons donc écrire que : $\forall i \in [\![2,n+1]\!]$, $N_{i-1}(X) = \sum_{\ell=1}^{n+1}a_{\ell i}X^{\ell-1}$.

Validons cette formule pour $i=1$.

$N_{1-1}(X) = N_0(X) = 1$ et $\sum_{\ell=1}^{n+1}a_{\ell 1}X^{\ell-1} = \sum_{\ell=1}^{n+1}(-1)^{1-\ell}V(\ell-1,0) = 1$ car $V(\ell-1,0) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell-1 \neq 1 \\ 1 & \text{si } \ell-1 \end{cases}$

Finalement $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$, $N_{i-1}(X) = \sum_{\ell=1}^{n+1} a_{\ell i} X^{\ell-1}$.

Donc pour tout $i \in [\![1,n+1]\!]$, la $i^{\text{ème}}$ colonne de la matrice de passage de la base $(1, X, \dots, X^n)$ à la base $(N_0(X), N_1(X), \dots, N_n(X))$ est : $\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{n+1\,i} \end{pmatrix}$

Par conséquent cette matrice de passage est A.

La matrice de passage de $(1, X, \dots, X^n)$ à $(N_0(X), N_1(X), \dots, N_n(X))$ est A.

(Q3) a) Une matrice de passage étant inversible, A est inversible.

On peut aussi remarquer que A est triangulaire supérieure et que sa diagonale ne contient pas de 0 car elle est constituée de 1.

b) $A^{-1} = (\omega(i-1, j-1))_{(i,j) \in [\![1,n+1]\!]^2}$ est la matrice de passage de $(N_0(X), N_1(X), \dots, N_n(X))$ à $(1, X, X^2, \dots, X^n)$.

Ainsi $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $X^i = \sum_{\ell=1}^{i+1} \omega(\ell-1, i) N_{\ell-1}(X) = \sum_{\ell=0}^{i} \omega(\ell, i) N_\ell(X)$.

En particulier $X^n = \sum_{\ell=0}^{n} \omega(\ell, n) N_\ell(X)$.

(Q4) a) Soit $p \in [\![0,n]\!]$. $p^n = \sum_{\ell=0}^{n} \omega(\ell, n) N_\ell(p)$.

Si $\ell = 0$: $N_\ell(p) = N_0(p) = 1$ $\quad (N_0(X) = 1)$

Supposons que $\ell \in [\![1,n]\!]$. $N_\ell(X) = X(X-1)\cdots(X-\ell+1)$ admet pour zéros $0, 1, \dots, \ell-1$. Par conséquent si $p \in [\![0, \ell-1]\!]$, $N_\ell(p) = 0$.

Si $p \in [\![\ell, n]\!]$, $N_\ell(p) = p(p-1)\cdots(p-\ell+1) = \dfrac{p!}{(p-\ell)!} = \ell!\, C_p^\ell$

Par conséquent dans le cas où $\ell \in [\![1,n]\!]$: $N_\ell(p) = \begin{cases} \ell!\, C_p^\ell & \text{si } p \geq \ell \\ 0 & \text{si } p < \ell \end{cases}$ avec $p \in [\![0,n]\!]$.

Observons que ce dernier résultat vaut aussi pour $\ell = 0$.

Ainsi $p^n = \sum_{\ell=0}^{n} \omega(\ell,n) N_\ell(p) = \sum_{\ell=0}^{p} \omega(\ell,n)\, \ell!\, C_p^\ell$.

$\forall p \in [\![0,n]\!]$, $p^n = \sum_{\ell=0}^{p} \ell!\, \omega(\ell,n)\, C_p^\ell$.

b) En appliquant I.A (avec $a_\ell = \ell!\, \omega(\ell,n)$ et $b_\ell = \ell^n$) il vient :

$\forall \ell \in [\![0,n]\!]$, $\ell!\, \omega(\ell,n) = \sum_{r=0}^{\ell} C_\ell^r (-1)^{\ell-r} r^n$.

Ainsi $\forall k \in [\![0,n]\!],\ \omega(k,n) = \dfrac{1}{k!} \displaystyle\sum_{r=0}^{k} C_k^r (-1)^{k-r} r^n$

Remarque.. $\displaystyle\sum_{r=0}^{k} C_k^r (-1)^{k-r} r^n$ n'est autre que le nombre de surjections d'un ensemble de n éléments dans un ensemble de k éléments.

PARTIE IV Interprétation des nombres $\omega(k,n)$.

(Q1) $\underline{\underline{\Delta(1,1)=1}}$ car la seule 1-partition de $[\![1,1]\!]$ est $\{\{1\}\}$.

$\underline{\underline{\Delta(n,n)=1}}$ car la seule n-partition de $[\![1,n]\!]$ est $\{\{1\},\{2\},\dots,\{n\}\}$.

$\underline{\underline{\Delta(1,n)=1}}$ car la seule 1-partition de $[\![1,n]\!]$ est $\{\{1,2,\dots,n\}\}$.

$\underline{\underline{\Delta(k,n)=0}}$ si $k>n$ non ?!

(Q2) a) $\underline{\underline{\text{le nombre de } n\text{-listes dont les éléments appartiennent à } [\![1,p]\!] \text{ est } p^n}}$ (cours !).

b) Compter le nombre de n-listes dont les éléments appartiennent à $[\![1,k]\!]$ chacun des nombres $1,\dots,k$ apparaissant au moins une fois dans la liste c'est compter le nombre de surjections de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,k]\!]$.

Notons que une application f de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,k]\!]$ est une surjection si et seulement si $\{f^{-1}(\{1\}), f^{-1}(\{2\}),\dots, f^{-1}(\{k\})\}$ est une k-partition de $[\![1,n]\!]$.

Ainsi pour construire une surjection de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,k]\!]$

1°.- on construit une k-partition $\{A_1, A_2,\dots, A_k\}$ de $[\![1,n]\!]$ ($\underline{\Delta(k,n)}$ $\underline{\text{possibilités}}$)

2°.- on fait correspondre à chaque élément A_i de la partition un élément α_i de $[\![1,k]\!]$ de telle sorte que à deux éléments distincts de la partition corresponde deux éléments distincts de $[\![1,k]\!]$ ($\underline{k!}$ $\underline{\text{possibilités}}$)

La surjection obtenue est l'application de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,k]\!]$ qui à un élément j de $[\![1,n]\!]$ fait correspondre α_i où i est l'unique élément de $[\![1,k]\!]$ tel que $j\in A_i$.

Finalement le nombre de n listes dont les éléments sont dans $[\![1,k]\!]$ chacun des nombres $1,2,\dots,k$ apparaissant au moins une fois dans la liste est $\underline{\underline{k!\,\Delta(k,n)}}$.

5) Notons tout d'abord que le résultat précédent reste exact si l'on remplace $\{1,2,\dots,k\}$ par une partie quelconque de k éléments de $[\![1,p]\!]$.

Notons $\mathcal{C}$ l'ensemble des n-listes de $[\![1,p]\!]$.

Notons pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $\mathcal{C}_k$ l'ensemble des n-listes de $[\![1,p]\!]$ où apparaissent exactement k éléments distincts de $[\![1,p]\!]$.

$\mathcal{C}$ est réunion disjointe de $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_p$.

Ainsi $p^n = \operatorname{card} \mathcal{C} = \sum_{k=1}^{p} \operatorname{card} \mathcal{C}_k$.

Soit $k \in [\![1,p]\!]$. Pour construire un élément de $\mathcal{C}_k$

1°. on choisit une partie A ayant k éléments de $[\![1,p]\!]$ (C_p^k possibilités)

2°. on construit une n-liste dont les éléments appartiennent à A chacun des éléments de A apparaissant au moins une fois dans la liste ($k!\,s(k,n)$ possibilités)

Ainsi $\operatorname{card} \mathcal{C}_k = C_p^k\, k!\, s(k,n)$.

Finalement $p^n = \sum_{k=1}^{n} C_p^k\, k!\, s(k,n)$ et même $p^n = \sum_{k=0}^{n} C_p^k\, k!\, s(k,n)$ car $s(0,n)=0$.

Q3 Ce qui précède donne : $\forall p \in [\![0,n]\!]$, $p^n = \sum_{k=0}^{n} C_p^k\, k!\, s(k,n)$.

I A donne alors $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $k!\, s(k,n) = \sum_{r=0}^{k} C_k^r (-1)^{k-r} r^n$.

Donc $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $s(k,n) = \frac{1}{k!} \sum_{r=0}^{k} C_k^r (-1)^{k-r} r^n = \omega(k,n)$.

$\forall k \in [\![0,n]\!]$, $s(k,n) = \omega(k,n)$.